Forkurshefte i matematikk
variant 1

2016

Inger Christin Borge

Matematisk institutt, UiO

(Plan for kurset: se side 3)

Forord

Velkommen til Universitetet i Oslo (UiO), og til forkurs i matematikk!

Dette heftet er skrevet til bruk i variant 1 av forkurset [1]. Denne varianten tar opp stoff som først og fremst hører hjemme i 1T/1MA og R1/2MX, og som det er viktig å ha god trening i før du begynner å studere realfag. Det er dermed en meget god investering å følge forkurset, og ikke minst å regne masse! Vi setter oss to mål med forkurset: 1) å repetere viktige deler av skolematematikken og 2) forberede deg på videre realfagsstudier.

Heftet er lagt opp som en samling av små temaer for hver dag, der vi prøver å forklare noe av skolematematikken enda litt mer detaljert, slik at du skal bli tryggere på den. Dette støttes med oppsummerende eksempler -bruk god tid på hvert eksempel. Vi skal samtidig prøve å bygge en bro over til videre studier, og vi tar med litt av det du vil bli bedre kjent med senere (også av tankegang) der det er naturlig.

Bak i heftet vil du finne en oppgavesamling der flesteparten av oppgavene er laget av Elise Hoff Øby, som skrev det forrige forkursheftet for variant 1. Tusen takk til Elise for tillatelse til å bruke oppgavene videre og Dina Haraldsson for hjelp med skriving av oppgavene. Også stor takk til Elisabeth Seland for tilrettelegging!

Oppgavene skal du jobbe med på regneøvelsene, der du får hjelp av en gruppelærer. Det vil ikke bli tid til å gjennomgå oppgavene på forelesning, så bruk gruppelæreren din slik at du får svar på alle oppgavene du lurer på. Forelesningene, regneøvelsene og heftet vil dermed utfylle hverandre.

Meld gjerne inn trykkfeil og kommentarer til foreleser Karoline, gruppelærere eller meg (*ingerbo@math.uio.no*). Lykke til og kos deg med forkurs!

Hilsen Christin

[1] Første utgave av dette heftet ble brukt høsten 2009. Senere versjoner er reviderte utgaver.

8.-13. august: Forelesninger kl. 10-12 og regneøvelser kl. 12.30-15.30
Foreleser: Karoline Moe (karoline.moe@ub.uio.no)

Nedenfor er det spesifisert en del oppgaver som du absolutt bør gjøre, men flott hvis du rekker flere! Det er mange oppgaver, så pass på å gjøre noen fra hvert tema. Alle oppgaver er merket med A, fasit med B. Oppgave '1.1' i menyen betyr altså 'Oppgave A.1.1' osv.

	Dagens oppgavemeny **(oppgaver side 93->)**
Mandag	$1.1, 1.4 - 1.10$ (tall og regneregler)
	$1.14 - 1.16, 1.20 - 1.22$ (forenkling, faktorisering)
	1.24 (løse lineære og rasjonale likninger)
	$1.26 - 1.29$ (eksponentialer og logaritmer)
	$1.33 - 1.35, 1.38$ (tekstoppgaver)
Tirsdag	$2.1 - 2.3, 2.4 - 2.8$ (andregradslikninger)
	$2.13 - 2.14$ (faktorisering)
	2.17 (geometri og teori)
	2.21 (vise *abc*-formel)
	$2.22 - 2.26$ (irrasjonale likninger)
Onsdag	$3.1 - 3.2, 3.4 - 3.7$ (ulikheter)
	$3.9 - 3.11$ (rette linjer)
	$3.13 - 3.15, 3.19 - 3.20$ (to likninger i to variabler)
	$3.21 - 3.24, 3.26 - 3.29$ (absoluttverdi)
Torsdag	$4.1 - 4.4$ (vektorer)
	$4.6 - 4.8, 4.11 - 4.17, 4.21$ (areal og omkrets)
	$4.22 - 4.24$ (radianer)
	$4.26 - 4.30, 4.32 - 4.33$ (trekantberegninger)
Fredag	$5.1 - 5.7$ (trigonometri)
	$5.11 - 5.14$ (funksjoner)
	$5.8 - 5.10$ (trigonometri)
	$5.15 - 5.19$ (funksjoner)
Lørdag	$6.1 - 6.5$ (derivasjon)
	$6.6 - 6.11, 6.15 - 6.19, 6.25, 6.28 - 6.34$ (drøfting)

Innhold

Kapittel 1

Mandag

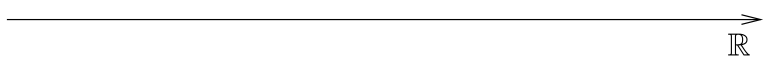
1.1 De reelle tallene

Vi skal jobbe med de reelle tallene, betegnet med $\mathbb{R}$. Blant de reelle tallene finner vi følgende kjente tallsystemer:

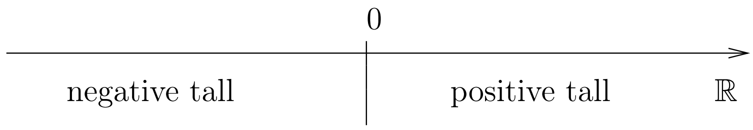
- $\mathbb{N}$, de *naturlige* tallene: $1, 2, 3, \ldots$
- $\mathbb{Z}$, de *hele* tallene: $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
- $\mathbb{Q}$, de *rasjonale* tallene, dvs. brøkene
- $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ (leses '$\mathbb{R}$ tatt vekk $\mathbb{Q}$'), de *irrasjonale* tallene, dvs. tallene i $\mathbb{R}$ som ikke kan skrives som en brøk, for eksempel π, $\sqrt{2}$, e osv.

De ulike tallsystemene er mengder av tall, og vi bruker notasjonen $\in$, 'element i', for å si at et tall tilhører et av disse tallsystemene. For eksempel kan vi skrive $-32 \in \mathbb{Z}$.

Når vi kun bruker ordet *tall*, mener vi et reelt tall. De reelle tallene kan ordnes, dvs. vi kan sammenligne størrelsen på to reelle tall og bestemme om det ene tallet er større enn det andre. Geometrisk kan vi tenke på de reelle tallene som liggende på en linje, kalt *tallinja*:



Blant de reelle tallene er tallet 0 spesielt (se regnereglene nedenfor). Vi merker av tallet 0 et sted på tallinja, og får delt inn tallene i de positive og de negative tallene:



Dette er utgangspunktet vårt. Og så kan vi begynne å regne. Vi skal nå sette kjente ting i system (og kanskje på plass?):

1.2 Regneregler

Anta at vi har to tall. Vi kan blant annet

- summere dem. Da kalles hvert av tallene et *ledd* i summen.
- multiplisere dem. Da kalles hvert av tallene en *faktor* i produktet.
- dele dem på hverandre. Da kalles det ene tallet en *dividend* og det andre tallet en *divisor*, og vi får regnestykket 'dividend : divisor'.

Vi får fort bruk for å ta noen eksempler, og da gjerne noen talleksempler. For eksempel hvis vi har tallene $\frac{1}{2}$ og $\frac{5}{6}$, er summen av dem $\frac{4}{3}$, produktet av dem er $\frac{5}{12}$, og divisjonen $\frac{1}{2} : \frac{5}{6}$ gir tallet $\frac{3}{5}$ (sjekk det!). Husk at deletegnet $:$ betyr det samme som brøkstrek /, eventuelt $-$ (brøkstrek, ikke minustegn).

Som vi vet, treffer vi fort på større regnestykker og uttrykk, der regneoperasjoner blandes. Hvordan vet vi for eksempel hvilket tall

$$6 \cdot 8 - \tfrac{2}{3} + (2^2 - 3) + 8^{\frac{1}{3}} - \pi \tag{1.1}$$

er? (Hvor ligger dette på tallinja, dvs. er det positivt eller negativt, og hvor stort/lite er det?)

For å finne tallet (1.1) må vi følge **regnereglene for de reelle tallene**. For å skrive opp dem, innfører vi *symboler*, dvs. vi sier ikke bare 'anta at vi har to tall', men vi kaller dem noe, slik at vi kan regne med dem, og ikke minst, sette opp regler ved hjelp av dem.

Anta at vi har to tall a og b. Det betyr at a og b kan være hvilke som helst reelle tall, og skriver vi for eksempel opp regelen

$$a + b = b + a$$

har vi slått sammen veldig mange (uendelig mange) regnestykker: Regelen sier at hver gang vi skal regne ut en sum, spiller ikke rekkefølgen på leddene noen rolle: Uttrykkene $a + b$ og $b + a$ er alltid like (likhetstegn er viktig å bruke riktig!).

Vi har flere regler, og vi oppsummerer dem her:
Vi lar nå a, b og c være reelle tall. Da har vi for addisjon:

- $a + b = b + a$ (addisjon er *kommutativ*)
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ (addisjon er *assosiativ*)
- $a + 0 = a$ (egenskapen til tallet 0)
- $a - a = 0$ (*inverstall* for addisjon)
- $a - b = a + (-b)$ (subtraksjon er å legge til et negativt tall)
- $a - (b + c) = a - b - c$ (minus utenfor parentes)
- $a - (b - c) = a - b + c$ (minus utenfor parentes)

For multiplikasjon:

- $ab = ba$ (multiplikasjon er kommutativ)
- $a(bc) = (ab)c$ (multiplikasjon er assosiativ)
- $a \cdot 1 = a, \ \dfrac{a}{1} = a$ (egenskapen til tallet 1)
- $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$ når $a \neq 0$ (inverstall for multiplikasjon)

Når vi 'blander' addisjon og multiplikasjon, har vi den såkalte *distributive loven* som sier at multiplikasjon distribuerer over addisjon:

$$\boxed{a(b+c) = ab + ac} \tag{1.2}$$

Vi har dessuten:

$$\boxed{\text{Hvis } ab = 0, \text{ så er } a = 0 \text{ og/eller } b = 0.} \tag{1.3}$$

Innføringen av symboler gjør det også mulig å beskrive mengder av tall. For eksempel kan de rasjonale tallene beskrives ved hjelp av symboler:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ : \ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\},$$

som leses 'de rasjonale tallene er mengden av alle tall på formen $\frac{a}{b}$ der a og b er <u>hele</u> tall og b er forskjellig fra null'.

Vi har **regneregler for rasjonale tall** også, dvs. **brøkregler** (det kan være nyttig å tenke litt over hvorfor reglene må være slik).

- Multiplikasjon av brøker:
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$
- Forkorte/utvide med felles faktor:
$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$
- Divisjon av brøker:
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$
- Sum av to brøker med felles nevner:
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$
- Sum av to brøker uten felles nevner:
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Legg merke til at regelen for å summere to brøker uten felles nevner kan modifiseres: For å være sikre på at vi ikke får felles faktorer i teller og nevner, kan vi bruke *minste felles multiplum* av nevnerne b og d som felles nevner. Tallet som kalles 'minste felles multiplum av b og d' er det minste tallet som både b og d går opp i. Vi skriver gjerne dette tallet som

$$\mathrm{mfm}(b, d).$$

For eksempel er mfm(8,12)=24 siden $24 = 3 \cdot 8$, så 24 er et multiplum av 8, og $24 = 2 \cdot 12$, så 24 er også et multiplum av 12, og 24 er det minste slike tallet.

Vi trenger ofte å multiplisere et tall med seg selv mange ganger, dvs. vi ser på *potenser* av et tall. Da er eksponenter nyttige. Vi lar n være et naturlig tall og skriver

$$\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ faktorer}} = a^n.$$

Uttrykket a^n kalles en potens av a, der a er grunntallet og n er eksponenten.

La $a, b \in \mathbb{R}$. Vi har **potensreglene**:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad n > m, \ a \neq 0$
- $(a^n)^m = a^{nm}$
- $a^n b^n = (ab)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0$

Vi merker oss at

$$a^1 = a.$$

Siden vi også har at $1 \cdot a = a$, ser vi at tallet 1 'forsvinner' ganske ofte i uttrykk!

Vi definerer

$$\boxed{a^0 = 1} \text{ for } a \neq 0$$

og sier ikke hva vi skal mene med 0^0 (det er altså et uttrykk som ikke er definert).

Vi merker oss videre følgende skrivemåte for negative eksponenter som passer med potensreglene:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}} \text{ for } a \neq 0. \tag{1.4}$$

Ved hjelp av denne skrivemåten kan vi skrive et tall x, $x \neq 0$, på *standardform*, dvs. på formen $a \cdot 10^n$ der $1 \leq a < 10$ og n er et helt tall. For eksempel er $1000 = 1 \cdot 10^3$ (kan også skrives som 10^3), og $0{,}072 = 7{,}2 \cdot 10^{-2}$.

For å håndtere brøker i eksponenten, gjør vi bruk av n-te røtter.

Uttrykket $\sqrt[n]{a}$ kalles *n-te roten av a*, dvs. det tallet vi må gange med seg selv n ganger for å få a. Da passer det fint å bruke skrivemåten $a^{\frac{1}{n}}$ for dette tallet siden potensreglene gir at

$$\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdots a^{\frac{1}{n}}}_{n} = (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a.$$

Vi har altså

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}, \quad \text{der } a \geq 0 \text{ hvis } n \text{ er et partall.} \tag{1.5}$$

Siden vi ikke kan ta partallsrøtter av negative tall, gir (1.5) ikke mening hvis a er negativ og n er et partall. Vi kan imidlertid ta oddetallsrøtter av negative tall. For eksempel er tredjeroten av -8 lik -2, siden $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.

Førsteroten av et tall er bare tallet selv, og du vil nok aldri se symbolet $\sqrt[1]{\ }$ (bortsett fra denne ene gangen). Når $n = 2$ skriver vi vanligvis ikke 2-tallet i roten. Andreroten kalles gjerne *kvadratroten*.

Regelen

$$\boxed{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}} \tag{1.6}$$

følger fra potensreglene siden

$$\sqrt[n]{ab} = (ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b},$$

og den er mye brukt.

Eksempel 1.1

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

■

MEN HUSK: $\sqrt[n]{a+b}$ er nesten aldri lik $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$. Vi kan altså IKKE skrive $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.

Ved å sette sammen disse reglene kan vi ordne opp med tall der eksponenten er en brøk:

Eksempel 1.2

$$8^{\frac{2}{3}} = 8^{2 \cdot \frac{1}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Alternativt:

$$8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{1}{3} \cdot 2} = (8^{\frac{1}{3}})^2 = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$$

■

For ordens skyld noterer vi oss at du kan bruke potensreglene når eksponenten er et hvilket som helst *reelt* tall, ikke bare en brøk.

Ved hjelp av de ulike skrivemåtene kan vi lage utrolig mange **uttrykk**. For eksempel er

$$\frac{a+1}{a^2}$$

et *rasjonalt* uttrykk, der vi kan sette inn ulike verdier for a (men ikke $a = 0$). Hvis vi setter $a = 1$, får vi 2, et helt tall. Setter vi $a = 2$, får vi $\frac{3}{4}$, et rasjonalt tall. Setter vi $a = \sqrt{2}$, får vi $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$, som er et irrasjonalt tall, osv.

Det kan være spennende i seg selv å lage uttrykk, men kanskje enda viktigere: vi må være fortrolig med uttrykk av tall og symboler for å kunne analysere og løse problemer. Verden er komplisert og full av problemer. For å løse dem vil det ofte dukke opp de rareste uttrykk underveis. Det vil derfor være veldig viktig å kunne regne med symboler; å kunne algebra.

1.3 Eksempler

Ved hjelp av noen eksempler skal vi ta for oss noen stadig tilbakevendende aspekter ved algebraiske manipulasjoner, dvs. symbolmanipulasjoner, **parentesregler** o.l. Vi starter med et viktig eksempel:

Eksempel 1.3 Vi vil regne ut

$$5 + 2 \cdot 3.$$

Vi har lært at dette er 11. Hvorfor det, og hvorfor er det ikke 21? Vi kan ikke umiddelbart ty til reglene vi har ramset opp for å svare på det. Når det ikke står noen parenteser, ser det ut til at vi har et valg.

Matematikerne har tatt dette valget for oss: Vi fokuserer på *summen* og *regner ut* ***leddene*** *i summen først*. Dermed er det underforstått at

$$5 + 2 \cdot 3 = 5 + (2 \cdot 3) = 5 + 6 = 11.$$

Hvis vi ønsker å fokusere på produktet, dvs. regne ut $(5 + 2) \cdot 3 = 7 \cdot 3 = 21$, må vi sette inn parenteser. ■

Eksempel 1.4 Vi vil regne ut (1.1):

$$6 \cdot 8 - \tfrac{2}{3} + (2^2 - 3) + 8^{\frac{1}{3}} - \pi$$

Dette uttrykket er en sum med 5 ledd: Vi har leddene $6 \cdot 8$, $-\frac{2}{3}$, $2^2 + 3$, $8^{\frac{1}{3}}$ og $-\pi$. Ved å regne ut hvert av leddene for seg og deretter trekke leddene sammen får vi

$$\begin{aligned} & 6 \cdot 8 - \tfrac{2}{3} + (2^2 - 3) + 8^{\frac{1}{3}} - \pi \\ = \; & 48 - \tfrac{2}{3} + 1 + 2 - \pi \\ = \; & \tfrac{144 - 2 + 3 + 6 - 3\pi}{3} \\ = \; & \tfrac{151 - 3\pi}{3}, \end{aligned}$$

som er et eksakt svar.

Eksakte svar er ofte å foretrekke, men det avhenger litt av hva vi skal bruke svaret til. Lurer vi for eksempel på hvor stort/lite tallet er, kan vi ta et kjapt *overslag*, som i dette tilfellet gir $\frac{150}{3} - \frac{3 \cdot 3}{3} = 50 - 3 = 47$. Eventuelt kan vi bruke kalkulator (på mobilen?) som gir tilnærmet 47,19. ■

Den distributive loven $a(b+c) = ab + ac$ er veldig nyttig siden den involverer både addisjon og multiplikasjon, og vi ofte har uttrykk med både produkter og summer som skal manipuleres:

Eksempel 1.5 Vi vil forenkle følgende uttrykk:

$$1 + 5uv + 7u - 3v - 2uv$$

Vi tenker på symbolene u og v som hvilke som helst tall. Da vil produktet uv være et nytt tall, og alle forekomster av dette vil være like, uansett hva u og v er. Dermed bruker vi den distributive loven til å trekke sammen $5uv$ og $-2uv$ til $3uv$. De andre leddene kan ikke trekkes sammen, så vi får

$$1 + 7u - 3v + 3uv.$$

■

Eksempel 1.6 Viktig!

$$-\frac{r-3}{4} = \frac{-r+3}{4} = \frac{r-3}{-4}$$

Dette er fordi en brøk regnes som ett ledd, og underforstått står det

$$-\left(\frac{r-3}{4}\right).$$

Når vi flytter fortegnet inn i brøken (<u>enten</u> i telleren <u>eller</u> nevneren!), må parentesen løses opp på vanlig måte. ■

Eksempel 1.7 Ved hjelp av potensregler og røtter kan vi skrive diverse uttrykk på flere måter:

$$s^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{(s^3)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{s^3}}$$

■

Å **faktorisere** uttrykk er viktig på veien mot å forenkle uttrykk. Da bruker vi gjerne den distributive loven 'baklengs', og går fra en sum med ledd til et produkt med *faktorer* (hvis mulig):

Eksempel 1.8 Vi faktoriserer ved å gjenkjenne felles faktorer i de ulike leddene i en sum og sette faktorene utenfor en parentes:

$$\begin{aligned} & 4st + 7t - 34st \\ = \; & t(4s + 7 - 34s) \\ = \; & t(7 - 30s) \end{aligned}$$

Vi har dermed 'gjort om'/skrevet om summen $4st + 7t - 34st$ til produktet med faktorer t og $7 - 30s$. Her kunne vi ha trukket sammen $4st$ og $-34st$ før vi fant felles faktor. Bruk utregningen du liker best. ■

Sørg for at disse tingene sitter ved å gjøre mange av dagens oppgaver! Vi skal faktorisere mer i morgen.

1.4 Likninger

En likning er en *sammenheng* mellom en eller flere variabler (ukjente størrelser). Sammenhengen er gitt ved at to uttrykk i variabelen(e) er satt *lik* hverandre. Verden er full av sammenhenger: ting avhenger av hverandre, og mange fenomener i naturen gir opphav til ulike typer likninger. Dette er også hva kurset MAT1001 (begynnerkurs i matematikk ved UiO) handler om. Vi skal repetere en del ulike likningstyper du allerede har møtt, og starter med ulike typer likninger i én variabel. Vi kaller variabelen gjerne for x.

1.4.1 Lineære likninger

Lineære likninger, eller førstegradslikninger, i én variabel x er likninger der leddene er på formen 'et reelt tall $\cdot\, x$', og i tillegg kan vi ha konstante ledd (ledd som er reelle tall).

Eksempel 1.9 Likningen

$$3x + 5x - 8 = \frac{7}{4}x - 1$$

er lineær i variabelen x. ■

Løsningsmetode: Vi forenkler uttrykkene på hver side av likhetstegnet så mye som mulig (vi må dermed kunne regnereglene, for å kunne løse likninger, for å kunne løse (verdens)problemer). Vi kan legge til eller trekke fra samme tall på hver siden av =, og vi kan gange med samme tall forskjellig fra 0, eller dele med samme tall forskjellig fra 0 på hver side av =. Dette gjøres helt til vi kan se hva løsningen er, dvs. vi står igjen med '$x = \ldots$'.

Eksempel 1.10 Vi løser likningen i Eksempel 1.9:

$$\begin{aligned} 3x + 5x - 8 &= \tfrac{7}{4}x - 1 && \text{trekker sammen} \\ 8x - 8 &= \tfrac{7}{4}x - 1 && \text{multipliserer med felles nevner} \\ 32x - 32 &= 7x - 4 && \text{flytter over} \\ 25x &= 28 && \text{får } x \text{ alene} \\ x &= \tfrac{28}{25}, \end{aligned}$$

som er et eksakt svar vi beholder (istedenfor å avrunde). Tallet $\frac{28}{25}$ er det eneste tallet i verden (på tallinja) som passer inn i likningen vi ville løse. ■

Legg merke til at ikke alle likninger har løsninger. For eksempel gir ikke likningen $2x + 1 = 2x - 1$ mening, dvs. det fins ingen tall x som oppfyller likningen.

1.4.2 Rasjonale likninger, del 1

Rasjonale likninger er likninger med brøkuttrykk (rasjonale uttrykk) der variabelen fins i minst én nevner. Disse likningene ender blant annet opp som lineære likninger etter litt manipulering.

Eksempel 1.11

$$\frac{3}{x-1} = \frac{6}{x}$$

er en rasjonal likning i x. I dette eksempelet er uttrykkene i x lineære, og x fins bare i nevnerne. ■

Løsningsmetode: Anta at x har verdier slik at nevnerne er forskjellig fra 0. Multipliser likningen med fellesnevneren og rydd opp. Løs så likningen du får.

Eksempel 1.12 Vi løser likningen i Eksempel 1.11:

$$\frac{3}{x-1} = \frac{6}{x}$$

Vi antar at $x \neq 0$ og at $x \neq 1$, multipliserer likningen med fellesnevneren $x(x-1)$ og forkorter vekk nevnerne. Det gir i dette tilfellet en lineær likning, som vi vet hvordan vi løser. Vi får:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x-1} &= \frac{6}{x} \\[1em]
\frac{3x(x-1)}{x-1} &= \frac{6x(x-1)}{x} \\
3x &= 6(x-1) \\
3x &= 6x-6 \\
-3x &= -6 \\
x &= 2
\end{aligned}$$

■

1.4.3 Eksponential- og logaritmelikninger

Vi har allerede tatt for oss potensreglene, og vi har sett på noen ulike typer likninger. Spørsmålet vi stiller nå er: Hvordan kan vi løse likninger der variabelen befinner seg i eksponenten?

En *eksponentiallikning* er en likning på formen

$$a^x = b \tag{1.7}$$

der a og b er *positive reelle tall*. For å løse denne likningen skal vi som vanlig finne x. Likningen sier i dette tilfellet at x er det tallet vi må opphøye a i for å få b. Dette tallet kalles noe spesielt, nemlig *logaritmen til* b *med grunntall* a, skrevet $\log_a b$. Løsningen på (1.7) er altså

$$x = \log_a b.$$

Når grunntallet er 10, får vi $\log_{10}$, som ofte betegnes med lg. Vi har altså

$$10^{\lg b} = b, \quad \text{for } b > 0.$$

Eksempel 1.13 Likningen $10^x = 100$ har løsningen $x = 2$ siden $10^2 = 100$, dvs. at $\lg 100 = 2$ ('2 er det tallet vi må opphøye 10 i for å få 100'). ■

Logaritmer har blant annet vist seg å være nyttig for å lage ulike skalaer. For eksempel Richter-skalaen for å måle jordskjelv, eller pH-skalaen:

Eksempel 1.14 pH-verdien til en vannløsning sier oss hvor sur/basisk løsningen er og har en matematisk definisjon:

$$\mathrm{pH} \ = -\lg[\mathrm{H}^+],$$

dvs. pH måles ved å se på hvor stor konsentrasjon av hydrogen-ioner H^+, betegnet $[\mathrm{H}^+]$, løsningen har. I rent vann er $[\mathrm{H}^+] = 1 \cdot 10^{-7}$ mol/l. Dermed får vi

$$\mathrm{pH} = -\lg(1 \cdot 10^{-7}) = -(-7) = 7,$$

dvs. at pH-verdien til rent vann er lik 7. ■

Vi har altså

$$a^{\log_a b} = b, \quad a, b > 0,$$

der a kalles grunntallet i logaritmen. Av grunner som vil bli klare etter hvert, pleier matematikere først og fremst å bruke grunntallet $\boxed{e \approx 2,71828}$ (et irrasjonalt tall) med tilhørende logaritme $\log_e$, som kalles *den naturlige logaritmen*, og skrives ln. Vi har dermed

$$e^{\ln b} = b, \quad b > 0. \tag{1.8}$$

Det er denne logaritmen vi stort sett skal bruke videre. Vi velger også å holde oss til denne når vi skal løse eksponentiallikninger. Potensreglene gir følgende **logaritmeregler** for $a, b > 0$:

1) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
2) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3) $\ln a^b = b \ln a$

Vi kan nå løse eksponentiallikninger.
Løsningsmetode: 'Ta logaritmen' på hver side av likhetstegnet og bruk logaritmereglene. Spesielt regel 3) er nyttig: den gjør at du får flyttet x-en i eksponenten ned:

Eksempel 1.15 Vi løser likningen $10^x = 100$ ved hjelp av ln:

$$\begin{aligned} 10^x &= 100 && \text{'tar ln' på begge sider} \\ \ln 10^x &= \ln 10^2 && \text{bruker regel 3)} \\ x \ln 10 &= 2 \ln 10 && \text{får } x \text{ alene} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

■

Hvis ikke tallene er så pene som ovenfor, beholder vi mest mulig eksakte svar, og bruker kalkulator hvis det trengs.

Logaritmelikninger er likninger der variabelen er bakt inn i en logaritme (vi bruker gjerne ln).
Løsningsmetode: Ta 'e opphøyd i' på hver side (det er mulig du må manipulere likningen litt først). Ved å bruke (1.8), blir du kvitt ln:

Eksempel 1.16 Vi vil finne x slik at $\ln x = 3$. Det gir følgende utregning:

$$\begin{aligned} \ln x &= 3 && \text{'}e\text{ opphøyd i' på begge sider} \\ e^{\ln x} &= e^3 && \text{bruker definisjonen } e^{\ln x} = x \\ x &= e^3, \end{aligned}$$

som er et pent svar, og siden $e \approx 2{,}7$, kan vi anslå svaret til noe mellom $2^3 = 8$ og $3^3 = 27$, og nærmere 27 enn 8, for eksempel 20. (Kalkulator gir $e^3 \approx 20{,}08$. -Jeg lover at jeg anslo før jeg sjekket på kalkulator!) ■

1.5 Uoppstilte likninger

Å løse likninger er nyttig for å løse problemer. Å lage en likning av et problem kan imidlertid være vanskelig. Blant annet må du gjenkjenne variabelen i problemet.

Vi tar foreløpig en oppkonstruert tekstoppgave, der vi har et problem som gir opphav til en lineær likning:

Eksempel 1.17 Tre naturlige tall som følger etter hverandre har sum lik 144. Finn tallene.

Vi har tre tall som er ukjente. Vi lar f.eks. det minste tallet være x. Da vil de to andre tallene være $x + 1$ og $x + 2$ (siden de er naturlige tall). Teksten kan dermed gjøres om til følgende likning:

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 144$$

Dette er en lineær likning i x, som etter opprydding gir $3x = 141$, så $x = 47$. Løsningen er dermed tallene 47, 48 og 49. ■

Kapittel 2

Tirsdag

2.1 Andregradslikninger

Vi fortsetter likningsløsingen vår, og går videre til andregradslikninger i én variabel. Vi kaller fortsatt vår ene variabel for x.

Det som skiller en lineær likning i x og en andregradslikning i x er at en andregradslikning har, i tillegg til eventuelle lineære ledd, et ledd på formen 'et reelt tall multiplisert med x^2'.

Eksempel 2.1 Likningen $x^2 = 2x$ er en andregradslikning i x. I tillegg til det lineære leddet $2x$, har likningen også andregradsleddet x^2. ■

En generell *andregradslikning* i x skrives gjerne på formen

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.1}$$

der a, b og c er reelle tall, dvs. vi har samlet alle leddene som er forskjellig fra 0 på venstre side av likhetstegnet. Dessuten må vi ha at $a \neq 0$, ellers er likningen lineær.

Hvordan finner vi de tallene x som oppfyller likningen (2.1)? Andregradslikninger kan løses ved hjelp av en kalkulator, men vi ønsker ikke å være avhengig av kalkulatoren for å løse slike likninger. Dessuten ligger det mye bruk og forståelse av diverse regneregler bak løsningsmetoden for andregradslikninger, så vi skal nå se litt nærmere på denne metoden.

Eksempel 2.2 Vi vil løse likningen i Eksempel 2.1:

$$x^2 = 2x,$$

dvs.

$$x^2 - 2x = 0.$$

Hva tenkte den første personen i verden som løste en slik likning? Denne personen var sikkert meget god i algebra, og kunne blant annet faktorisere. Det kan vi også:

$$x(x-2) = 0.$$

Det nye som dukker opp i forbindelse med andregradslikninger er altså at et *produkt* som involverer x i begge faktorer skal være lik 0. Se tilbake til formel (1.3) -det er denne vi bruker nå: Den sier at hvis et produkt er 0, er minst en av faktorene lik 0, dvs.

$$x = 0 \ \ \underline{\text{eller}} \ \ x - 2 = 0,$$

som gir to lineære likninger med løsninger $x = 0$ eller $x = 2$. Setter vi inn 0 eller 2 i den opprinnelige likningen, ser vi at de passer, dvs. vi har funnet to løsninger. ■

Vi vet at løsningsmetoden for å løse likningen (2.1) ligger i å huske formelen

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \tag{2.2}$$

som kalles *abc-formelen.*

Du skal fortsatt få lov til å bruke denne formelen når du løser andregradslikninger, men la oss for en stund late som vi ikke har lært denne formelen ennå.

Vi vil løse likningen $ax^2 + bx + c = 0$. Vi tenker litt over det vi gjorde i Eksempel 2.2: Vi faktoriserte og brukte regelen (1.3). Det sier oss at for å løse $ax^2 + bx + c = 0$, må vi kunne faktorisere $ax^2 + bx + c = 0$ for å få et produkt av høyst to lineære faktorer (det er jo ikke sikkert uttrykket lar seg faktorisere). Deretter kan vi bruke vår favorittregel (1.3).

2.2 Faktorisering av andregradsuttrykk

Andregradsuttrykk kalles også *kvadratiske* uttrykk. Vi kan faktorisere mange rare uttrykk, og nå skal vi faktorisere det helt spesielle uttrykket ax^2+bx+c.

Da trengs de såkalte *kvadratsetningene*. Det er ganske vanlig å bruke symbolene a og b her også, så vi velger å gjøre det (de trenger absolutt ikke å ha noe å gjøre med a og b i uttrykket ax^2+bx+c; de er bare symboler, uansett hvor de dukker opp):

- 1. kvadratsetning: $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2$
- 2. kvadratsetning: $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2-2ab+b^2$
- 3. kvadratsetning (konjugatsetningen): $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

Disse kan sjekkes ved å regne ut parentesene. Du kan utlede dem hver gang du får bruk for dem, men kvadratsetningene er et supergodt eksempel på noe som sparer deg for mye arbeid hvis du husker dem (og ikke minst gjenkjenner uttrykkene på høyresidene når de dukker opp!).

Eksempel 2.3 Ved å bruke 2. kvadratsetning får vi

$$(x-3)^2 = x^2-6x+9.$$

Leddet $6x$ i midten på høyresiden er 'det doble produktet av x og 3'. ■

Eksempel 2.4 Vi har

$$(2x+1)^2 = 4x^2+4x+1$$

ved 1. kvadratsetning. Dette kan også skrives som $4(x^2+x+\frac{1}{4}) = 4(x+\frac{1}{2})^2 = (2(x+\frac{1}{2}))^2$. Her er det mange muligheter, alt etter hva vi skal bruke uttrykket til.

Vi har altså at

$$4x^2+4x+1 = 4(x+\tfrac{1}{2})(x+\tfrac{1}{2}).$$

Når et uttrykk ax^2+bx+c faktoriseres i to lineære faktorer, setter vi ofte faktoren a (tallet 4 her) utenfor de lineære faktorene. ■

Eksempel 2.5 Det er veldig nyttig å se at du kan bruke 3. kvadratsetning for å faktorisere et uttrykk som $2r^2s^4 - 8t^2u^2$:

$$\begin{aligned} 2r^2s^4 - 8t^2u^2 &= 2(r^2s^4 - 4t^2u^2) \\ &= 2(rs^2 - 2tu)(rs^2 + 2tu). \end{aligned}$$

Gjør mange oppgaver med dette, så blir du gjenkjenningsekspert. Hvis du er ekspert allerede, er det lurt å regne igjennom oppgavene allikevel, siden kunnskap må holdes ved like. ∎

Det viser seg at kvadratsetningene kan brukes til å finne faktoriseringen av alle andregradsuttrykk $ax^2 + bx + c$, så la oss forklare hvordan:

Som vi så i Eksempel 2.4, vil ikke a-en være noe problem, og vi faktoriserer gjerne ut a, og jobber med uttrykket $x^2 + (b/a)x + (c/a)$.

De 'pene' uttrykkene $x^2 + (b/a)x + (c/a)$ der vi kan bruke 1. og 2. kvadratsetning 'direkte' kalles *fullstendige kvadrater*. For eksempel er $x^2 - 4x + 4$ et fullstendig kvadrat, lik $(x - 2)^2$.

For å faktorisere uttrykkene $x + (b/a)x + (c/a)$ som ikke er fullstendige kvadrater, må vi prøve å *fullføre kvadratet*. Vi viser metoden på et eksempel:

Eksempel 2.6 (Superviktig!) Vi vil faktorisere

$$x^2 - 8x + 7.$$

Dette er ikke et fullstendig kvadrat: Siden de to første leddene er $x^2 - 8x = x^2 - 2 \cdot 4x$, gir 2. kvadratsetning at det tredje leddet må være $4^2 = 16$, for at vi skal ha et fullstendig kvadrat (les gjerne denne setningen en gang til). Det betyr at 7-tallet skulle ha vært 16. Men det kan vi kanskje ordne? Vi tar nå i bruk algebra etter alle kunstens regler og gjør følgende:

$$\begin{aligned} & x^2 - 8x + 7 & \\ = \;& x^2 - 8x + 16 - 16 + 7 & \text{vi legger til } 16 - 16 = 0\text{, som er lov} \\ = \;& x^2 - 8x + 16 - 9 & \text{de tre første leddene er et fullstendig kvadrat} \\ = \;& (x-4)^2 - 9 & \text{2. kvadratsetning} \\ = \;& (x-4)^2 - 3^2 & \text{litt heldige med 9-tallet siden } 9 = 3^2 \\ = \;& (x - 4 - 3)(x - 4 + 3) & \text{3. kvadratsetning!} \\ = \;& (x-7)(x-1), & \end{aligned}$$

som gir oss faktoriseringen

$$x^2 - 8x + 7 = (x - 7)(x - 1).$$

■

Grunnen til at vi kunne bruke 3. kvadratsetning i Eksempel 2.6 er at det står minustegn foran 9-tallet. Ikke alle uttrykk vil gi et minustegn (eller et 9-tall for den saks skyld) på denne plassen: Hvis vi får et plusstegn her, betyr det at uttrykket ikke kan faktoriseres.

Og: noen uttrykk vil altså ikke gi så pent tall som 9 i utregningen -da må vi bruke kvadratroten av det tallet vi får (så lenge vi har fått minustegn foran).

Ved hjelp av denne metoden blir du bedt om å utlede *abc*-formelen i en av oppgavene, så la oss nå gå tilbake til den:

2.3 *abc*-formelen

Løsningene til andregradslikningen $ax^2 + bx + c = 0$ der a, b og $c \in \mathbb{R}$ og $a \neq 0$ er gitt ved

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Uttrykket $b^2 - 4ac$ kalles *diskriminanten* til andregradslikningen. Antall løsninger er avhengig av om dette tallet er lik 0, er positivt eller er negativt (fortegn er en viktig egenskap ved et tall!):

- $b^2 - 4ac = 0$: Én løsning. Denne finner vi ved å gjenkjenne et fullstendig kvadrat, eventuelt bruke *abc*-formelen.
- $b^2 - 4ac > 0$: To løsninger. Disse finner vi ved å bruke *abc*-formelen, eventuelt fullføre kvadratet (det siste er tidkrevende, men veldig tilfredsstillende med hensyn på algebrakunnskaper og forståelse).

- $b^2 - 4ac < 0$: Ingen løsning. *abc*-formelen gir at vi skal ta kvadratroten av et negativt tall, noe vi ikke kan. Forsøk på å fullføre kvadratet fører ikke frem, siden vi vil få et plusstegn der vi trenger et minustegn for å bruke konjugatsetningen.

Eksempel 2.7 Likningen

$$2x^2 - 4x + \tfrac{3}{2} = 0$$

har løsninger

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{4} = \frac{4 \pm 2}{4} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Vi ser at dette stemmer med at diskriminanten til likningen er positiv. ■

Eksempel 2.8 Likningen $2x^2 + 7x + 7 = 0$ har ingen løsning siden diskriminanten er $7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 49 - 56 = -7 < 0$. ■

Eksempel 2.9 Likningen $x^2 + 9 = -6x$ har én løsning, siden vi har et fullstendig kvadrat: Opprydning gir likningen

$$x^2 + 6x + 9 = 0,$$

som gir

$$(x+3)^2 = 0,$$

dvs. $x = -3$ er eneste løsning. ■

Eksempel 2.10 La oss bruke andregradsuttrykket fra Eksempel 2.6 og løse likningen

$$x^2 - 8x + 7 = 0.$$

Formelen gir løsningene

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} = \begin{cases} 7 \\ 1. \end{cases}$$

Dette stemmer jo utmerket med faktoriseringen som vi fant i Eksempel 2.6:

$$x^2 - 8x + 7 = (x-1)(x-7).$$

For at dette uttrykket skal være 0, må minst en av faktorene $x - 1$ og $x - 7$ være 0, dvs. $x = 1$ eller $x = 7$. ■

Eksempel 2.10 leder oss til følgende sammenheng mellom løsningene av en andregradslikning $ax^2+bx+c=0$ og faktoriseringen av uttrykket ax^2+bx+c (vi gjentar nesten punktene ovenfor):

Hvis likningen $ax^2+bx+c=0$ har

- én løsning, kall den r, har vi faktoriseringen

$$ax^2+bx+c=a(x-r)(x-r).$$

- to løsninger, kall dem r_1 og r_2, har vi faktoriseringen

$$ax^2+bx+c=a(x-r_1)(x-r_2).$$

- ingen løsning, kan vi ikke faktorisere ax^2+bx+c i linære faktorer.

2.4 Uoppstilte andregradslikninger

Ordet 'uoppstilt' kan i vid betydning tenkes på som 'anvendelse'. Vi lurer nå på hva slags problemer som gir opphav til andregradslikninger.

Eksempel 2.11 Arealberegninger vil involvere produkter -benevningen på areal er jo 'kvadrat-et-eller-annet', og vil således gi typiske eksempler på problemer der vi må løse en andregradslikning.

Arealet av et kvadrat er 36 m^2. Finn lengden av sidene i kvadratet.

Vi kan i dette tilfellet finne svaret 6 uten for mye strev, men la oss kalle lengden på sidene i kvadratet for x. Ved å bruke formelen for arealet av et kvadrat med sidelengde x kan vi fra teksten sette opp likningen

$$x^2=36,$$

som har løsninger ± 6. Siden vi skal ha tak i en lengde, er det 6 som er svaret vi søker.

Et problem har gjerne bare én løsning, og i dette tilfellet gir matematikken oss flere løsninger. I tillegg til å sette opp og løse likningen, må vi dermed resonnere i forhold til problemet vi løser. ■

Eksempel 2.12 Å komme seg fra tekst til matematikk kan være vanskelig. I dette eksempelet skal vi bare sette opp likningen (som du skal løse i en av oppgavene):

Kvadratet av Elins alder er lik 18 ganger alderen hennes lagt til alderen til hennes bestemor Agda. Bestemor Agda er 63 år. Hvor gammel er Elin?

Vi lar x være alderen til Elin (den ukjente størrelsen i problemet), og setter inn matematiske symboler istedenfor tekst:

$$\overbrace{\text{Kvadratet av Elins alder}}^{x^2}\ \overbrace{\text{er lik}}^{=}\ \overbrace{\text{18}}^{18}\ \overbrace{\text{ganger}}^{\cdot}\ \overbrace{\text{alderen hennes}}^{x}$$
$$\overbrace{\text{lagt til}}^{+}\ \overbrace{\text{alderen til hennes bestemor Agda.}}^{63}$$

Det gir likningen

$$x^2 = 18x + 63,$$

som er en andregradslikning (i dette oppkonstruerte eksempelet er 'kvadratet' med i oppgaveteksten -det vil gi et andregradsledd). ■

Så langt har vi sett at problemer som gir opphav til lineære likninger og andregradslikninger i mange tilfeller kan virke oppkonstruerte. Det betyr ikke at disse likningene ikke er anvendelige eller nyttige! De dukker blant annet ofte opp i mellomutregninger i større problemer, og en del problemer er nyttige i seg selv, for eksempel i trekantberegninger, som vi snart skal komme til.

2.5 Rasjonale likninger, del 2

En del rasjonale likninger vil gi opphav til andregradslikninger.

Løsningsmetode: Anta at x er slik at nevnerne er forskjellig fra 0, og multipliser likningen med fellesnevner. Deretter rydd opp og løs den likningen du får.

Eksempel 2.13 Likningen

$$\frac{x}{x-1} + \frac{x+2}{x} = \frac{2}{x^2 - x}$$

er en rasjonal likning som vil gi opphav til en andregradslikning. I dette eksempelet har vi brøker med lineære ledd i x i både teller og nevner på venstresiden, og brøk med konstantledd i teller og andregradsledd i x i nevner på høyresiden. (Tenk litt på hvorfor dette gir en andregradslikning etter litt opprydding før du ser på utregningen nedenfor. Sammenlign med Eksempel 1.11, der vi fikk en *lineær* likning fra den rasjonale likningen.)

Vi løser likningen:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-1} + \frac{x+2}{x} &= \frac{2}{x^2-x} && \text{(antar } x \neq 0, x \neq 1\text{)} \\ & && \text{(multipliserer med } x^2 - x = x(x-1) \\ x^2 + (x-1)(x+2) &= 2 && \text{og forkorter)} \\ x^2 + x^2 - x + 2x - 2 &= 2 \\ 2x^2 + x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Vi løser så andregradslikningen:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+32}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}.$$

Som vanlig for likninger, er det mulig å sette prøve på svaret (selv når vi bruker kalkulator), og hvis du vil gjøre det i dette eksempelet, må du gjerne det. Dette kan imidlertid være et tilfelle der vi lar det stå til og satser på at vi har regnet riktig, og unngår rotutregningene vi får her. De kan bli litt rotete -bokstavlig talt. Sjekk heller selve utregningene en gang til. (Dette betyr for øvrig ikke at vi ikke skal trene på utregninger med rotuttrykk!) ■

Apropos (kvadrat)rot: vi tar med en annen type likninger som også kan gi opphav til andregradslikninger:

2.6 Irrasjonale likninger

Irrasjonale likninger involverer ledd med irrasjonale uttrykk i x, typisk 'roten av et uttrykk i x'. Husk at kvadratroten (generelt partallsroten) av et uttrykk kun gir mening når uttrykket er større enn eller lik 0.

Løsningsmetode: Få alle rotuttrykk alene på venstreside, kvadrér uttrykkene på begge sider, eventuelt opphøy uttrykkene i en passende potens, (du må kanskje gjøre dette flere ganger) for å bli kvitt rottegn(ene). Deretter rydd og løs likningen du sitter igjen med.

NB! Dette er en løsningsmetode som ikke har samme gyldighet som de andre metodene vi har sett til nå: Rottegnet er kun et symbol, og vi har både en positiv og en negativ rot av et tall, dvs. likningen $x^2 = a$ har løsninger $\pm\sqrt{a}$ når $a > 0$. Når vi skriver $\sqrt{a}$ mener vi den positive roten. Det gjør at når vi kvadrere kan det snike seg inn ekstra/falske løsninger. Ved å kvadrere kan vi nemlig gå fra noe som er usant til noe som er sant: For eksempel, la oss starte med

$$2 = -2,$$

noe som ikke er sant. Hvis vi kvadrerer på begge sider, får vi imidlertid

$$4 = 4,$$

som er sant. Konklusjon: **Sett prøve** på svaret for irrasjonale likninger, siden noen løsninger kan være falske.

Eksempel 2.14

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} &= 12 - x && \text{(kvadrerer)} \\
(\sqrt{x})^2 &= (12 - x)^2 \\
x &= 144 - 24x + x^2 \\
x^2 + 25x + 144 &= 0
\end{aligned}$$

Vi får:

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \begin{cases} 16 \\ 9, \end{cases}$$

som gir to løsninger. Vi setter prøve: $x = 16$ gir

$$\sqrt{16} = -4,$$

noe som ikke stemmer, siden symbolet $\sqrt{16}$ betyr den positive roten av 16, dvs. 4, og $4 \neq -4$, så 16 er ingen løsning. Setter vi inn $x = 9$ derimot, får vi at $3 = 3$, så den eneste løsningen er $x = 9$. ■

Et litt større eksempel:

Eksempel 2.15

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x}-\sqrt{x+33} &= -3 & \\
(\sqrt{x}-\sqrt{x+33})^2 &= (-3)^2 & \text{(kvadrerer)}\\
x-2\sqrt{x}\sqrt{x+33}+(x+33) &= 9 & \text{(2. kvadratsetning)}\\
-2\sqrt{x}\sqrt{x+33} &= -2x-24 & \text{(får rotuttrykk alene)}\\
\sqrt{x}\sqrt{x+33} &= x+12 & \text{(rydder)}\\
\sqrt{x(x+33)} &= x+12 & \text{(bruker } \sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}\text{)}\\
(\sqrt{x}\sqrt{x+33})^2 &= (x+12)^2 & \text{(kvadrerer)}\\
x(x+33) &= 144+24x+x^2 & \text{(1. kvadratsetning)}\\
9x &= 144 & \\
x &= 16, &
\end{aligned}
$$

noe som stemmer når vi setter inn i den irrasjonale likningen. ■

2.7 Polynomdivisjon

Vi kan også treffe på uttrykk av større grad enn 2 som vi trenger å faktorisere. En nyttig teknikk å kunne når du for eksempel skal faktorisere et tredjegradsuttrykk er såkalt *polynomdivisjon*. Vi avslutter dette kapittelet med et eksempel på denne teknikken.

Eksempel 2.16 Vi ønsker å dividere uttrykket (polynomet)

$$x^3-6x^2+11x-6$$

på uttrykket (polynomet) $x-1$. Nå kan det være nyttig å ha tankegangen fra talldivisjon i bakhodet (regn et eksempel for deg selv først, for eksempel $121 : 11$, ikke i hodet, men på papir).

Vi setter i gang med polynomdivisjonen:

$$x^3-6x^2+11x-6 \ : \ x-1 = \ ?$$

Vi starter med å spørre 'hva må vi gange x med for å få x^3 (siden vi skal dele noe som starter med x^3 på noe som starter med x)'? Det gir foreløpig

$$x^3-6x^2+11x-6 : x-1 \ = \ x^2 \ \cdots .$$

Vi regner så ut $x^2(x-1)$ og trekker dette fra dividenduttrykket vi startet med, for å se hvor mye som er igjen av uttrykket så langt:

$$
\begin{array}{rl}
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & : \; x-1 \; = \; x^2 \; \cdots \\
-(x^3 - x^2) & \\
\hline
-5x^2 + 11x - 6 &
\end{array}
$$

Vi har nå redusert divisjonen til

$$-5x^2 + 11x - 6 \; : \; x - 1,$$

og stiller igjen spørsmålet 'hva må vi gange x med for å få $-5x^2$ (siden vi skal dele noe som starter med $-5x^2$ på noe som starter med x)?' Det gir:

$$
\begin{array}{rl}
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & : \; x-1 \; = \; x^2 - 5x \; \cdots \\
-(x^3 - x^2) & \\
\hline
-5x^2 + 11x - 6 &
\end{array}
$$

Vi regner så ut $-5x(x-1)$ og trekker dette fra uttrykket $-5x^2+11x-6$, for å se hvor mye som er igjen, og slik fortsetter vi. Det gir:

$$
\begin{array}{rl}
x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & : \; x-1 \; = \; x^2 - 5x + 6 \\
-(x^3 - x^2) & \\
\hline
-5x^2 + 11x - 6 & \\
-(-5x^2 + 5x) & \\
\hline
6x - 6 & \\
-(6x - 6) & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

I dette eksempelet får vi 0 som rest, som vil si at divisjonen går opp, og vi får faktoriseringen

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6).$$

Vi kan videre faktorisere andregradsuttrykket $x^2 - 5x + 6$ ved å løse likningen $x^2 - 5x + 6 = 0$. Det gir

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2, \end{cases}$$

som gir faktoriseringen

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 3)(x - 2).$$

■

Vi noterer oss at et generelt tredjegradpolynom ikke alltid vil la seg faktorisere i lineære faktorer.

For å vite om et gitt tredjegradspolynom i x vil la seg faktorisere, må du prøve å finne et tall r som gir 0 når du setter det inn for x i polynomet. Da vil polynomdivisjon med faktoren $x - r$ gå opp. Det er imidlertid ikke alltid så lett å finne en slik r, og du vil ofte få oppgitt en opplysning, som for eksempel en faktor som går opp i polynomet, slik at du kan gå i gang med polynomdivisjon.

Kapittel 3

Onsdag

3.1 Ulikheter

Likninger handler om sammenhenger mellom størrelser, der vi matematisk gjør bruk av tegnet $=$. *Ulikheter* handler om å *sammenligne* størrelser, og vi har fire *ulikhetstegn*:

- $>$, 'større enn'.
- $\geq$, 'større enn eller lik'.
- $<$, 'mindre enn'.
- $\leq$, 'mindre enn eller lik'.

I ulikheter utnytter vi *ordnings*egenskapen til de reelle tallene: vi kan si om et tall er større enn, mindre enn eller lik et annet tall.

Når vi sammenligner et tall a med tallet 0, får vi:

- $a > 0$ betyr at a er *strengt positivt* (kan ikke være 0)
- $a \geq 0$ betyr at a er *positivt* (kan være 0)
- $a < 0$ betyr at a er *strengt negativt* (kan ikke være 0)
- $a \leq 0$ betyr at a er *negativt* (kan være 0)

Tallet 0 er spesielt, og er både positivt og negativt.

Vi kan altså bruke ordet 'strengt' hvis vi ønsker å understreke at et tall ikke er 0. Tilsvarende har vi ordet 'ekte' til bruk når vi vil understreke at to tall ikke er like. For eksempel leses $a > b$ 'a ekte større enn b', mens $a \geq b$ leses 'a større enn eller lik b'. I det siste tilfellet kan tallene a og b være like.

Tilsvarende som for likninger, vil ulike problemer kunne gi opphav til lineære ulikheter, andregradsuliketer, irrasjonale ulikheter, osv.

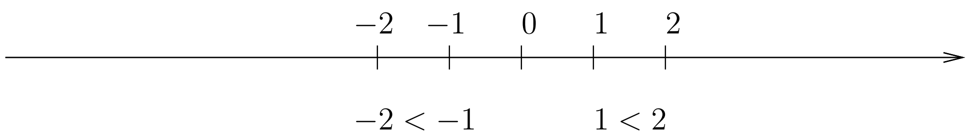
3.1.1 Lineære ulikheter

Eksempel 3.1 Ulikheten

$$x + 5(7 - x) \geq x - 12$$

er lineær, siden vi har lineære ledd på begge sider av ulikhetstegnet. ■

Løsningsmetode: Metoden er *nesten* den samme som for lineære likninger, MEN med en stor forskjell: Vi sammenligner nå størrelser, og vi vet at de største tallene ligger lengst til høyre på tallinjen. Det betyr for eksempel at mens $1 < 2$, så er $-1 > -2$:



Det er de grunnleggende egenskapene ved de reelle tallene som ligger til grunn for følgende regneregler:

La $\boxed{a > b}$ (reglene vi skal skrive opp nå er helt tilsvarende for de andre tre ulikhetstegnene). Les reglene høyt for deg selv:

- For $c \in \mathbb{R}$ er $a + c > b + c$ og $a - c > b - c$.
- For $c > 0$ er $ac > bc$ og $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
- For $\boxed{c < 0 \text{ er } ac < bc \text{ og } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}}$ (ulikheten snus!).

Dessuten har vi at (tegn tallinje og se!)

- hvis $a > b$ og $b > c$, så er $a > c$;
- hvis $a > b$ og $c > d$, så er $a + c > b + d$.

Eksempel 3.2 La oss løse ulikheten

$$x + 5(7 - x) \geq x - 12.$$

Da får vi

$$\begin{aligned} x + 5(7 - x) &\geq x - 12 \\ -5x &\geq -47 \\ x &\leq \tfrac{47}{5}. \end{aligned}$$

■

Når vi løser en ulikhet i x, skal vi altså finne de tallene x som oppfyller ulikheten. Løsningene vil gjerne utgjøre et *intervall* blant de relle tallene, dvs. vi får uendelig mange løsninger. Vi bruker ofte parentesnotasjon for et intervall: Hvis $a < b$ består intervallet $[a, b)$ av tallene som ligger mellom a og b, og der *endepunktet* a er med i intervallet, mens b ikke er det.

I Eksempel 3.2 fikk vi løsningene $x \leq \frac{47}{5}$. Det er uendelig mange tall som er mindre enn $\frac{47}{5}$. Vi kan også oppgi løsningene som

$$x \in (\leftarrow, \tfrac{47}{5}],$$

eller gjøre bruk av symbolet for 'uendelig':

$$x \in (-\infty, \tfrac{47}{5}].$$

Du kan velge blant disse tre skrivemåtene.

3.2 Uoppstilte ulikheter

Det fins mange eksempler på problemer der vi ender opp med å løse en ulikhet. Og husk: selv om ulikheter har uendelig mange løsninger, har et problem som oftest kun én løsning.

Vi tar et høyaktuelt eksempel:

Eksempel 3.3 En "Studentbillett" (rabattert 30-dagersbillett) i sone 1 hos transportselskapet Ruter i Oslo koster kr. 414. En enkeltbillett i sone 1 koster kr. 32. Hvor mange ganger i løpet av en 30-dagersperiode må du reise kollektivt for at Studentbilletten skal lønne seg?

Vi må identifisere en variabel. I dette tilfellet lar vi x være antall turer du gjør i en 30-dagersperiode. Ved å kjøpe enkeltbilletter (ofte ved bruk av et reisepengekort) vil du bruke kr. $\underline{32x}$ i perioden, mens med Studentbillett vil du bruke kr. $\underline{414}$. Disse to størrelsene må vi sammenligne: Vi er interessert i den minste x-en som gjør at $32x$ er (ekte) større enn 414, for da lønner Studentbillett seg. Det gir ulikheten

$$32x > 414.$$

Siden $\frac{414}{32} \approx 12{,}9$, er svaret 13 turer. Vi får én løsning, selv om selve ulikheten gir uendelig mange løsninger. ■

3.3 Fortegnsskjema

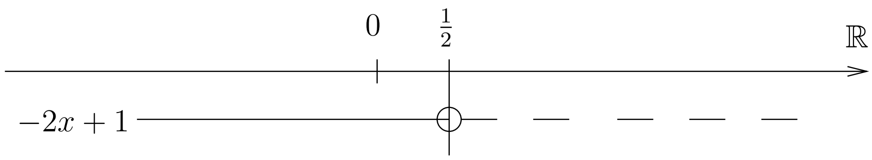
Hvis vi har et uttrykk i x hender det ofte at vi skal bruke det til noe. Da må vi stille oss ulike spørsmål, slik som: For hvilke verdier av x er uttrykket positivt? lik 0? negativt? For eksempel hvis vi har et uttrykk for temperatursvingninger: når er temperaturen positiv? lik 0? negativ? Når vi svarer på denne typen spørsmål sier vi at vi *drøfter* fortegnet til uttrykket.

La oss starte med de enkleste uttrykkene: de lineære.

Eksempel 3.4 Når er det lineære uttrykket $-2x + 1$ positivt? lik 0? negativt? Ved å løse den lineære likning $-2x + 1 = 0$ finner vi at uttrykket er 0 når $x = \frac{1}{2}$. Ved å løse ulikheten $-2x + 1 > 0$, ser vi at uttrykket er (strengt) positivt for $x < \frac{1}{2}$, og ved å snu ulikheten, ser vi at det er negativt for $x > \frac{1}{2}$. ■

Vi kan tegne opp fortegnsskiftet for et lineært uttrykk i x med en såkalt *fortegnslinje*. Vi tegner først opp tallinja, der x kan variere. Deretter tegner vi en 'ny' tallinje under, der vi markerer hvordan fortegnet til uttrykket varierer med x: For de x-verdiene der uttrykket er (strengt) positivt, lar vi linja være sammenhengende, mens for de verdiene der uttrykket er (strengt) negativt stipler vi linja. Vi tegner inn en 0 (gjerne en ring) på linja der uttrykket er lik 0.

Eksempel 3.5 Uttrykket $-2x+1$ i Eksempel 3.4 gir fortegnslinja



■

Et generelt lineært uttrykk i x er på formen $ax+b$ der $a, b \in \mathbb{R}$. Dette uttrykket er lik 0 når $x = -\frac{b}{a}$. Videre har vi (sjekk og tegn!):

- Hvis $a > 0$, skifter uttrykket $ax+b$ fortegn fra $-$ til $+$ når $x = -\frac{b}{a}$.
- Hvis $a < 0$, skifter uttrykket $ax+b$ fortegn fra $+$ til $-$ når $x = -\frac{b}{a}$.

Hvordan varierer så fortegnet til et andregradsuttrykk? Når er uttrykket ax^2+bx+c positivt? lik 0? negativt?

Nå er det en stor fordel å kunne faktorisere! Vi faktoriserer andregradsuttrykket i lineære faktorer (hvis mulig), og fortegnsdrøfter hver lineær faktor. Deretter ser vi på fortegnet til produktet, og bruker at produktet av et positivt tall og et negativt tall er negativt, mens produktet av to positive tall er positivt, og produktet av to negative tall er positivt (egenskaper ved de reelle tallene igjen). Det gir 'multiplikasjonstabellen':

$$\begin{array}{c||c|c} & + & - \\ \hline\hline + & + & - \\ \hline - & - & + \end{array} \tag{3.1}$$

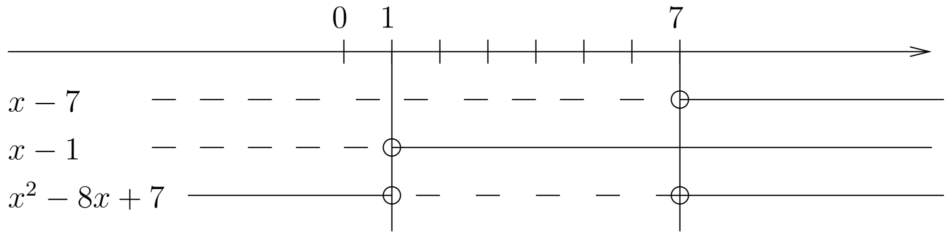
Eksempel 3.6 Når er uttrykket x^2-8x+7 positivt? lik 0? negativt? Vi faktoriserer uttrykket (som vi har gjort i Eksempel 2.6):

$$x^2-8x+7 = (x-7)(x-1)$$

Faktoren $x-7$ er lik 0 for $x=7$, positiv for $x>7$ og negativ for $x<7$. Faktoren $x-1$ er lik 0 for $x=1$, positiv for $x>1$ og negativ for $x<1$. (Hvis for eksempel $x=2$, er $x-7$ negativ, mens $x-1$ er positiv, dermed er produktet x^2-8x+7 negativt for $x=2$.) Hvis vi slår sammen fortegnene på faktorene, får vi at x^2-8x+7 er lik 0 for $x=1$ og $x=7$, positivt for $x<1$ og $x>7$ og negativt for $1<x<7$. ■

Vi kan tegne opp fortegnsskiftet for andregradsuttrykk i et fortegn*skjema*: For hver lineær faktor tegner vi fortegnslinja til faktoren, og til slutt lager vi en fortegnslinje for uttrykket, ved å følge multiplikasjonstabellen (3.1).

Eksempel 3.7 Fortegnsskjemaet for uttrykket x^2-8x+7 i Eksempel 3.6 er



■

For et generelt andregradsuttrykk ax^2+bx+c, $a \neq 0$, har vi tre tilfeller, alt etter hvor mange løsninger likningen $ax^2 + bx + c = 0$ har:

- To løsninger r_1 og r_2, $r_1 \neq r_2$: Uttrykket skifter fortegn to ganger, for $x = r_1$ og $x = r_2$.
- Én løsning r: Uttrykket er et fullstendig kvadrat $a(x-r)^2$, og er lik 0 for $x = r$, og ellers enten strengt positivt (hvis a er positiv) eller strengt negativt (hvis a er negativ).
- Ingen løsning, dvs. uttrykket kan ikke faktoriseres og er alltid strengt positivt (hvis a er positiv) eller strengt negativt (hvis a er negativ).

Vi kan tegne fortegnsskjema for større uttrykk også: Vi finner de lineære faktorene (hvis mulig), og slår sammen fortegnene i faktorene ved å bruke multiplikasjonstabellen (3.1) for fortegn. Når vi får mange fortegn, bruker vi assosiativitet $a(bc) = (ab)c$, og får:

- Et produkt der vi har et odde antall negative faktorer gir $-$.
- Et produkt der vi har et like antall negative faktorer gir $+$.

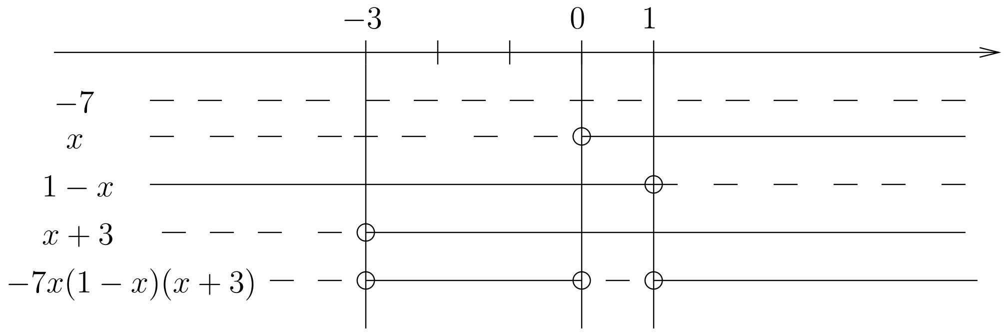
3.3.1 Flere typer ulikheter

Ved å bruke fortegnsskjema kan vi nå blant annet løse ulikheter av høyere grad (så lenge vi kan faktorisere) og rasjonale ulikheter. Vi tar et eksempel på hver av disse:

Eksempel 3.8 Vi vil løse ulikheten

$$-7x(1-x)(x+3) > 0.$$

Siden faktoriseringen er servert, kan vi sette opp følgende skjema:



Da ser vi at uttrykket er ekte større enn 0 for $x \in (-3, 0)$ og for $x \in (1, \infty)$. (Endepunktene -3, 0 og 1 i intervallene er ikke med siden ulikheten er streng.) ■

Viktig! For å løse en ulikhet er vi avhengige av å se på fortegn, dvs. vi må sammenligne uttrykket i x med 0. Det betyr at hvis det ikke står 0 på høyresiden i en ulikhet, må vi sørge for å få 0 alene på høyresiden før vi starter drøftingen. Da må vi rydde opp ved hjelp av regnereglene vi har lært:

Eksempel 3.9 Vi vil løse den rasjonale ulikheten

$$\frac{5x-2}{(2-x)(x-1)} \leq 1. \tag{3.2}$$

Vi flytter over 1:

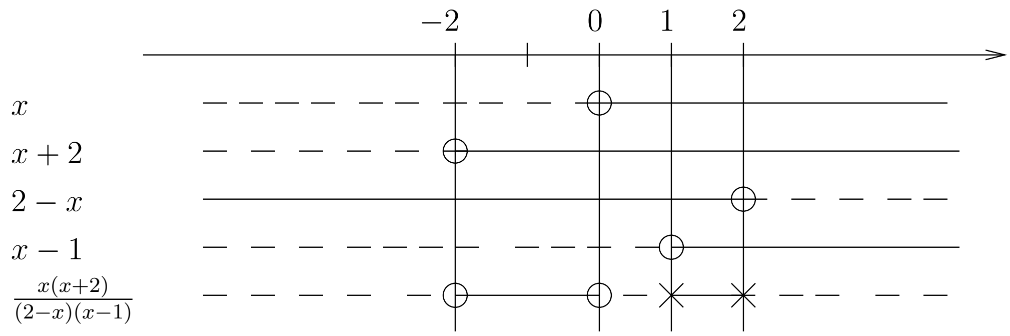
$$\frac{5x-2}{(2-x)(x-1)} - 1 \leq 0$$

og setter på felles nevner. Det gir $(5x-2)-(2-x)(x-1)$ i telleren, som etter opprydding gir ulikheten (sjekk!)

$$\frac{x(x+2)}{(2-x)(x-1)} \leq 0.$$

Rasjonale ulikheter løser vi ved å drøfte faktorene hver for seg og slå dem sammen som før. Fortegnene vil følge samme multiplikasjonstabell som for produkter selv om faktorene nå er dividender og/eller divisorer. Den eneste forskjellen er at nevneren ikke kan være 0. Det markerer vi gjerne i skjemaet med et kryss for de x-ene som gjør at nevneren er 0.

Vi får følgende fortegnsskjema:



Løsningene til ulikheten (3.2) er dermed $x \in (-\infty, -2]$ eller $x \in [0, 1)$ eller $x \in (2, \infty)$. (Siden ulikheten ikke er streng, er endepunktene -2 og 0 med. Setter vi for eksempel inn $x = 0$ i ulikheten, får vi $\frac{-2}{-2} \leq 1$, som stemmer. Endepunktene 1 og 2 er ikke med siden de gir 0 i nevneren på uttrykket.)
■

3.4 Absoluttverdi

Et tall består av et fortegn og en tallverdi, kalt *absoluttverdi*. Fortegnet til et tall sier oss om tallet er positivt eller negativt. Tallet $-3{,}2$ har fortegn $-$ og absoluttverdi $3{,}2$. Når vi finner absoluttverdien til et tall, 'fjerner vi fortegnet', dvs. absoluttverdien til et tall er alltid positivt.

Absoluttverdien til tallet a skrives $|a|$, og defineres som

$$|a| = \begin{cases} a & \text{hvis } a \geq 0 \\ -a & \text{hvis } a < 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Dette er et nyttig begrep, for eksempel når vi skal beregne avstand. Absoluttverdien til et tall kan vi tenke på som *avstanden fra tallet til tallet 0*. For eksempel er $|-4| = 4$, og -4 har avstand 4 fra 0 på tallinja.

Absoluttverdien til differansen mellom to tall er lik avstanden mellom tallene. For eksempel er avstanden mellom -3 og 2 lik $|-3-2| = |-5| = 5$.

Vi merker oss at

$$|a||a| = |a|^2 = a^2,$$

og at for eksempel intervallet

$$-1 < a < 1$$

kan skrives som

$$|a| < 1$$

(siden intervallet er symmetrisk om 0).

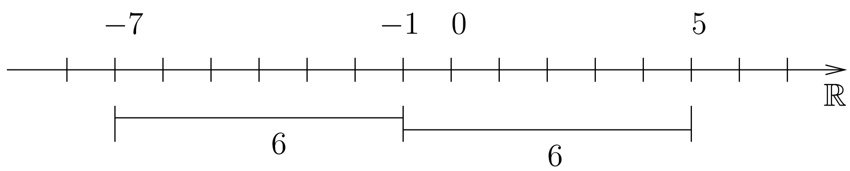
Vi kan også se på absoluttverdien til ulike uttrykk, og da gjerne i forbindelse med likninger. Legg merke til at siden absoluttverdien til et tall alltid er positivt, vil likninger slik som $|x - 4| = -7$ ikke gi mening, dvs. likningen har ingen løsning.

For å løse likninger med absoluttverdi, må vi kvitte oss med absoluttverditegnet. Det kan gjøres ved å bruke (3.3), der vi 'splitter' opp likningen i ulike tilfeller, alt etter hva fortegnet på de ulike faktorene som inngår kan være.

Eksempel 3.10 Likningen

$$|x + 1| = 6$$

sier at når vi har x og legger til 1 skal vi få et tall som har avstand 6 til origo. For å løse likningen skal vi dermed finne de tallene x slik at avstanden mellom x og -1 er lik 6:



Fra tegningen ser vi at løsningene er $x = -7$ eller $x = 5$.

For å finne disse løsningene algebraisk, dvs. ved utregning, må vi kvitte oss med absoluttverditegnet. Det gjør vi ved å bruke (3.3):

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{hvis } x + 1 \geq 0 \\ -(x + 1) & \text{hvis } x + 1 < 0 \end{cases}$$

Vi splitter dermed opp likningen og får to likninger (siden uttrykket $x + 1$ kan være både positivt og negativt, og absoluttverdien av $x + 1$ skal være positiv):

$$x + 1 = 6 \quad (\text{for } x + 1 \geq 0)$$

eller

$$-(x+1) = 6 \quad (\text{for } x+1 < 0).$$

Det gir løsningene $x = 5$ eller $x = -7$, noe som stemmer med det vi fant ovenfor. ■

Eksempel 3.11 Vi vil løse likningen

$$|x+1| = |x-1|. \tag{3.4}$$

Hvilke tall er slik at avstanden mellom tallet og -1 er lik avstanden mellom tallet og 1? Hvis vi tenker litt på det, ser vi at 0 er en mulig løsning (lurt å tegne en tallinje). Fins det andre tall som oppfyller likningen?

Siden vi har to faktorer som kan være både positive og negative, kan vi splitte opp likningen i 4 likninger:

a) $x + 1 = x - 1$

b) $x + 1 = -(x - 1)$

c) $-(x + 1) = x - 1$

d) $-(x + 1) = -(x - 1)$

Hverken likning **a)** eller **d)** har noen løsning, mens likningene **b)** og **c)** kun har løsningen $x = 0$. Null er dermed det eneste tallet som oppfyller likningen (3.4). ■

Vi kan ha andregradslikninger med absoluttverdi også. La oss minne om hvordan slike likninger løses:

Eksempel 3.12 Vi vil løse likningen

$$|x^2 - 8x + 7| = 9. \tag{3.5}$$

Vi blir kvitt absoluttverditegnet ved å splitte opp likningen og ta vare på de ulike fortegnene. Likningen i dette eksempelet kan splittes opp i likningene

$$x^2 - 8x + 7 = 9 \quad \text{eller} \quad -(x^2 - 8x + 7) = 9,$$

som gir to andregradslikninger. Det betyr at vi kan få høyst fire løsninger (to fra hver av likningene). Den første likningen gir

$$x^2 - 8x - 2 = 0$$

med løsninger

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64+8}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{72}}{2} = \frac{8 \pm 6\sqrt{2}}{2} = 4 \pm 3\sqrt{2}.$$

Den andre likningen gir

$$x^2 - 8x + 16 = 0,$$

og vi gjenkjenner venstresiden som $(x-4)^2$ (eventuelt bruk *abc*-formelen), dvs. at denne likningen har én løsning, $x = 4$.

Løsningene til likningen (3.5) (som er de tallene x slik at andregradsuttrykket $x^2 - 8x + 7$ er et tall med absoluttverdi lik 9), er $x = 4 \pm 3\sqrt{2}$ eller $x = 4$, dvs. vi får tre løsninger. ■

3.5 Lineære likninger i to variabler

Vi fortsetter å løse likninger, og går ett skritt videre: i tillegg til x innfører vi nå en variabel størrelse til, som vi ofte kaller y.

La oss si at vi vet at Elin og Agda til sammen er 84 år. Én opplysning vil gi oss én likning. Vi lar x være Elins alder (målt i år) og y være Agdas alder (målt i år). Opplysningen gir dermed likningen

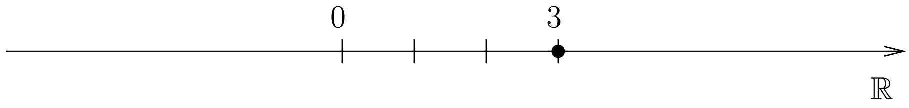
$$x + y = 84.$$

Dette er et eksempel på en lineær likning i x og y. En generell lineær likning i x og y er på formen $ax + by = c$ der a, b og $c \in \mathbb{R}$. Hvordan løser vi slike likninger?

En mulig løsning på likningen $x+y = 84$ er $x = 1$ og $y = 83$. Men hva med $x = 7{,}5$ og $y = 76{,}5$? Det er også en løsning. Dessuten har vi løsningen $x = 12$ og $y = 74$ osv. Faktisk fins det uendelig mange løsninger. (Når vi tolker x og y som aldrene til Elin og Agda holder vi oss til positive tall mellom 0 og 84, avrundet til en passende desimal).

I første omgang skal vi bruke geometri til å holde styr på alle disse løsningene. Når vi kun har én lineær likning i én variabel, får vi én løsning, som vi kan tolke som et punkt på tallinja.

Eksempel 3.13 Likningen $5x - (3x - 1) = 7$ har løsning $x = 3$, som vi kan illustrere geometrisk når vi har valgt 0 et sted på tallinja:

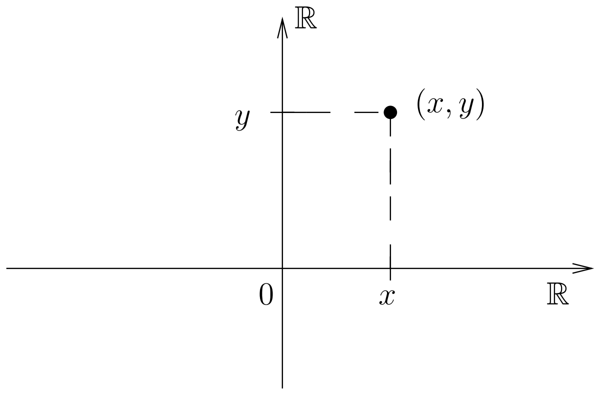


■

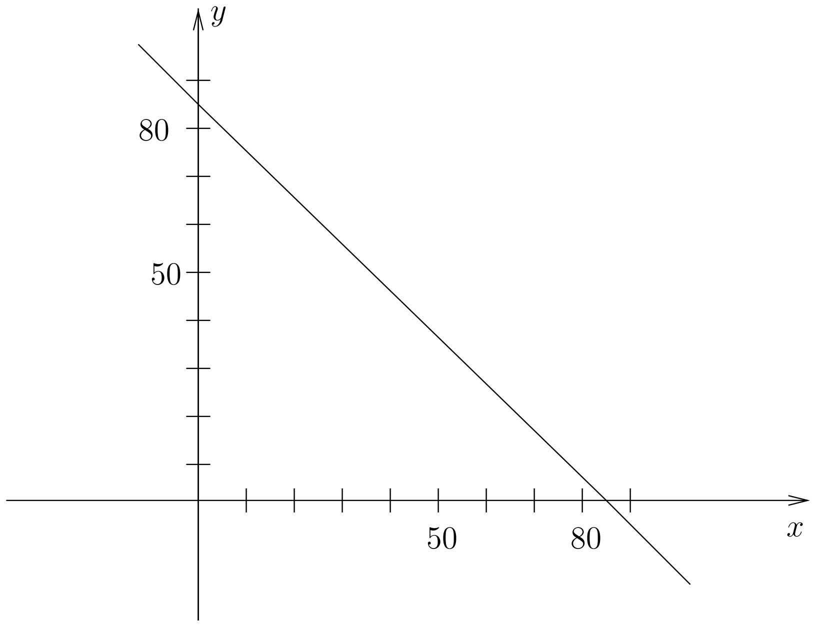
Når vi har to variabler trenger vi en tallinje for hver variabel der vi kan markere av løsningene. Men variabelene hører jo også sammen -sammenhengen er gitt ved likningen de skal oppfylle. Hvis to variabler hører sammen, skriver vi gjerne (x, y) og kaller det et *ordnet tallpar* ('ordnet' siden rekkefølgen spiller en rolle: x kommer først).

Geometrisk kan vi også få variablene til å henge sammen ved at vi plasserer de to tallinjene 90° på hverandre. Punktet der tallinjene skjærer hverandre kalles *origo*, og tilsvarer tallparet $(0, 0)$. Linjene blir nå hetende *akser*, gjerne x-aksen og y-aksen, eller førsteaksen og andreaksen.

Vi har dermed laget oss et *koordinatsystem* i planet, der vi kan tegne inn ordnede tallpar. Et ordnet tallpar (x, y) gir et punkt i *xy-planet* med koordinater x og y:



Hvis vi nå tegner inn alle de ordnede tallparene som passer i likningen $x + y = 84$, viser det seg at de danner en rett linje:



Dette er grunnen til at denne typen likninger kalles lineære:

> De ordnede tallparene (x, y) gitt av likningen
>
> $$y = ax + b \tag{3.6}$$
>
> der $a, b \in \mathbb{R}$ gir punkter i xy-planet som ligger på en rett linje.

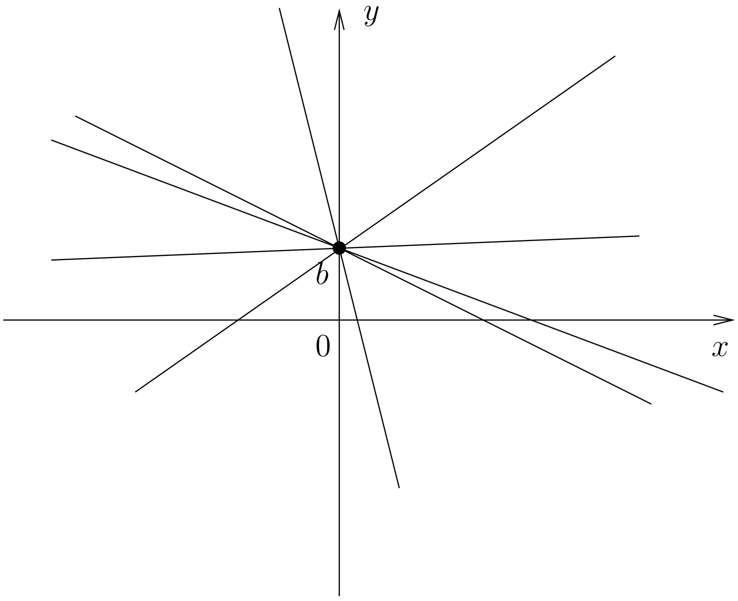
Og husk: En rett linje fortsetter i det uendelige i begge retninger, selv om vi alltid bare tegner en del av den -egentlig tegner vi et linjestykke.

Vi ser at likningen $x + y = 84$ kan skrives som $y = -x + 84$, dvs. vi har en likning på formen (3.6) med $a = -1$ og $b = 84$. Det viser seg at ved å skrive lineære likninger i to variabeler på formen (3.6) har vi en fin karakterisering av rette linjer. Tallene a og b har nemlig noen spesielle roller:

Hvis vi setter $x = 0$ i likningen (3.6), ser vi at $y = b$. Det betyr at punktet $(0, b)$ ligger på linja. Siden $x = 0$ er dette det punktet der linja skjærer y-aksen. Tallet b sin rolle er dermed utforsket: b sier hvor linja skjærer y-aksen.

Da er vi et godt stykke på vei: Hvilke opplysninger trenger vi for å vite hvilken linje det snakkes om? Hvis vi vet b, vet vi iallfall hvor linja skjærer

y-aksen. Men det kan være (uendelig) mange linjer som går gjennom dette punktet:



Hvordan kan vi skille disse linjene fra hverandre? Jo, *hellingen* er forskjellig. Matematisk kan vi regne ut hellingen ved å se hvor mye y-verdiene forandres når x-verdiene forandres med 1 (for å sammenligne tallene på de ulike linjene, velger vi samme verdi for forandringen i x-ene, oftest en enhet, eller 1).

La oss regne ut hellingen til linja gitt ved $y = ax+b$: Vi ser på forandringen i y-verdiene mellom to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2), der forskjellen i x-verdiene altså settes til 1, dvs. vi ser på punktene (x_1, y_1) og $(x_1 + 1, y_2)$. Siden begge punktene ligger på linja, har vi oppfylt

$$y_1 = ax_1 + b$$

og

$$y_2 = a(x_1 + 1) + b.$$

Vi ønsker å regne ut $y_2 - y_1$, som gir:

$$y_2 - y_1 = (a(x_1 + 1) + b) - (ax_1 + b) = a.$$

Forskjellen i y-verdiene er altså a. Dermed har vi funnet rollen til a også: det gir et mål på hellingen til linja, og vi kaller a *stigningstallet* til linja. Positivt stigningstall sier oss at når x-verdiene øker, så øker y-verdiene også. Negativt stigningstall sier at når x-verdiene øker, så avtar y-verdiene. Positiv oppførsel/tendens er ofte å foretrekke, andre ganger kan det være fordelaktig med en negativ utvikling. Uansett, stigningstall er uhyre viktig: Det er slik vi måler hva slags (stor/liten, positiv/negativ) endring lineære sammenhenger har.

Vi kan regne ut likningen til en linje hvis vi vet to punkter den går gjennom. Stigningstallet regnes da ut ved å se på forholdet mellom forskjellen i y-verdiene og forskjellen i x-verdiene til de to punktene (tenk på hvorfor):

Eksempel 3.14 Stigningstallet til linja gjennom punktene $(1, 4)$ og $(\frac{1}{2}, 2)$ er

$$a = \frac{2-4}{\frac{1}{2}-1} = \frac{-2}{-\frac{1}{2}} = 4.$$

Dermed er likningen til linja foreløpig

$$y = 4x + b.$$

For å finne b, setter vi inn et av punktene (de passer jo begge inn i likningen). Hvis vi setter inn $(1, 4)$, får vi

$$4 = 4 \cdot 1 + b,$$

som gir $b = 0$. Dermed er linja gitt ved likningen $y = 4x$, en linje gjennom origo med stigningstall lik 4. ■

Vi merker oss et par spesialtilfeller:

- $b = 0$: Da har vi likningen $y = ax$, som gir en linje gjennom origo med stigningstall a.
- $a = 0$: Da har vi likningen $y = b$, og vi har en horisontal linje med y-verdi konstant lik b (x kan være hva som helst).

I tillegg har vi likningen

- $x = c, \ c \in \mathbb{R}$, som også gir oss en linje. Denne linja er vertikal med konstant x-verdi lik c (y kan være hva som helst), og stigningstallet er uendelig.

Linære likninger skal du fortsette å utforske i MAT1001. Der vil du se mange anvendelser. Bruk forkurset til å regne mange oppgaver, slik at du føler deg 'back in the game' før semesterstart.

Vi ser litt på to lineære likninger også:

3.6 To lineære likninger i to variabler

Tilbake til Elin og Agda: I tillegg til at de er 84 år til sammen får vi nå vite at Agda er 44 år eldre enn Elin. En opplysning til gir en likning til, i dette tilfellet likningen

$$y = x + 44.$$

Sammen med likningen $x+y = 84$ har vi nå et likningssystem, som vi skriver

$$\begin{cases} x + y = 84 \\ y = x + 44. \end{cases}$$

At vi har et likningssystem, betyr at begge likningene skal være oppfylt *samtidig*. Så lenge vi bare hadde én opplysning om to variabler fikk vi uendelig mange løsninger. Nå som vi har to opplysninger om sammenhengen mellom to variabler, har vi en sjanse til å finne én løsning på problemet 'hvor gamle er Elin og Agda?' (Kanskje ikke et verdensproblem, men vi får vist mye nyttig matematikk gjennom et slikt problem iallfall.)

Du har lært hele fire ulike metoder for å løse dette systemet. Vi minner om alle sammen siden de er viktige på hver sin måte:

Alternativ 1 *Addisjonsmetoden/eliminasjonsmetoden:* Vi multipliserer den ene likningen med et passende multiplum slik at vi kan legge sammen likningene og kvitte oss med en variabel. Da har vi redusert systemet til én likning i én variabel: Her er vi heldige, siden oppryddingen gir at

x-ene forsvinner ved å legge likningene sammen uten å multiplisere:

$$\begin{cases} x + y = 84 \\ -x + y = 44 \end{cases}$$

Ved å legge sammen likningene får vi

$$2y = 128,$$

dvs. $y = 64$. Deretter setter vi dette inn i en av likningene og finner at $x = 20$. Så Agda er 64 år og Elin er 20 år.

Alternativ 2 *Substitusjonsmetoden:* Vi bruker den ene likningen til å finne et uttrykk for den ene variabelen, som vi setter inn i den andre likningen. Igjen reduserer vi likningssystemet til én likning i én variabel: Likning nummer to sier at

$$y = x + 44,$$

som vi setter inn i den første likningen:

$$x + (x + 44) = 84,$$

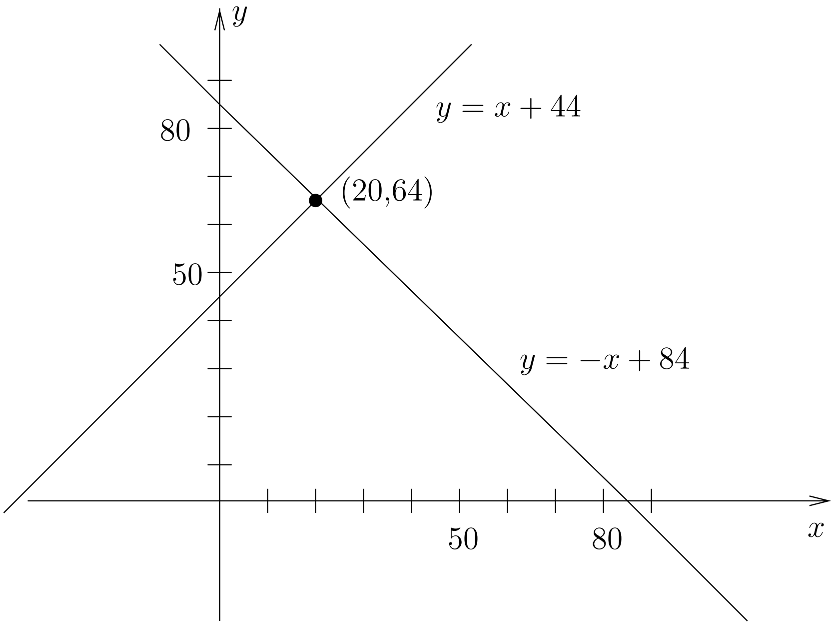
som gir $2x = 40$, dvs, $x = 20$, og ved å sette inn dette, får vi samme svar som i Alternativ 1.

Alternativ 3 *Sette uttrykk lik hverandre:* Vi bruker hver av likningene til å finne et uttrykk for samme variabel og setter dem lik hverandre: Den første likningen sier at $y = 84 - x$, den andre sier at $y = x + 44$. Vi setter dem lik hverandre:

$$84 - x = 44 + x$$

som gir $-2x = -40$, dvs. $x = 20$, og samme svar som før.

Alternativ 4 *Geometrisk:* Hver av likningene danner en rett linje. I de tilfellene hvor likningssystemet har én løsning, finner vi denne ved å finne skjæringspunktet mellom linjene, siden dette gir punktet der begge likninger er oppfylt <u>samtidig</u>. For Elin og Agda får vi ett skjæringspunkt:



Litt avhengig av hva slags opplysninger vi får, kan det tenkes at likningssystemet vårt ikke har noen løsninger, og faktisk kan det ha uendelig mange løsninger også.

Eksempel 3.15 Hvis vi i tillegg til å vite at Elin og Agda er 84 år til sammen, får vite at gjennomsnittet av aldrene deres er 42, vil denne nye opplysningen ikke si oss noe nytt(ig): Likningen vi får nå er

$$\frac{x+y}{2} = 42,$$

som kan gjøres om til likningen vi allerede hadde ved å multiplisere med 2 (en lovlig operasjon): $x + y = 84$. Dermed har vi fortsatt uendelig mange løsninger, som ligger på en linje med stigningstall -1 og skjærer y-aksen i 84.

Hvis tilleggsopplysningen isteden er at gjennomsnittet av aldrene er 37, får vi likningen

$$\frac{x+y}{2} = 37,$$

eller

$$x + y = 74.$$

Sammen med likningen $x+y = 84$ utgjør dette et system som ikke gir mening, dvs. vi har ingen løsninger. Geometrisk svarer dette til at begge linjer har stigningstall -1, og er derfor parallelle, uten felles skjæringspunkter. ■

Kapittel 4

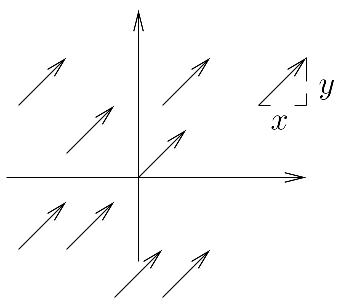
Torsdag

4.1 Vektorer i planet

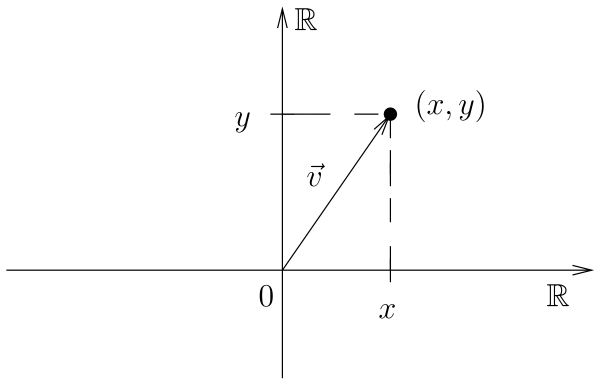
I forbindelse med rette linjer i planet passer det fint å si litt om vektorer i planet også.

En *vektor* i planet er et linjestykke med retning, og tegnes dermed som en pil. En vektor har et startpunkt og et endepunkt (i motsetning til en linje).

Hvis vi har et ordnet tallpar (x, y) kan vi danne vektoren $\vec{v} = [x, y]$. Vi tenker på x-koordinaten til vektoren som antall enheter mellom start- og endepunkt i den positive x-retningen, og tilsvarende for y-koordinaten. Geometrisk kan vi dermed tegne mange representanter for samme vektor:



Vi kan altså tegne vektorer hvor som helst i planet. En vektor kan imidlertid 'parallellforskyves' slik at origo er startpunktet, så vi tar ofte utgangspunkt i origo, og tegner vektoren $\vec{v} = [x, y]$ som pilen med startpunkt i origo og endepunkt i (x, y):



Tallene x og y kalles *koordinatene*/komponentene til vektoren $\vec{v}$, og $[x, y]$ kalles *koordinatformen* til $\vec{v}$.

Lengden til en vektor er avstanden mellom startpunktet og endepunktet. Ved Pythagoras (som vi også møter senere i kapittelet) har dermed vektoren $\vec{v} = [x, y]$ lengde $\sqrt{x^2 + y^2}$. Vi betegner lengden med et absoluttverditegn (siden vi jo ser på avstanden fra et punkt til origo), dvs. vi kan skrive

$$|\vec{v}| = |[x, y]| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

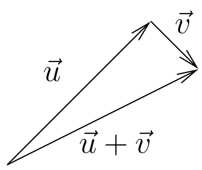
La nå $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$ være to vektorer. To vektorer er *like* hvis de er koordinatvis like, dvs. $x_1 = x_2$ og $y_1 = y_2$.

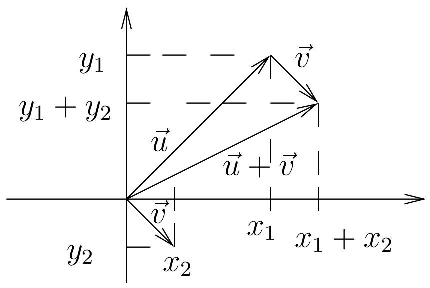
Vi adderer vektorer koordinatvis, dvs.

$$\vec{u} + \vec{v} = [x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2].$$

Vi har altså addert x-verdiene og y-verdiene hver for seg, og fått en ny vektor. Geometrisk tilsvarer dette å flytte $\vec{v}$ slik at den starter der $\vec{u}$ slutter, med samme retning og lengde som før vi flyttet den. Summen er nå pilen som starter der $\vec{u}$ starter og ender der $\vec{v}$ ender:

Med utgangspunkt i origo:



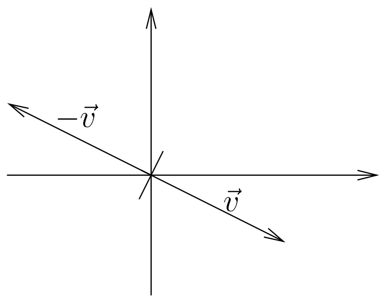


Når vi multipliserer en vektor med et (reelt) tall (ofte kalt en *skalar*) s, multipliserer vi inn s i hver av koordinatene, dvs. hvis $\vec{v} = [x, y]$ har vi

$$s\vec{v} = s[x, y] = [sx, sy].$$

Hva skjer geometrisk med vektoren $\vec{v} = [x, y]$ når vi multipliserer den med ulike tall s? Jo,

- for $s = 1$ forandres ikke vektoren.
- for $s = -1$ får vi vektoren $-\vec{v} = [-x, -y]$, dvs. vi får vektoren med motsatt retning (retningen snus $180°$), men der lengden beholdes.

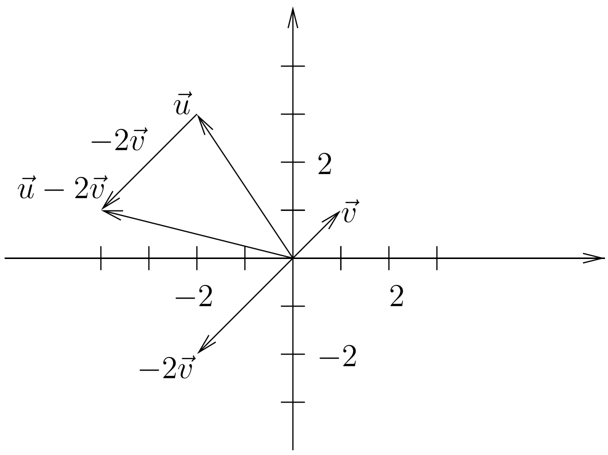


- for $|s| > 1$ forlenges vektoren med en faktor s. Hvis s er positiv, beholder vektoren retningen. Hvis s er negativ, er retningen motsatt.
- for $s = 0$ får vi vektoren $[0, 0]$, dvs. punktet origo. Denne vektoren kalles også *nullvektoren*. Kjært barn har mange navn.
- for $0 < |s| < 1$ forkortes vektoren med en faktor s. Hvis s er positiv, beholder vektoren retningen. Hvis s er negativ, er retningen motsatt.

Eksempel 4.1 La $\vec{u} = [-2, 3]$ og $\vec{v} = [1, 1]$. Vi regner ut $\vec{u} - 2\vec{v}$:

$$[-2, 3] - 2[1, 1] = [-2, 3] + [-2, -2] = [-4, 1].$$

Geometrisk får vi:



■

To vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er *parallelle* hvis det fins et tall s slik at $\boxed{\vec{u} = s\vec{v}}$. (Nullvektoren er altså parallell med alle vektorer.) Hvis vi skriver vektorene på koordinatform, $\vec{u} = [x_1, y_1]$ og $\vec{v} = [x_2, y_2]$, kan vi sjekke at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle ved at

$$[x_1, y_1] = s[x_2, y_2],$$

dvs. vi skal ha oppfylt likningssystemet

$$\begin{cases} x_1 = sx_2 \\ y_1 = sy_2. \end{cases}$$

Eksempel 4.2 Vektorene $[1, 2]$ og $[3, 6]$ er parallelle siden $[3, 6] = 3[1, 2]$, eventuelt $[1, 2] = \frac{1}{3}[3, 6]$.

Vektorene $[1, 2]$ og $[3, 5]$ er derimot ikke parallelle siden likningssystemet

$$\begin{cases} 1 = 3s \\ 2 = 5s \end{cases}$$

ikke har noen løsning: Den første likningen gir at $s = \frac{1}{3}$, og satt inn i likning nummer to gir det $2 = \frac{5}{3}$, noe som ikke stemmer. ■

Eksempel 4.3 Hva må t være for at vektorene $3\vec{u} - 5\vec{v}$ og $t\vec{u} + 2\vec{v}$ skal være parallelle?

Vi må ha oppfylt

$$3\vec{u} - 5\vec{v} = s(t\vec{u} + 2\vec{v})$$

for en s. Det gir likningene

$$3\vec{u} = st\vec{u} \quad \text{og} \quad -5\vec{v} = s2\vec{v},$$

dvs.

$$3 = st \quad \text{og} \quad -5 = 2s.$$

Den andre likningen gir $s = -\frac{5}{2}$, og dermed gir den første likningen

$$3 = (-\tfrac{5}{2})t$$

som gir $t = -\frac{6}{5}$. ■

Vektorer og rette linjer hører naturlig sammen: En vektor som er parallell med en rett linje kalles en *retningsvektor* til linja. Siden vektorene $s\vec{v}$ alle er parallelle med $\vec{v}$ (vi har bare forkortet, forlenget eller fått motsatt retning), vil en linje ha uendelig mange retningsvektorer. Men det betyr også at vi kun trenger å finne én retningsvektor, siden vi får alle de andre ved å multiplisere denne med passende tall.

For å finne en retningsvektor til en rett linje kan vi bruke stigningstallet til linja: En linje som er gitt ved likningen $y = ax + b$ har stigningstall a, som betyr at forskjellen i y-verdiene til to punkter på linja er a når forskjellen i x-verdiene til de samme punktene er 1. Dermed er en naturlig retningsvektor til linja $y = ax + b$ gitt ved vektoren

$$[1, a].$$

Eksempel 4.4 En retningsvektor til linja $y = -x + 84$ er $[1, -1]$. Vi har tegnet denne linja tidligere i heftet i forbindelse med aldrene til Elin og Agda. Bla tilbake til den tegningen og se at alle vektorer $s[1, -1]$ er parallelle med linja. ■

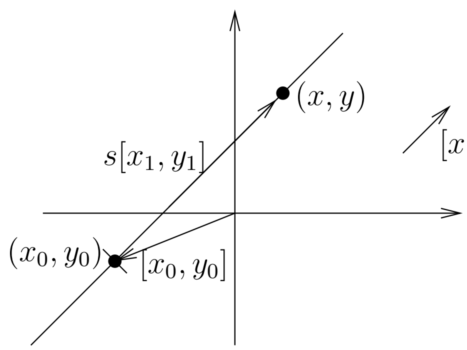
Retningsvektorene kan brukes til å skrive en rett linje på *vektorform*:

Punktene (x, y) på en rett linje kan skrives på vektorform som

$$[x, y] = [x_0, y_0] + s[x_1, y_1], \quad s \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

der (x_0, y_0) er et punkt på linja og $[x_1, y_1]$ er en retningsvektor til linja.

Her er en tegning som forklarer (4.1) (prøv å forklare høyt for deg selv):



Hvordan finner vi vektorformen til en rett linje? Jo:

- Hvis vi har gitt linja på formen $y = ax + b$ kan vi for eksempel bruke retningsvektoren $[1, a]$ i (4.1) og punktet $(0, b)$.
- Hvis vi har gitt to punkter som linja går gjennom, kan vi regne ut stigningstallet a, bruke $[1, a]$ som retningsvektor og et av punktene for å finne vektorformen.

Eksempel 4.5 Linja gitt ved $y = -x + 84$ har retningsvektor $[1, -1]$. Av punkter kan vi sette inn ulike verdier for x og velge oss et punkt. Vi velger $(0, 84)$, og får vektorformen

$$[x, y] = [0, 84] + s[1, -1],$$

$s \in \mathbb{R}$. ■

Når vi har skrevet en linje på vektorform får vi automatisk en såkalt *parameterfremstilling* av linja, der s kalles en *parameter*: Vektorformen

$$[x, y] = [x_0, y_0] + s[x_1, y_1]$$

gir

$$[x, y] = [x_0 + sx_1, y_0 + sy_1],$$

ved vektoraddisjon og multiplikasjon med s. Dermed får vi linja gitt ved likningssystemet

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + sx_1 \\ y = y_0 + sy_1, \end{cases}} \tag{4.2}$$

som er det vi kaller en parameterfremstilling for linja.

Eksempel 4.6 Linja $y = -x + 84$ kan skrives på vektorform som

$$[x, y] = [0, 84] + s[1, -1],$$

dvs. en mulig parameterfremstilling for linja er

$$\begin{cases} x = s \\ y = 84 - s. \end{cases}$$

Hadde vi for eksempel valgt punktet $(1, 83)$ isteden, hadde vi fått en mulig parameterfremstilling (vi kaller nå parameteren for t)

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 83 - t. \end{cases}$$

Ved å sette inn ulike verdier for s og t (som jo kan være hva som helst), får vi de samme punktene, dvs. den samme linja. For eksempel gir $s = 0$ punktet $(0, 84)$, mens $t = -1$ også gir $(0, 84)$. ■

Vi legger merke til at siden parameteren s kan ta hvilken som helst verdi, har en linje uendelig mange parameterfremstillinger. Vi har her gitt en spesiell metode for å finne slike fremstillinger, ved å bruke retningsvektoren $[1, a]$ der a er stigningstallet til linja.

4.2 Omkrets og areal

Vi har beveget oss ut i planet, og spesielt studert punkter som ligger på en rett linje. Vi skal nå ta for oss litt *plangeometri*.

Vi er enige om at matematikk handler om å løse problemer. Geometri betyr 'jordmåling', og noen av de mest klassiske problemene i geometri handler om å regne ut omkretsen og arealet av ulike områder -hvor langt er det rundt jorda? hvor stor åker har du?

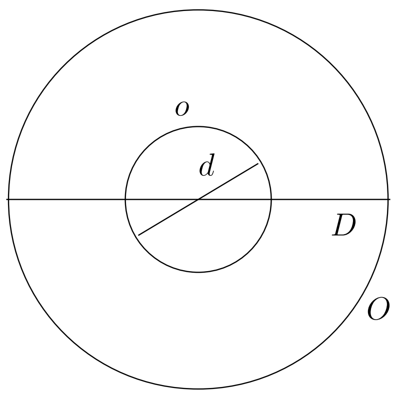
Hvis vi har et område i planet som er avgrenset av rette linjestykker, har vi en *mangekant*, også kalt et *polygon*. Linjestykkene kalles sidene i mangekanten, og vi kan klassifisere mangekantene etter hvor mange sider de har, slik som trekant, firkant, femkant osv. Hvis alle sidene i mangekanten er like lange og alle vinklene er like store, har vi en *regulær* mangekant.

Når vi har målt hvor lange sidene i en mangekant er, kan vi regne ut omkretsen av denne ved å legge sammen lengdene av alle sidene. Men så fort noen av sidene får *buer* på seg, blir det imidlertid litt verre. Da kommer de geometriske figurene vi kaller *sirkler* inn. Det var for øvrig sumererne som i sin tid (ca. 3000 f. Kr.) oppfant hjulet.

Blant annet Pythagoreerne var opptatt av geometri (ca. 500 f. Kr.), og ikke minst var de opptatt av pene forhold/tall. Det viste seg for eksempel at uansett hvor stor en sirkel er, så er forholdet mellom omkretsen og diameteren til sirkelen det samme, dvs.

$$\frac{o}{d} = \frac{O}{D}$$

i følgende tegning:



Dette pene forholdet ble etter hvert hetende π ('pi', gresk p, for 'perimeter', omkrets på engelsk):

$$\boxed{\pi = \frac{\text{omkrets}}{\text{diameter}}}$$

Ved å tilnærme en sirkel med to mangekanter (en på innsiden av sirkelen og en på utsiden), nærmere bestemt regulære 96-kanter, regnet Arkimedes ut at

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7},$$

dvs. med avrunding til 4 desimaler:

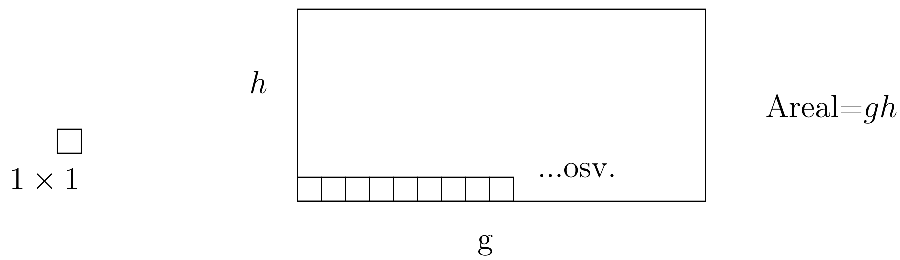
$$3{,}1408 < \pi < 3{,}1428.$$

I dag har man funnet mange flere desimaler for π. For eksempel har vi med 20 desimaler: $\pi \approx 3{,}14159265358979323846$ (søk på 'desimaler pi' på nettet hvis du vil se flere av de uendelig mange desimalene til π). Tallet π er irrasjonalt, dvs. det kan ikke skrives som en brøk.

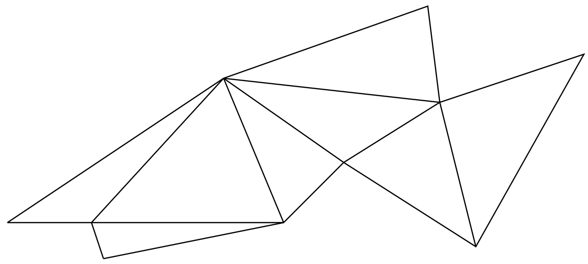
Omkretsen til en sirkel med radius r er altså gitt ved π ganger diameteren $2r$, dvs. $\boxed{2\pi r}$.

Når det gjelder areal, er historien ganske lik: å finne arealet til en mangekant går ganske fint siden vi kan dele den opp i trekanter, og kanskje også i rektangler og parallellogrammer for eksempel. Deretter kan vi legge sammen arealene av alle de mindre bitene for å finne mangekantens areal.

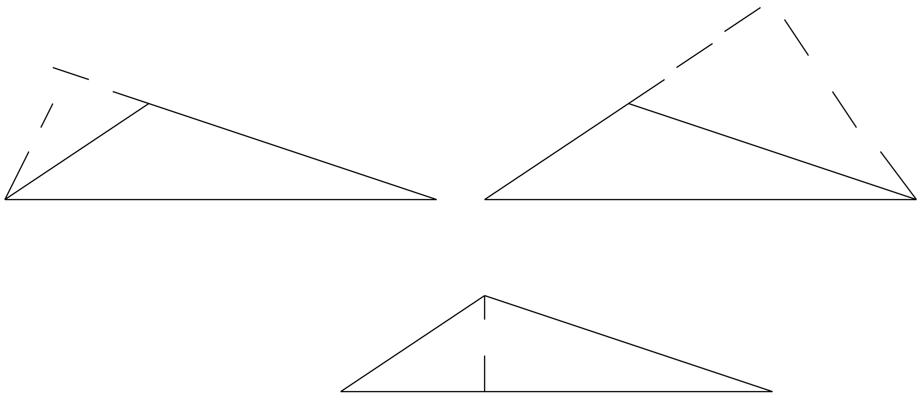
Arealet av et rektangel finner vi ved å bruke *enhetskvadratet*, dvs. kvadratet med sidelengde 1, og se hvor mange slike vi får plass til i rektangelet:



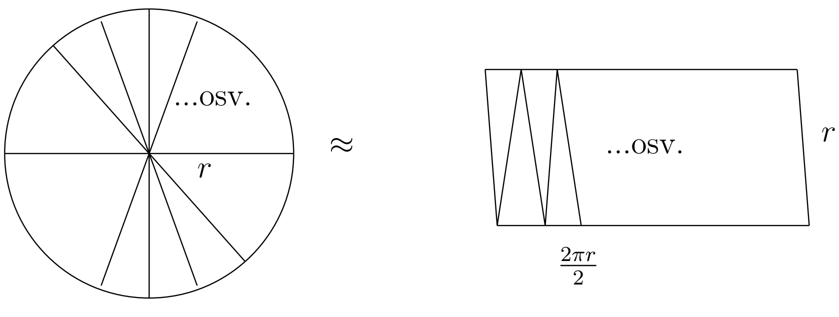
Arealet av en trekant er viktig, siden vi altså ofte må dele inn områder i mindre trekanter:



Arealet av en trekant finner vi ved å dele et rektangel i to, dvs. arealet av en trekant er $\boxed{\frac{gh}{2}}$ der g er *grunnlinja* og h er *høyden* som står normalt på g. Merk at vi har tre muligheter for g og h i en trekant (tegn inn g og h):



Når områdene har buede kanter, kommer igjen sirkelen inn. Vi kan finne arealet av en sirkel ved å dele opp sirkelen i bittesmå sirkelsektorer og legge dem ved siden av hverandre:

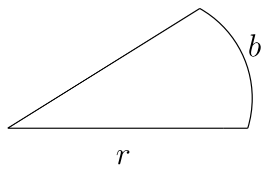


Det gir (ved å bruke tilnærming slik Arkimedes drev med for å finne desimaler til π):

$$\boxed{A = \frac{2\pi r}{2} r = \pi r^2.}$$

For eksempel har sirkelen med radius 2 samme tallverdi på areal og omkrets, som er 4π. Benevningen er selvsagt forskjellig: hvis radiusen er 2 m, er arealet 4π m^2, mens omkretsen er 4π m.

Ved å dele inn områder i trekanter og *sirkelsektorer*, kan vi regne ut omkrets og areal av mange områder. Omkretsen til en sirkelsektor med radius r er $\boxed{2r+b}$ der b står for *buelengden*:



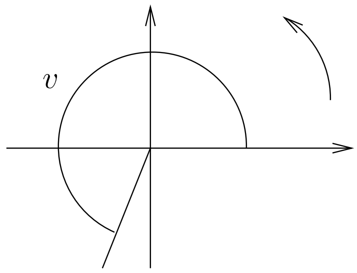
Omkretsen til en sirkel med radius r er $2\pi r$, som også kan kalles buelengden til sirkelen. En sirkelsektor med radius r og buelengde b utgjør 'en $\frac{b}{2\pi r}$-del' av en sirkel med radius r, og får dermed areal

$$\boxed{A = \frac{b}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{br}{2}.}$$

Vi har allerede nevnt ord som vinkler og buelengde. Disse begrepene hører naturlig sammen. Til nå (i 2MX/R1) har vi målt vinkler i grader. For å kunne regne videre med vinkler vil vi trenge å måle vinkler i *radianer*. Vi benytter forkurset til å sniktitte litt på dette begrepet, som du vil få meget god bruk for i videre realfagsstudier. (Du vil lære stoffet i neste avsnitt i kurset MAT1001 også, men det er fint å vende seg til radianer så fort som mulig.)

4.3 Radianer (nytt stoff)

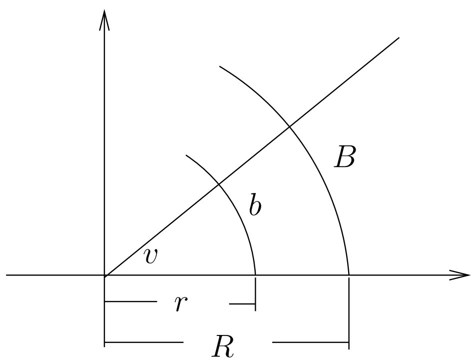
En *vinkel* er en form som dannes av et punkt og to stråler (kalt vinkelbein) fra punktet. Vi plasserer ofte en vinkel i et koordinatsystem ved å la punktet være origo og det ene vinkelbeinet være den positive x-aksen. Det andre vinkelbeinet er da også en stråle ut fra origo, og vi måler vinkler *mot* klokka. Vi kan altså tenke på en vinkel v som en sirkelbue, der vi går langs buen mot klokka:



Tradisjonelt sier vi at vinkelen som dannes når vi har gått en full sirkel måler $360\,^\circ$. Dette har vi fra sumererne som vi har nevnt før, siden de brukte et 60-tallssystem.

Når vi skal regne med vinkler er det imidlertid et annet vinkelmål som viser seg å være mer hensiktsmessig enn grader med benevningen $^\circ$. Dette vinkelmålet kalles *radianer* og er uten benevning.

Vi observerer følgende: En vinkel dannes av en sirkelbue med buelengde b og tilhørende radius r. For én og samme vinkel v kan man ha (uendelig mange) sirkelbuer av ulik størrelse. Her har vi tegnet to sirkelbuer:



Uansett hvilken av disse sirkelbuene vi bruker, er forholdet mellom buelengden og den tilhørende radiusen det samme! Dvs. at

$$\frac{b}{r} = \frac{B}{R}$$

i tegningen ovenfor. Dette forholdet kalles *radian* og gir oss vinkelmålet vi ønsker oss:

$$\boxed{\text{radian} = \frac{\text{buelengde}}{\text{radius}}}$$

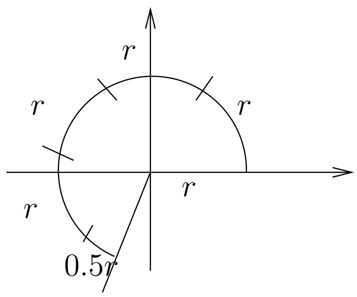
Eksempel 4.7 Vinkelen der forholdet mellom buelengden og radiusen er lik 1 har vinkelmål 1 (radian). For denne vinkelen er altså buelengden lik radiusen. ■

Vi dropper ordet 'radian', og snakker bare om et tall (uten benevning) som mål på en vinkel.

Eksempel 4.8 Vinkelen 4,5 gir oss vinkelen der

$$\frac{\text{buelengde}}{\text{radius}} = 4{,}5,$$

dvs. buelengden er 4,5 ganger så lang som radiusen. Det vil ca. gi oss følgende vinkel (vi merker av 4,5 radiuser langs sirkelbuen):



■

Vinkelen som tilsvarer en full sirkel med radius r er gitt ved forholdet mellom buelengden b, som er omkretsen $2\pi r$, og radiusen r, dvs.

$$\frac{b}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi.$$

Målt i grader er den samme vinkelen lik $360\,^\circ$, så vi får følgende sammenheng mellom vinkelmålene grader og radianer:

$$\boxed{360\,^\circ = 2\pi,} \tag{4.3}$$

som f.eks. gir

$$180\,^\circ = \pi \quad \text{og} \quad 90\,^\circ = \frac{\pi}{2}.$$

Vi kan nå bruke (4.3) for å regne oss fra grader til radianer og omvendt.

Eksempel 4.9 For å finne hva vinkelen lik 1 radian (i Eksempel 4.7) er målt i grader, får vi utregningen

$$1 = \frac{2\pi}{2\pi} = \frac{360\,^\circ}{2\pi} \approx 57{,}3\,^\circ.$$

■

Eksempel 4.10 For å finne hva vinkelen $256\,^\circ$ er målt i radianer, får vi utregningen

$$256\,^\circ = \frac{256\,^\circ \cdot 360\,^\circ}{360\,^\circ} = \frac{256\,^\circ \cdot 2\pi}{360\,^\circ} \approx 4{,}47.$$

■

Vi legger videre merke til at vi drar med oss 60-tallssystemet inn i radianenes verden også. Mange vinkler er ekstra pene målt i radianer, i den forstand at vi kan angi dem som brøkdeler av π.

Eksempel 4.11 Vi har blant annet

$$30\,^\circ = \frac{360\,^\circ}{12} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \;(\approx 0{,}52)$$

og

$$90\,^\circ = \frac{360\,^\circ}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \;(\approx 1{,}57).$$

I oppgavene skal du finne enda flere pene vinkler. ■

Vi minner også om at vi kan finne vinkler i alle omløp. Vinkler i *første omløp* vil si vinkler mellom 0 og 2π. Positive omløp får vi ved å legge til positive heltallsmultiplumer av 2π, dvs. legge til $k \cdot 2\pi$ der k er et positivt helt tall. Negative omløp får vi ved å trekke fra positive heltallsmultiplumer av 2π. På denne måten får vi at ethvert tall på tallinjen $\mathbb{R}$ vil gi oss en vinkel. Første omløp regnes som intervallet $[0, 2\pi)$.

For å regne ut hvilken vinkel vi har i første omløp, må vi altså trekke fra/legge til positive heltallsmultiplumer av 2π til vi har en vinkel mellom 0 og 2π:

Eksempel 4.12 Vi har

$$\frac{501\pi}{3} = 167\pi = \pi + 166\pi = \pi + 83 \cdot 2\pi,$$

så vinkelen $\frac{501\pi}{6}$ er lik vinkelen π i første omløp (der vi har trukket fra 83 omløp). ■

Eksempel 4.13 Vi har

$$-\frac{102\pi}{6} = -17\pi = \pi - 18\pi = \pi - 9 \cdot 2\pi,$$

så vinkelen $-\frac{102\pi}{6}$ er lik vinkelen π i første omløp (der vi har lagt til 9 omløp). ■

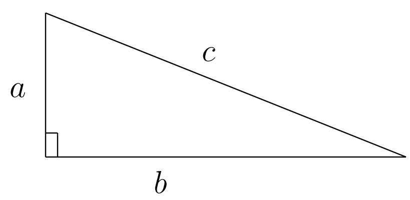
Du vil bli godt kjent med radianer ved å regne oppgavene -det er en meget god investering! Vi vil bruke radianer som vinkelmål fra nå.

4.4 Trigonometri

Trigonometri betyr 'trekantmåling'. Utgangspunktet vårt er en *rettvinklet* trekant, dvs. en av vinklene er $\frac{\pi}{2}$.

I en rettvinklet trekant har sidene egne navn: den motstående siden til den rette vinkelen kalles *hypotenusen*, og de to andre sidene kalles *katetene*. Vi snakker gjerne om 'den korteste' og 'den lengste' kateten for å skille dem. I forhold til en av de to spisse vinklene i trekanten snakker vi også om 'motstående' og 'hosliggende' katet. I tilfellet der vi har en *likebeint* (to sider er like lange) rettvinklet trekant er katetene like.

Vi kommer aldri utenom Pythagoras' setning når vi jobber med rettvinklede trekanter:



Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Pythagoras' setning er meget anvendelig. Her er et eksempel. Du vil støte på mange flere etter hvert.

Eksempel 4.14 Et kvadrat har areal 49 m^2. Hvor lang er diagonalen?

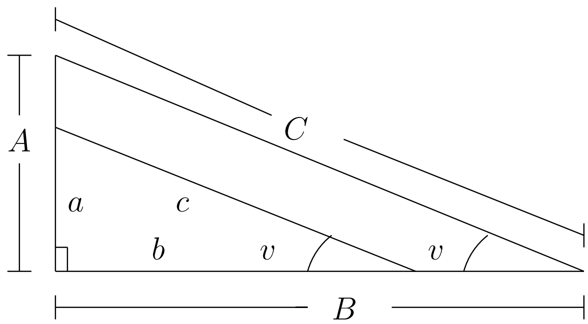
Diagonalen deler kvadratet i to likebeinte rettvinklede trekanter der katetene har lengde 7 m. La x være lengden på diagonalen. Da får vi

$$7^2 + 7^2 = x^2,$$

så $x^2 = 98$, som gir to løsninger, der den positive løsningen løser problemet vårt: $x = \sqrt{98} \approx 9{,}9$ m. ■

Vi har vært inne på pene forhold allerede: både π og radian er eksempler på dette. I rettvinklede trekanter finner vi også mange pene forhold.

Hvis vi forlenger sidene i en rettvinklet trekant, dvs. vi ser på formlike trekanter, er det en del forhold som er uavhengig av størrelsen på trekanten (akkurat som π og radian er uavhengig av størrelsen på sirkelen). Disse forholdene har vist seg å være veldig nyttige:



Siden trekantene er formlike kan vi finne mange like store forhold her. For eksempel:

$$\frac{a}{c} = \frac{A}{C}, \quad \frac{b}{c} = \frac{B}{C} \quad \text{og} \quad \frac{a}{b} = \frac{A}{B}.$$

Disse forholdene kaller vi henholdsvis *sinus*, *cosinus* og *tangens* til vinkelen v, forkortet $\sin v$, $\cos v$ og $\tan v$.

Med ord:

- sinus til $v = \dfrac{\text{motstående katet til } v}{\text{hypotenus}} = \dfrac{a}{c} = \dfrac{A}{C}$

- cosinus til $v = \dfrac{\text{hosliggende katet til } v}{\text{hypotenus}} = \dfrac{b}{c} = \dfrac{B}{C}$
- tangens til $v = \dfrac{\text{motstående katet til } v}{\text{hosliggende katet til } v} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{A}{B}$

Vi legger merke til at

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}.$$

Det er lov å bruke kalkulator i disse eksemplene/oppgavene (husk å stille den på radianer!).

Eksempel 4.15 I en rettvinklet trekant er den ene vinkelen $v = \frac{\pi}{5}$. Den motstående kateten til v har lengde 3 cm. Hva er lengden til den andre kateten?

Tegn tegning! Vi kaller lengden til den andre kateten for x cm. Da får vi

$$\frac{3}{x} = \tan \frac{\pi}{5},$$

dvs. $x = \frac{3}{\tan \frac{\pi}{5}} \approx 4{,}13$, så lengden til den andre kateten er 4,13 cm. ■

I en rettvinklet trekant er det fem variable størrelser: lengdene på de tre sidene og størrelsene på de to spisse vinklene. Hvis vi vet en side og en vinkel, kan vi finne de resterende ved hjelp av sinus, cosinus og/eller tangens, eventuelt Pythagoras, og at summen av vinklene i en trekant er π.

Eksempel 4.16 I Eksempel 4.15 fikk vi oppgitt en side og en vinkel. Vi har allerede regnet ut den andre kateten. Kall lengden til hypotenusen for y cm. Vi kan for eksempel finne y ved likningen

$$\sin \frac{\pi}{5} = \frac{3}{y},$$

som gir $y = \frac{3}{\sin \frac{\pi}{5}} \approx 5{,}10$, dvs. lengden til hypotenusen er 5,10 cm (du kan sjekke at dette stemmer med Pythagoras). Videre kan vi finne den tredje vinkelen w ved

$$w = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{3\pi}{10}(\approx 0{,}94).$$

■

Kapittel 5

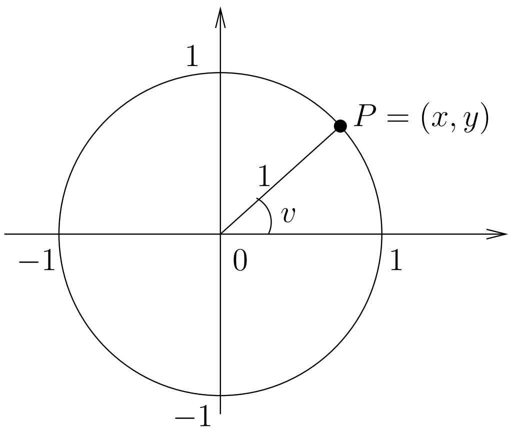
Fredag

5.1 Mer trigonometri (hvorav noe er nytt)

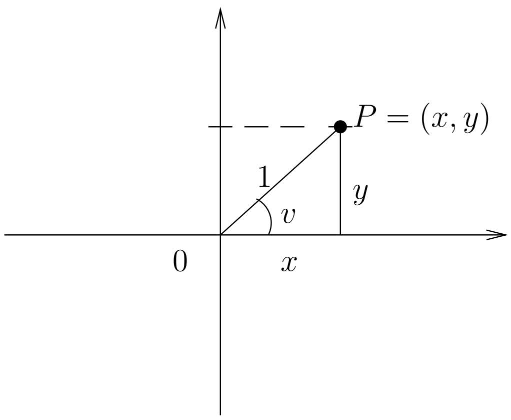
Vi har sett at radian er forholdet mellom buelengde og radius, et forhold som er likt uansett hvor stor sirkelen er. Vi lar nå radiusen være 1. Da er buelengden lik vinkelen målt i radianer. Vi legger nå sirkelen med radius 1 inn i et koordinatsystem med sirkelens sentrum i origo. Denne sirkelen kalles *enhetssirkelen*.

Hvis vi tegner en vinkel i koordinatsystemet som før, vil det andre vinkelbeinet treffe enhetssirkelen i et punkt i planet. Tilsvarende, hvis vi starter med et punkt på enhetssirkelen, kan vi tegne et linjestykke fra punktet til origo. Da får vi dannet en vinkel mellom dette linjestykket og den positive x-aksen. Vi har:

En vinkel v tilsvarer et punkt P på enhetssirkelen:



Vi kan finne koordinatene til P. I tegningen ovenfor finner vi den rettvinklede trekanten der lengden til hypotenusen er 1 (pga. enhetssirkel!), den hosliggende kateten til v har lengde x, og den motstående kateten til v har lengde y:



Dermed får vi

$$\sin v = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos v = \frac{x}{1} = x.$$

Vi har altså (VIKTIG!):

$$\boxed{P = (\cos v, \sin v)}$$

Vi bruker dette til å definere hva vi skal mene med sinus- og cosinusverdien til en hvilken som helst vinkel (ikke bare i 1. kvadrant). Det vil si at

$\cos v$ følger x-koordinaten til punktet P og $\sin v$ følger y-koordinaten til punktet P (i alle kvadranter og omløp).

Siden punktet P ligger på enhetssirkelen følger det at

$$|\cos v| \leq 1 \quad \text{og} \quad |\sin v| \leq 1, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Legg merke til skrivemåten: $(\cos v)^2 = \cos^2 v$. Ved Pythagoras har vi at $x^2 + y^2 = 1$ og dermed:

$$\boxed{\cos^2 v + \sin^2 v = 1}$$

La oss nå finne cosinus- og sinusverdiene til diverse vinkler:

Eksempel 5.1 Ved å tegne ser vi at

$$\begin{array}{ll} v = 0 & \text{tilsvarer punktet } P = (1,0) \\ v = \frac{\pi}{2} & \text{tilsvarer punket } P = (0,1) \\ v = \pi & \text{tilsvarer punktet } P = (-1,0) \\ v = \frac{3\pi}{2} & \text{tilsvarer punktet } P = (0,-1) \end{array}$$

(tegn!). Dermed får vi følgende tabell

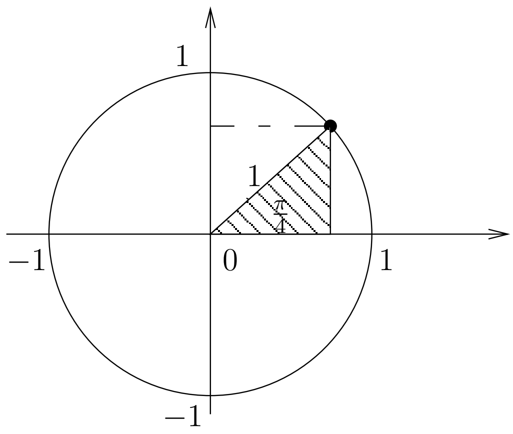
v	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos v$	1	0	-1	0
$\sin v$	0	1	0	-1

■

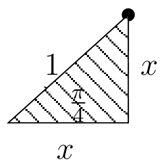
For mange vinkler må vi bruke kalkulator for å finne cosinus- og sinusverdier, men det er en del eksakte verdier (for eksempel $\sqrt{3}$ og $\sqrt{2}$) som dukker opp (spesielt) når vi regner med cosinus og sinus. Det er veldig lurt å kjenne igjen disse eksakte verdiene, og ikke minst å vite hvordan vi finner dem:

Vi kommer veldig langt med cosinus- og sinus-verdiene til vinklene $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ og $\frac{\pi}{3}$.

La oss starte med vinkelen $\frac{\pi}{4}$:



Trekanten vi får er den rettvinklede likebeinede trekanten der lengden på hypotenusen er 1. Det betyr at x- og y-koordinatene til P er like for denne vinkelen. Koordinatene kan vi finne ved Pythagoras:



Vi har

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 &= 1 \\ 2x^2 &= 1 \\ x^2 &= \tfrac{1}{2}, \end{aligned}$$

som har to løsninger, og der vi skal ha den positive løsningen (en lengde), og dermed

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

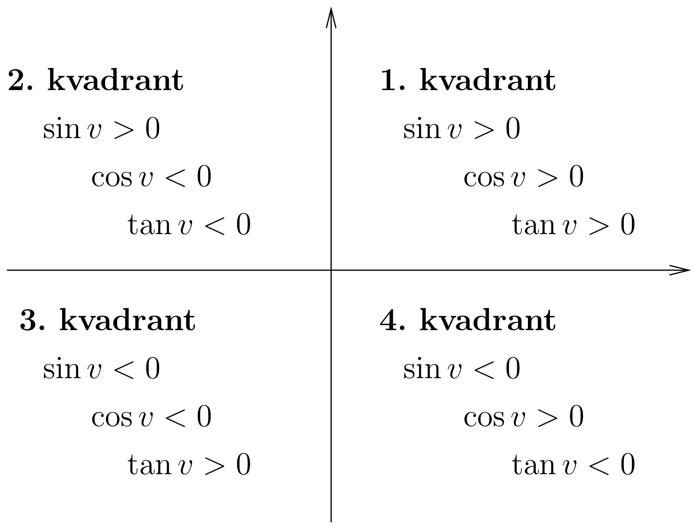
så her dukker altså $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ opp.

Dette gir

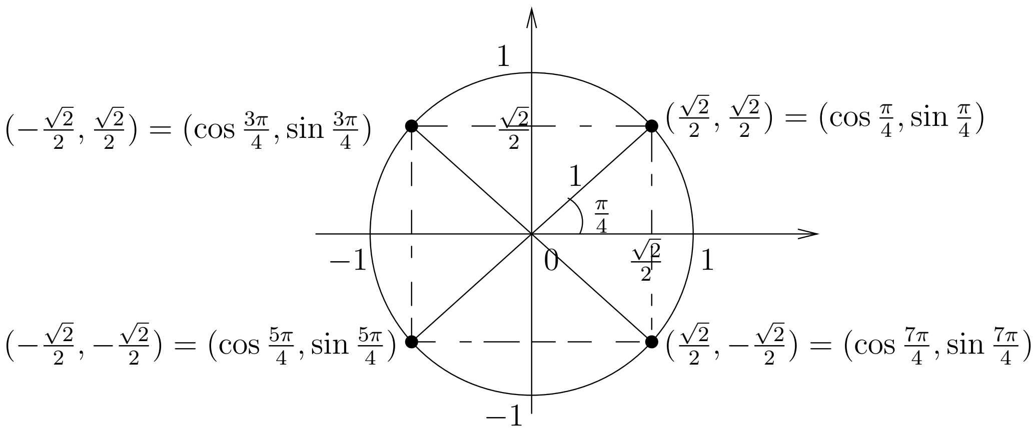
$$\begin{aligned} \cos \tfrac{\pi}{4} &= \tfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \tfrac{\pi}{4} &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Merk deg at $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$.

Vi kan nå bruke symmetri. Koordinatsystemet vi har innført er satt sammen av to tallinjer som deler planet i fire deler, kalt *kvadranter*. Det gir følgende 'fortegnsskjema' for cosinus, sinus og tangens i de fire kvadrantene:



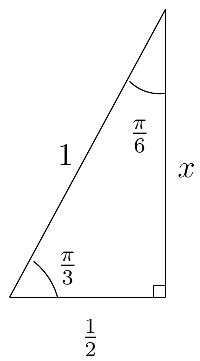
Dermed kan vi finne cosinus- og sinus-verdiene til $\frac{3\pi}{4}$ (2. kvadrant), $\frac{5\pi}{4}$ (3. kvadrant) og $\frac{7\pi}{4}$ (4. kvadrant):



Siden $\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$, har vi nå funnet:

v	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$
$\sin v$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos v$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan v$	0	1	eks.ikke	-1	0	1	eks.ikke	-1

På forelesning skal vi lage en større tabell med '$\frac{\pi}{3}$- og $\frac{\pi}{6}$-vinklene' også. Da får vi bruk for følgende trekant:



Denne trekanten er halvparten av den likesidede trekanten der alle sidene har lengde lik 1. Det betyr at den korteste kateten har lengde lik halvparten av lengden til hypotenusen (som er 1). Kall den lengste kateten for x. Da gir Pythagoras:

$$\begin{aligned} (\tfrac{1}{2})^2 + x^2 &= 1^2 \\ \tfrac{1}{4} + x^2 &= 1 \\ x^2 &= \tfrac{3}{4}, \end{aligned}$$

som igjen har to løsninger der vi ønsker den positive, dvs.

$$x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

og dermed dukker $\sqrt{3}$ opp.

Dette vil gi at

$$\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Legg merke til at $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$.

Vi ser at for vinkler i andre omløp enn første omløp, vil cosinus, sinus og tangens gjenta seg (vi følger et punkt på enhetssirkelen rundt og rundt og rundt og...).

Hovedmålet med dagens regneøvelse er å bli fortrolig med vinkler målt i radianer, og å utforske så mye som mulig rundt cosinus, sinus og tangens.

5.2 Funksjoner

Vi skal nå sette mange av de uttrykkene vi har sett i en *funksjon*sammenheng. Aller først må vi si hva vi mener med en funksjon:

En funksjon er en regel som til ethvert element i en mengde (definisjonsmengden) tilordner ett og bare ett element i en annen mengde.

Eksempel 5.2 Vi arrangerer en quiz for 30 lag. Regelen som til hvert lag i mengden av 30 lag tilordner plasseringen laget får, er en funksjon, siden hvert lag bare kan ha en plassering.

Regelen som til hvert tall mellom 1 og 30 tilordner laget som fikk denne plasseringen er imidlertid ikke nødvendigvis en funksjon, siden en plassering kan deles av flere lag. ■

Vi skal se på *funksjoner i én reell variabel*, dvs. at definisjonsmengden, der variabelen tar sine verdier, består av reelle tall. Variabelen kalles gjerne x og definisjonsmengden til en funksjon f skrives D_f. For ethvert element $x \in D_f$, skriver vi verdien til x som $f(x)$, og vi angir gjerne en funksjon ved å skrive opp et uttrykk for $f(x)$.

Vi har allerede møtt mange uttrykk, og vi kan dermed skrive opp mange funksjoner.

Eksempel 5.3

- Funksjonen f gitt ved $f(x) = 3x + 2$ er en *lineær funksjon*, siden formeluttrykket er et lineært uttrykk. For hver $x \in \mathbb{R}$, regner vi ut tallet der vi multipliserer x med 3 og legger til 2.

- Funksjonen f gitt ved $f(x) = |x|$ er regelen som til hver $x \in \mathbb{R}$ gir oss absoluttverdien av x. Den kalles *absoluttverdifunksjonen*. Ved definisjonen av absoluttverdi, kan f også skrives som

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \geq 0 \\ -x & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

- Funksjonen s (navn på funksjoner kan også variere) gitt ved $s(x) = a^x$ er en *eksponentialfunksjon*, siden variabelen x er i eksponenten. For hver x regner vi ut uttrykket a^x, og får en (og bare en) funksjonsverdi.

- Funksjonen f gitt ved $f(x) = \sin x$ kalles *sinusfunksjonen*. For hver x (som er en vinkel målt i radianer) regner vi ut sinusverdien til x.

- Vi kan addere og multiplisere ulike funksjoner. For eksempel er $f(x) = x \ln x - 1$ produktet av den lineære funksjonen x og logaritmefunksjonen $\ln x$, lagt til den konstante funksjonen -1.

- Hvis vi bruker en funksjon som variabel i en annen funksjon, får vi en *sammensatt* funksjon. For eksempel er $f(x) = \sin(x^2)$ satt sammen av funksjonene $g(x) = \sin x$ og $u(x) = x^2$, der $u(x)$ er variabelen i $g(x)$. Funksjonsuttrykket til f kan dermed skrives som

$$f(x) = g(u(x)) = \sin(x^2).$$

Hvis vi ser på $g(x)$ som en variabel i $u(x)$, får vi den sammensatte funksjonen

$$u(g(x)) = (\sin x)^2.$$

■

I eksemplene ovenfor har vi skrevet opp funksjonsuttrykkene ved hjelp av såkalte *grunnleggende elementære funksjoner*. Generelt har vi følgende grunnleggende elementære funksjoner:

Eksponentialfunksjoner: funksjonsuttrykk på formen ab^x, $b > 0$ (variabelen i eksponenten).

Logaritmefunksjoner: funksjonsuttrykk på formen $a \log_b x$, $b > 0$ (variabelen i en logaritme).

Potensfunksjoner: funksjonsuttrykk på formen ax^b (potens av variabelen).

Trigonometriske funksjoner: f.eks. $\sin x$, $\cos x$.

Funksjoner handler om størrelser som varierer med hverandre. For eksempel kan vi tenke oss hvordan aksjekursene varierer med tiden, hvordan matematikkunnskapen utvikler seg i løpet av forkurset (eksponentielt?) osv. Ulike fenomener kan beskrives ved hjelp av ulike typer funksjoner, så vi må kunne mye om funksjoner, slik at vi kan bruke dem i de rette sammenhengene. Hvordan oppfører ulike funksjoner seg? Hvordan kan vi studere denne oppførselen?

De funksjonene vi skal jobbe med (også i kurset MAT1001) vil ha en delmengde av $\mathbb{R}$ som definisjonsmengde, og ofte vil definisjonsmengden være hele $\mathbb{R}$. Hvis ikke definisjonsmengden er oppgitt er det underforstått at funksjonen er definert for alle verdier der funksjonsuttrykket gir mening.

Eksempel 5.4

- Funksjonen f gitt ved $f(x) = |x|$ har $D_f = \mathbb{R}$.
- Funksjonsuttrykket

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

gir ikke mening når $x = 0$ (når nevneren er lik 0), dermed er $D_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (leses '$\mathbb{R}$ tatt vekk 0').

$\blacksquare$

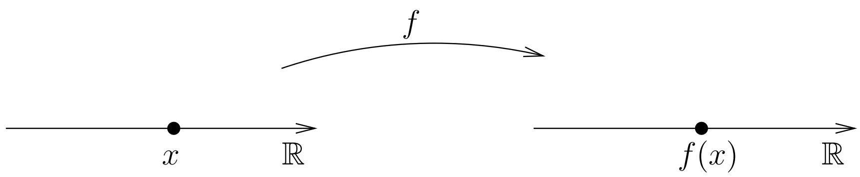
Alle funksjoner vi skal studere er reelle, dvs. at funksjonsverdiene er reelle. Vi sier at 'f går fra D_f inn i $\mathbb{R}$' og skriver

$$f\colon D_f \to \mathbb{R}.$$

Hvis $D_f = \mathbb{R}$ skriver vi dermed

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

som kan illustreres slik



Vi oppsummerer noen begreper som sier noe om en funksjons oppførsel:

- *Verdimengden* til en funksjon f er mengden av alle funksjonsverdiene til f. Mengden betegnes V_f.
- *Grafen* til en funksjon $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ er mengden av alle punkter $(x, f(x))$ i planet der x gjennomløper D_f. Den store fordelen med grafisk kalkulator er at vi raskt kan få en følelse av hvordan funksjonen oppfører seg ved å tegne grafen.
- *Nullpunkt(ene)* til funksjonen f finner vi ved å løse likningen $f(x) = 0$. Dette er punktene der grafen skjærer x-aksen. Når vi har funnet nullpunktene, kan vi så finne ut hvor funksjonen er *positiv* og hvor den er *negativ*, dvs. drøfting av fortegn for ulike uttrykk, noe vi kan!
- En funksjon f er *kontinuerlig* i et punkt $a \in D_f$ hvis grafen til f 'henger sammen' i punktet $(a, f(a))$. Hvis f er kontinuerlig for alle punkter $a \in D_f$ sier vi at f er kontinuerlig.

Eksempel 5.5 En generell andregradsfunkjon er gitt ved formelen $f(x) = ax^2 + bx + c$ der $a \neq 0$. Nullpunktene til en slik funksjon er altså gitt ved *abc*-formelen! Grafen til en andregradsfunksjon har et eget navn: en *parabel*. Som vi vet har vi tre muligheter (tegn tegning!):

- To nullpunkter: funksjonen er både positiv og negativ (hvor den er positiv og negativ får ved å tegne fortegnsskjema), dvs. at parabelen svinger seg både over og under x-aksen.

- Ett nullpunkt: funksjonen er null i ett punkt, ellers bare positiv eller bare negativ. Grafen holder seg enten over eller under x-aksen og berører x-aksen i ett punkt.

- Ingen nullpunkter: grafen treffer aldri x-aksen, og holder seg på den ene eller andre siden (enten bare positiv eller bare negativ).

■

Eksempel 5.6 La $f(x) = x^2 - 8x + 7$. Vi tegnet fortegnskjemaet til dette (funksjons)uttrykket i Eksempel 3.7. Fra dette skjemaet ser vi at f har nullpunkter for $x = 1$ og $x = 7$, f er strengt positiv for $x \in (-\infty, 1)$ og for $x \in (7, \infty)$, og f er strengt negativ for $x \in (1, 7)$. ■

Vi skal se flere eksempler på funksjoner på forelesning og det fins mange eksperimenterende oppgaver i dette heftet. Selv om du har møtt en del av disse funksjonene før, prøv å bli enda bedre kjent med dem! Vi skal nå konsentrere oss om å *derivere* funksjoner. Dette er et meget nyttig verktøy å ha med seg.

Kapittel 6

Lørdag

6.1 Derivasjon

Du har møtt mange ulike funksjoner i skolematematikken. Disse kan tenkes å beskrive ulike fenomener. Et sentralt begrep som fort dukker opp når vi studerer et fenomen er *forandring*. Hvordan oppfører funksjonen seg; når vokser den, når avtar den, hvor fort vokser/avtar den osv. (Alt forandres jo hele tiden, for eksempel inntekter, nedbørsmengder, aksjekurser og sukkerinnholdet i blodet.)

Matematikerne har funnet en måte å måle forandring på: Til hver funksjon finner vi en annen funksjon, kalt *den deriverte funksjonen*, som nettopp sier noe om hvordan vår opprinnelige funksjon oppfører seg.

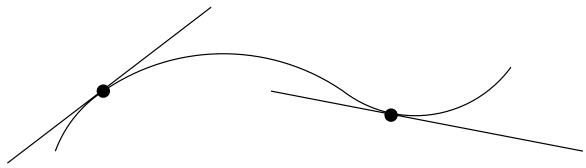
Hvordan finner vi denne deriverte funksjonen? Jo, vi tar først utgangspunkt i en lineær funksjon, der grafen er en rett linje. Forandringen til en lineær funksjon har vi allerede møtt: Funksjonsverdiene til en linje forandrer seg like mye hele tiden. En linje stiger/avtar jevnt, og forandringen er gitt ved stigningstallet til linjen.

Hvordan finner vi så forandringen til en funksjon som ikke vokser/avtar jevnt, altså når grafen krummer? Siden forandringen vil variere fra punkt til punkt, er vi interessert i å finne forandringen i et bestemt punkt. Da snakker vi om den *momentane forandringen* (i punktet).

Vi tar nå en funksjon f, og konsentrerer oss om et punkt $(x, f(x))$, der

$x \in D_f$. (At vi har med 'der $x \in D_f$' betyr bare at funksjonen må være definert i punktet for at vi i det hele tatt skal være interessert i punktet.)

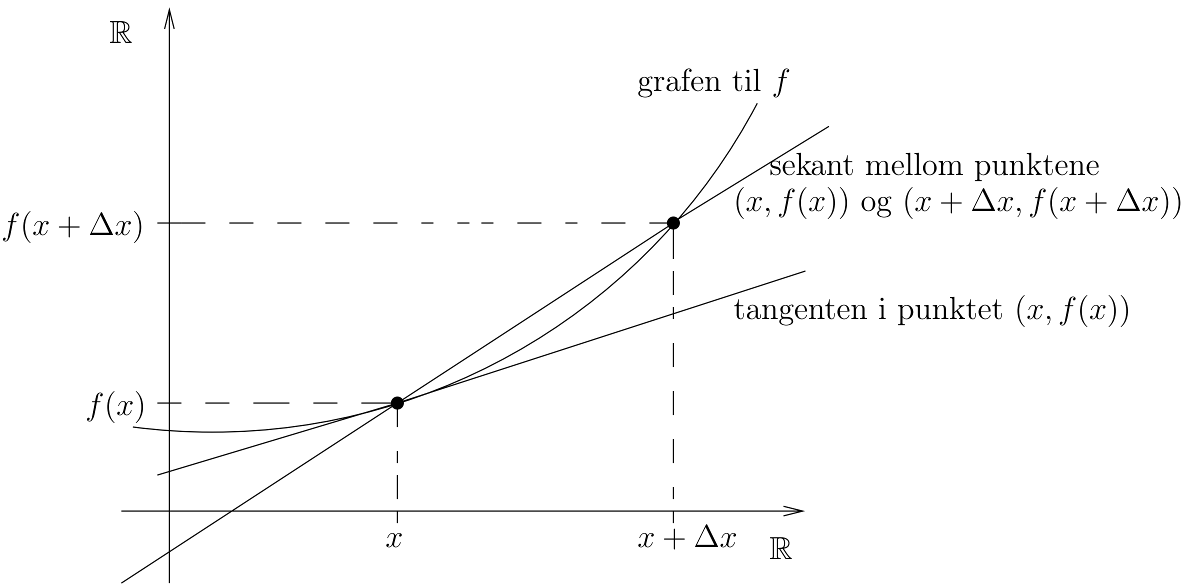
Den momentane forandringen i dette punktet kan vi måle ved å finne *tangenten* til grafen i dette punktet. Tangenten i et punkt er den rette linja som kun berører punktet og ingen andre punkter på grafen 'i umiddelbar nærhet':



Stigningstallet til tangenten vil jo være et supert mål på den momentane forandringen! Vi kan mye om rette linjer, men hvordan får vi tak i stigningstallet til tangenten i et punkt?

Hvis vi har en rett linje som går gjennom to punkter, kan vi regne ut stigningstallet, så dermed tar vi med et punkt til. Vi ser på to punkter på grafen til f, punktet $(x, f(x))$ som vi er ekstra interesserte i, og i tillegg punktet $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$. (I matematikken brukes Δx for en liten størrelse, dvs. at $x + \Delta x$ er størrelsen x pluss et liiite tillegg, som betyr at disse to punktene ligger veldig nærme hverandre.)

Hvis vi trekker den rette linja gjennom to punkter på grafen har vi en såkalt *sekant* til grafen. Vi trekker linja gjennom punktene $(x, f(x))$ og $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$. Det gir følgende tegning:



Stigningstallet til denne sekanten er uttrykket

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{6.1}$$

Matematisk får vi tak i stigningstallet til tangenten ved å la Δx bli mindre og mindre: Da vil punktet $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ nærme seg punktet $(x, f(x))$, og stigningstallet til sekanten vil nærme seg stigningstallet til tangenten. Vi sier at vi ser på 'grenseverdien av uttrykket (6.1) når Δx går mot 0', og vi skriver

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Hvis denne grenseverdien eksisterer, sier vi at f er *deriverbar* i x, og kaller grenseverdien *den deriverte til* f *i* x, skrevet $f'(x)$.

Vi har altså

$$\boxed{f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},} \tag{6.2}$$

som gir oss (Viktig!) stigningstallet til tangenten til grafen til f i punktet $(x, f(x))$.

Generelt må vi være ganske nøye når vi regner med grenseverdier (grenseverdi er et ganske subtilt begrep), men de grenseverdiene vi foreløpig skal møte vil være såpass pene at vi kan regne dem ut ved å 'sette Δx lik 0'.

La oss se om (6.2) passer med vår intuisjon:

Eksempel 6.1 Se på funksjonen $f(x) = 2$, dvs. funksjonen som er konstant lik 2. Den burde ha forandring lik 0 i alle punkter. Vi setter inn i (6.2) og regner ut forandringen i et punkt x:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 - 2}{\Delta x} = 0,$$

så matematikken passer med det vi forventer. ■

Generelt vil de konstante funksjonene være nøyaktig de funksjonene her i verden som har null forandring.

For en lineær funksjon $f(x) = ax + b$, forventer vi at $f'(x) = a$, som er stigningstallet til linja. Og ganske riktig, hvis vi setter inn en lineær funksjon i (6.2), kan vi regne ut at det stemmer (vi ser at vi må kunne regnereglene for å kunne derivere for å kunne regne ut forandringer):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x + \Delta x) + b - (ax + b)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} \\ &= a. \end{aligned}$$

Ved å sette inn i (6.2) og regne, kan vi mer generelt finne blant annet følgende deriverte funksjoner (noen er litt vanskeligere å finne enn andre, og vi kommer langt ved rett og slett å huske disse formlene):

1) $(a)' = 0$ der $a \in \mathbb{R}$

2) $(x^r)' = rx^{r-1}$

3) $(e^x)' = e^x$

4) $(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0, \ a \in \mathbb{R}$

5) $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$

Vi ser for eksempel at den deriverte funksjonen til en andregradsfunksjon, $f(x) = ax^2 + bx + c$, er gitt ved

$$f'(x) = 2ax + b,$$

dvs. en lineær funksjon!

Videre sier regelene 3)-5) oss hvorfor e^x og $\ln x$ er våre favoritter når det gjelder eksponential- og logaritmefunksjoner: De deriverte funksjonene til e^x og $\ln x$ er ekstra 'pene'.

I regel 2) kan r være et reelt tall, for eksempel en brøk:

Eksempel 6.2 Den deriverte funksjonen til

$$f(x) = \sqrt[4]{x}, \quad x \geq 0$$

er

$$f'(x) = (\sqrt[4]{x})' = (x^{\frac{1}{4}})' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

for $x > 0$. For $x = 0$ eksisterer ikke den deriverte. ■

La nå funksjonene f og g være deriverbare i punktet x. Da har vi følgende

derivasjonsregler:

- Derivere en funksjon multiplisert med en konstant, $a \in \mathbb{R}$:

$$(af)'(x) = a \cdot f'(x)$$

- Derivere en sum: $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- Derivere en differanse: $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
- Derivere et produkt (*produktregelen*):

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

- Derivere en brøk (*kvotientregelen*):

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}, \quad g(x) \neq 0$$

- Derivere en sammensatt funksjon (*kjerneregelen*):
  Hvis $h(x) = f(g(x))$ og f i tillegg er deriverbar i $g(x)$, er

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Eksempel 6.3 Vi kan bruke brøkregelen og finne den deriverte funksjonen til $\frac{4x-1}{x^2}$:

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{4x-1}{x^2}\right)' &= \tfrac{x^2 \cdot 4 - 2x(4x-1)}{(x^2)^2} \\ &= \tfrac{4x^2 - 8x^2 + 2x}{x^4} \\ &= \tfrac{-4x^2+2x}{x^4} \\ &= \tfrac{2-4x}{x^3}. \end{aligned}$$

■

Vi tar et eksempel med en *sammensatt* funksjon:

Eksempel 6.4 La funksjonen h være gitt ved

$$h(x) = e^{\sqrt{x}}.$$

Vi vil derivere h. Da observerer vi først at h er satt sammen av to funksjoner; eksponentialfunksjonen e^x og rotfunksjonen $\sqrt{x}$, der rotfunksjonen er *kjernen* i eksponentialfunksjonen. Hvis vi skriver

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ g(x) &= \sqrt{x}, \end{aligned}$$

er

$$h(x) = f(g(x)) = e^{\sqrt{x}}.$$

Ved å bruke kjerneregelen får vi dermed at

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Vi skal altså først derivere f med hensyn på $g(x)$. Dette gjøres ved å deriverer f og beholde $g(x)$ som variabel. Siden $(e^x)' = e^x$, er

$$f'(g(x)) = e^{\sqrt{x}}.$$

Hvis vi deriverer g får vi

$$g'(x) = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

så

$$h'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}.$$

■

Vi får ofte bruk for å kombinere ulike derivasjonsregler:

Eksempel 6.5 Vi vil derivere funksjonen f gitt ved

$$f(x) = x\ln(x^2).$$

Denne funksjonen er et produkt av to funksjoner der den ene funksjonen er en sammensatt funksjon. Det betyr at vi må bruke både produktregelen og kjerneregelen. Her vil vi trenge kjerneregelen for å derivere den ene av funksjonene i et produkt, og dermed starter vi med produktregelen, og bruker kjerneregelen underveis. Vi får dermed

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x\ln(x^2))' \\ &= x(\ln(x^2))' + 1\cdot\ln(x^2) \\ &= x\cdot\tfrac{1}{x^2}\cdot 2x + \ln(x^2) \\ &= 2+\ln(x^2). \end{aligned}$$

■

6.2 Drøfting av funksjoner

Å finne ut hvor en funksjon vokser og avtar, kalles gjerne å finne *monotoniegenskapene* til funksjonen. Det er akkurat dette vi bruker den deriverte funksjonen til.

Vi sier at en funksjon *vokser/avtar* på et intervall hvis funksjonsverdiene øker/avtar på intervallet.

- Når $f'(x)$ er positiv har f positiv forandring, dvs. funksjonsverdiene øker, så f vokser.
- Når $f'(x)$ er negativ, avtar funksjonsverdiene, dvs. f avtar.
- Når $f'(a) = 0$ i et punkt $x = a$ vil det si at funksjonen ikke forandres akkurat i dette punktet, som vil si at tangenten har stigningstall lik 0, og at f dermed har et mulig *topp-* eller *bunnpunkt* her (vi sier gjerne at funksjonen både vokser og avtar i et slikt punkt). Hvis den deriverte skifter fortegn i punktet, vil vi ha et topp- eller bunnpunkt her. Dette gjelder også for punkter der den deriverte ikke eksisterer, men skifter fortegn.

Vi oppsummerer dette i et eksempel:

Eksempel 6.6 La oss studere funksjonen f gitt ved

$$f(x) = (x-2)(x-4)(x+1) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8.$$

Denne funksjonen er en tredjegradsfunksjon der funksjonsuttrykket kan faktoriseres i tre lineære faktorer. Ved å drøfte fortegnet til $f(x)$, finner vi hvor funksjonen er positiv og negativ. Videre kan vi finne monotoniegenskapene til funksjonen ved å drøfte fortegnet til den deriverte som er

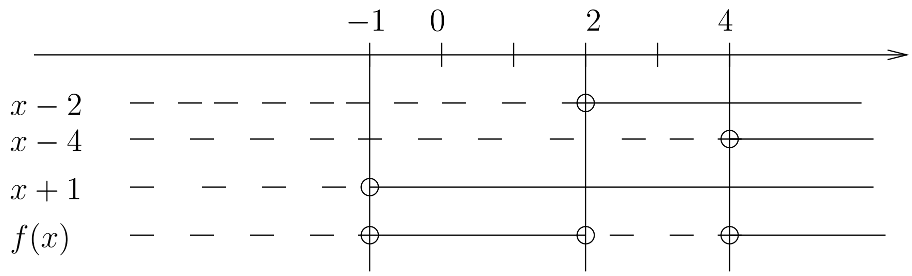
$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 2.$$

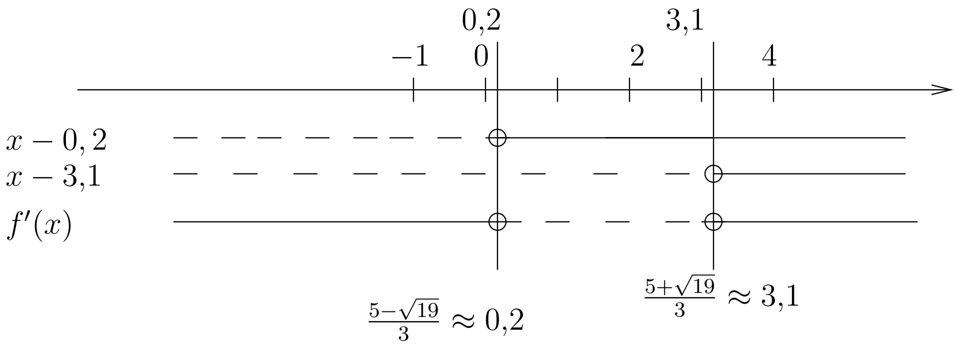
Før vi drøfter, finner vi ut hvor $f'(x) = 0$ ved å bruke *abc*-formelen (sjekk utregningene):

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 24}}{6} = \frac{10 \pm 4 \cdot 19}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{19}}{3},$$

som gir $x \approx 3{,}1$ og $x \approx 0{,}2$.

Vi tegner fortegnskjemaer:

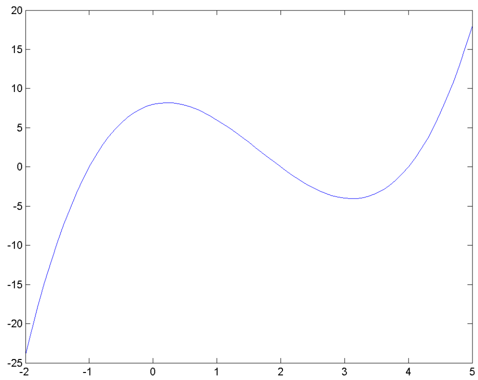




Vi ser at funksjonen har nullpunkter for $x = -1$, $x = 2$ og $x = 4$, $f(x)$ er positiv for $x \in [-1, 2]$ og for $x \in [4, \infty)$, og negativ for $x \in (-\infty, -1]$ og for $x \in [2, 4]$.

Videre ser vi at funksjonen vokser for $x \in (-\infty, \frac{5-\sqrt{19}}{3}]$ og for $x \in [\frac{5+\sqrt{19}}{3}, \infty)$, og avtar for $x \in [\frac{5-\sqrt{19}}{3}, \frac{5+\sqrt{19}}{3}]$. Funksjonen f har et toppunkt for $x = \frac{5-\sqrt{19}}{3}$ siden den deriverte skifter fra å være positiv til å bli negativ her, mens den har et bunnpunkt for $x = \frac{5+\sqrt{19}}{3}$ siden den deriverte skifter fra å være negativ til å bli positiv her.

Her er grafen til f for $x \in [-2, 5]$ tegnet med programmet MATLAB (for å orientere seg i utskrifter fra ulike programmer, er det alltid lurt å finne origo først):

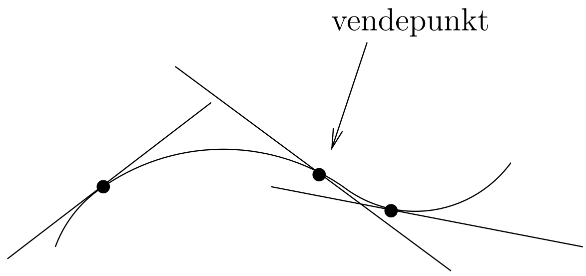


$\blacksquare$

Vi bruker altså rette linjer/tangenter for å si noe om hvor en funksjon vokser/avtar. I tillegg vil det være nyttig å si noe om *krumningen* til en funksjon.

Vi sier at en funksjon er *konveks* på et intervall hvis den hule siden vender opp, og *konkav* hvis den hule siden vender ned:

Krumningen kan vi måle ved å se hvordan tangenten endrer oppførsel: For de x-verdiene der f er konveks ligger tangenten i disse punktene under grafen (i umiddelbar nærhet av punktet), og når f er konkav ligger tangenten over grafen (i umiddelbar nærhet av punktet). Et punkt der tangenten ligger både over og under grafen kalles et *vendepunkt*:



Matematisk skal vi altså se på forandringen av den deriverte; dvs. den deriverte funksjonen av den deriverte funksjonen, $(f'(x))'$, gjerne kalt den *dobbeltderiverte*, skrevet $f''(x)$:

- f er konveks når $f''(x) \geq 0$, dvs. grafen smiler når den dobbeltderiverte er positiv.
- f er konkav når $f''(x) \leq 0$.
- f har et vendepunkt i $(a, f(a))$ hvis $f''(a) = 0$, eller hvis $f''(a)$ ikke eksistere. I tillegg må den dobbeltderiverte skifte fortegn her.

Eksempel 6.7 Funksjonen f i Eksempel 6.6 har derivert funksjon gitt ved

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 2,$$

og dermed

$$f''(x) = 6x - 10 = 6(x - \tfrac{5}{3}).$$

Uttrykket for den dobbeltderiverte er positivt for $x \geq \frac{5}{3}$, dvs. f er konveks for disse x-verdiene. Funksjonen er konkav for $x \leq \frac{5}{3}$ og har et vendepunkt for $x = \frac{5}{3}$ (sjekk av dette kan stemme med grafen vi tegnet i Eksempel 6.6). ■

Tillegg A

Oppgaver

Oppgavene er nummerert 'A.kapittelnummer.løpenummer-i-hvert-kapittel'.

A.1 Kapittel 1

Oppgave A.1.1 I hvilken samling av tall hører tallet $\sqrt{3}$ hjemme?

Oppgave A.1.2 I hvilken samling av tall hører tallet 0,1 hjemme? Og hva med tallene $-0{,}1$ og 0,11? Hva med $-0{,}11$?

Oppgave A.1.3 Tegn en tallinje og merk av tallene $0,\ 2,\ -3,\ \pi,\ \sqrt{2}$ og $\frac{5}{4}$.

Oppgave A.1.4 Forklar hvorfor desimaltall med endelig mange desimaler hører hjemme i $\mathbb{Q}$.

Oppgave A.1.5 Det finnes også desimaltall med uendelig mange desimaler som hører hjemme i $\mathbb{Q}$. Kan du finne noen slike?

Oppgave A.1.6 Skriv tallet på standardform.

a) 0,0017

b) 423

c) 1 674 000

d) 0,2

Oppgave A.1.7 Skriv uttrykkene enklere og spesifiser hvilke regneregler du bruker.

a) $14 - (3 + 10)$

b) $\frac{91}{21}$

c) $\frac{3}{5} + \frac{7}{15}$

d) $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{15}$

Oppgave A.1.8 I noen av brøkene mangler teller eller nevner. Fyll ut det som mangler.

a) $\frac{2}{3} = \frac{}{6}$

b) $\frac{1}{3} = \frac{5}{}$

c) $\frac{7}{5} = \frac{}{15}$

d) $\frac{3}{2} = \frac{}{8}$

e) $a = \frac{}{1}$

f) $a = \frac{}{2}$

g) $a = \frac{}{b}$

h) $a + 3 = \frac{}{5}$

Oppgave A.1.9 Regn ut følgende talluttrykk for hånd (uten kalkulator).

a) $5 \cdot 3 + \frac{4}{2}$

b) $\frac{16+4^2}{10+7-1}$

c) $\frac{2^5-2^4}{2\cdot(1+3)}$

d) $\sqrt[4]{8+8}$

e) $\sqrt[4]{81} - \sqrt[4]{16}$

f) $\frac{4^3-4^2}{10-3\cdot 2}$

g) $\frac{4(6+3)^2}{4\cdot 3^2}$

h) $\frac{(6\cdot 5)^2}{6^2\cdot 5} - 4$

i) $\sqrt{(2^2)^3 - 2^5 + 2^2}$

j) $\frac{3+21}{3}$

k) $\sqrt{8+\sqrt{64}}$

l) $\frac{\frac{16}{2}}{\frac{4}{2}+\frac{6}{3}}$

Oppgave A.1.10 Finn tallene uten bruk av kalkulator.

a) $\sqrt{100}$

b) $\sqrt[3]{125}$

c) $\sqrt[3]{-125}$

d) $4^{\frac{3}{2}}$

e) 5^{-3}

f) $16 \cdot (-16)^{-\frac{3}{4}}$

Oppgave A.1.11 Skriv uttrykkene enklere hvis det er mulig.

a) $8a - 3a + 2a$

b) $3\nabla - 7\nabla$

c) $21r + 62s - 14$

d) $a + b + c + d + e + f + g + 2a + 3b + 4c + 5d + 6e + 7f + 8g$
$- (9a + 10b + 11c + 12d + 13e + 14f + 15g)$

Oppgave A.1.12 Fyll ut det som mangler i teller og nevner.

a) $\frac{6ab}{2ab^2} = \frac{3}{}$

b) $\frac{27a^2b^3c^7f}{2gf} - \frac{14h}{g} = \frac{}{2g}$

Oppgave A.1.13 Forkort brøkene hvis det er mulig.

a) $\frac{12a}{5a}$

b) $\frac{a^2bc}{4a}$

c) $\frac{a^2bc}{bc}$

d) $\frac{x^5}{x^2}$

e) $\frac{x^2}{x^5}$

Oppgave A.1.14 Skriv som én brøk. Forkort svaret så mye som mulig.

a) $\frac{-5h}{j} - \frac{hs}{k}$

b) $\frac{jippi}{v} + \frac{hurra}{w}$

c) $\frac{4}{x-y} + \frac{5}{z}$

d) $\frac{i}{p} + \frac{q}{p+1}$

e) $\frac{kl}{rl} - \frac{ky}{ry}$

f) $\frac{a}{a-b} + \frac{b}{a+b}$

g) $\frac{3}{2a} - \frac{5}{2a} + \frac{1}{2a} + \frac{7}{2a}$

h) $\frac{7}{b} - \frac{3}{2b} - (\frac{5}{b} + \frac{1}{2})$

Oppgave A.1.15 Regn ut.

a) $\frac{x-2}{10} + \frac{x+4}{5}$

b) $\frac{2x+5}{3} - \frac{x+2}{5}$

c) $\frac{x}{6} - \frac{x+2}{10}$

d) $\frac{4-x}{x} + \frac{3}{2}$

e) $\frac{2}{2a} - \frac{4-2a}{4a}$

f) $\frac{a-2}{a^2} - \frac{1}{a}$

g) $\frac{c}{a^2 b} - \frac{1}{ac} + 3 + a$

h) $\frac{2-a}{b} - \frac{3-b}{a} + \frac{a^2+3b}{ab}$

Oppgave A.1.16 I uttrykkene er n et naturlig tall. Prøv å skrive uttrykkene enklere. Spesifiser hvilke regneregler du eventuelt bruker.

a) $n^5 \cdot n - n^6$

b) $\frac{n^3}{n^2} - n^2 - n \cdot n$

c) $\frac{n^3+1}{n^3}$

d) $\frac{n^3+2n}{1+2n}$

e) $\sqrt{4n} - 4\sqrt{n}$

f) $\left(\sqrt[3]{n}\right)^3 - \sqrt[3]{n^3}$

Oppgave A.1.17 Prøv å forklare hva vi mener med $(a^n)^m$. Forklar deretter hvorfor regneregelen $(a^n)^m = a^{nm}$ er riktig.

Oppgave A.1.18 Prøv å forklare hva vi mener med $(ab)^n$ og forklar hvorfor regelen $(ab)^n = a^n b^n$ er riktig.

Oppgave A.1.19 Sett felles faktor utenfor en parentes.

a) $ab + ac + ad$

b) $-f - g - h$

c) $a\Diamond + \nabla\Diamond - 9\Diamond$

d) $nxyz - pxwy + yrsx + 7xye$

e) $5a - a + ea - 6ua$

f) $gh - h + qh^2$

Oppgave A.1.20 Sett felles faktor utenfor en parentes (Hint: Det kan hende at den felles faktoren er en sum av to eller flere ledd).

a) $(a + b)c - (a + b)d$

b) $(g - h)(r - k) - (g - h)m$

c) $(r+s+t-u-v-w)l+(r+s+t-u-v-w)m-(r+s+t-u-v-w)npq$

Oppgave A.1.21 Sett felles faktor utenfor en parentes, og forkort brøken hvis det er mulig.

a) $\frac{ak+a(l+m)}{ab}$

b) $\frac{nz-zx}{n}$

c) $\frac{abc-1}{abc}$

d) $\frac{uva+uvb}{uvc}$

e) $\frac{e+e^4}{e^2}$

Oppgave A.1.22 Forklar hvorfor du må faktorisere før du kan forkorte en brøk.

Oppgave A.1.23 Løs likningene.

a) $3x = 12$

b) $2x - 20 = 4 - 4x$

c) $8x - 3 = 3x - 3$

d) $6(x - 5) = 7(x - 5)$

e) $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3} = 2 + \frac{x-3}{4}$

f) $x + \frac{3}{2} - \frac{2x-4}{3} = \frac{6-3x}{3}$

g) $\frac{1}{4}(3 - 4x) - \frac{1}{6}(4x - 3) = \frac{1}{3} - x$

Oppgave A.1.24 Løs likningene.

a) $17x + 3 = -14$

b) $3(x - 1) = 23$

c) $\frac{7}{5}x - \frac{13}{5} = 2$

d) $\frac{1}{x-3} = \frac{1}{4}$

Oppgave A.1.25 Løs likningene.

a) $3x - 3 - 4x = 5 - 3x$

b) $3x - 6 - 4x + 8 = 3 - 4x$

c) $3(x - 2) - 4(x - 2) = 3 - 4x$

Oppgave A.1.26 Skriv enklere (mest mulig uten kalkulator):

a) $\ln 1$

b) e^0

c) $\ln e$

d) e^1

e) $\ln e^2$

f) $e^{\ln 2+\ln 6}$

g) $\ln(\frac{1}{2})$

Oppgave A.1.27 Løs likningene.

a) $3^x = 2$

b) $e^x = 7$

c) $(\frac{1}{2})^x = 10$

Oppgave A.1.28 Skriv uttrykkene enklere.

a) $\ln(\frac{1}{a^3})$

b) $5\ln a^7 - \ln a$

c) $\ln(\sqrt{a})$

d) $e^{\ln a+\ln b^2}$

Oppgave A.1.29 Løs likningene.

a) $4\ln x - 2 = 0$

b) $\ln\sqrt{x} = 1$

c) $\ln(3x + 2) = 2$

d) $\ln(x^3) + 2\ln x = 5$

Oppgave A.1.30 Elisabeth tenker på et tall. Hun sier at dersom vi legger sammen dette tallet og det dobbelte av tallet, får vi 45. Hvilket tall tenker Elisabeth på?

Oppgave A.1.31 Didrik tenkte på et tall. Han delte tallet med 5 og la til 7. Da fikk han svaret 11. Hvilket tall tenkte han på?

Oppgave A.1.32 Summen av to hele tall som følger etter hverandre er 75. Hvilke tall er det?

Oppgave A.1.33 Olav har 370 kr, og Kristina har 110 kr. Hvor mye må Olav gi til Kristina for at Olav skal ha dobbelt så mye som Kristina?

Oppgave A.1.34 Din Ludo-frelste nabo gir deg beskjed om å skaffe ('vanlige') terninger med til sammen 147 prikker. Hvor mange terninger vil naboen at du skal skaffe?

Oppgave A.1.35 Ragnar, Yngvar, Jørg og Nils planlegger å handle klær sammen. Inne i en butikk finner Jørg og Nils 3 plagg hver, Ragnar finner ikke noe og Yngvar klarer ikke å bestemme seg, og tar derfor med y plagg inn i prøverommet. Hvor mange plagg har de funnet til sammen?

Ragnar kjeder seg mens de andre prøver klær. Etter en stund ber han om å få 2 plagg som Yngvar allerede har prøvd. Da blir Yngvar sur, og går for å hente ytterligere 7 plagg bare på trass. Hvor mange plagg har Yngvar inne i sitt prøverom nå? Hvor mange plagg har Yngvar prøvd til sammen i denne butikken?

Oppgave A.1.36 I en reklamekampanje sier sjokoladeprodusenten at hver gang du kjøper en 'Symfoni'-sjokolade får du to plater 'Dance'-sjokolade med på kjøpet. La S være antall plater 'Symfoni' du kjøper og la D være antall 'Dance' du får. Sett opp en likning som gir sammenhengen mellom S og D.

Hvis du har fått 80 plater 'Dance' med på kjøpet, hvor mange plater 'Symfoni' har du kjøpt da?

Oppgave A.1.37 I en skoleklasse er det x barn, der $x \geq 2$. En dag drar barna på geologisk ekspedisjon og plukker 5 små steiner hver som de legger i lærerens ryggsekk. Det er hull i sekken, og 7 steiner faller ut på veien tilbake til skolen. På skolen selger klassen steinene de har samlet til skolesamlingen for 130 kroner pr. stk. Pengene deler klassen og læreren likt, slik at læreren får like mye som hver elev. La P være pengemengden hver elev får, og lag en formel for P uttrykt ved x. Hvis hvert barn får 520 kroner, hvor mange barn er det i klassen da?

Oppgave A.1.38 Størrelsen R av et jordskjelv er på Richter-skalaen definert ved

$$R = 0{,}67 \lg(0{,}37E) + 1{,}46$$

der E er skjelvets energi målt i kWtimer.

a) Hvor stor energi har et skjelv som måles til 6,5 på Richter-skalaen (for eksempel jordskjelvet i Iran 26. desember 2003)?

b) Hva er forholdet mellom energiene i et skjelv på 7,5 og et på 6,5?

A.2 Kapittel 2

Oppgave A.2.1 Bestem eventuelle løsninger til likningene.

a) $5x^2 = 45$

b) $x^2 = 6x$

c) $x^2 - 2x - 8 = 0$

Oppgave A.2.2 Hvis vi til $x^2 + 10x$ adderer 5^2 får vi et fullstendig kvadrat fordi første kvadratsetning gir at $x^2 + 10x + 5^2 = (x + 5)^2$. Hva må du legge til uttrykkene nedenfor for å få et fullstendig kvadrat?

a) $a^2 + 6a$

b) $x^2 - 2x$

c) $x^2 + 20x$

d) $a^2 - 15a$

Oppgave A.2.3 Løs likningen ved å fullføre kvadratet.

a) $x^2 + 25 = 10x$

b) $x^2 + 5x + 6 = 0$

c) $x^2 - 2x - 15 = 0$

d) $x^2 + 9x + 8 = 0$

e) $5x^2 - 8x + 4 = 0$

Oppgave A.2.4 Bestem eventuelle løsninger til likningene. Gi eksakte svar (ikke desimaltall), og ikke bruk kalkulator.

a) $\frac{x+4}{x+1} + \frac{x+2}{x} = \frac{3}{x^2+x}$

b) $\frac{x}{2x-1} - \frac{1}{x} = 0$

Oppgave A.2.5 Finn sidene i et kvadrat når arealet er

a) 9 m^2

b) 10 dm^2

c) 0,16 km^2

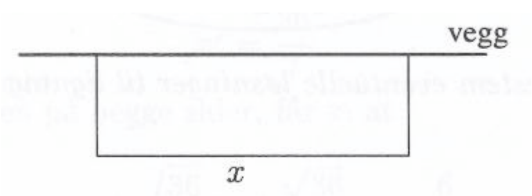
Oppgave A.2.6 Hvor mye øker siden i et kvadrat når arealet

a) øker fra 4 m^2 til 5 m^2?

b) øker fra 25 m^2 til 26 m^2?

Oppgave A.2.7 Din svigerfar Maximillian ber deg gjerde inn et rektangulært område på 28 m^2, der en del av låveveggen skal utgjøre den ene siden i området. Låveveggen er 7,5 meter lang.

Den lengste siden i rektangelet skal være parallell med låveveggen, og den skal være x meter, se Figur 1. Du har 15 meter netting til rådighet. Finn x.



Figur 1: Tegning du får av din svigerfar

Oppgave A.2.8 Kvadratet av Elins alder er lik 18 ganger alderen hennes lagt til alderen til hennes bestemor Agda. Bestemor Agda er 63 år. Hvor gammel er Elin?

Oppgave A.2.9 Du er ett år yngre enn kjæresten din. Produktet av din alder og din kjærestes alder er 756. Hvor gammel er du?

Oppgave A.2.10 Du mener at dersom x multiplisert med $x + 17$ er lik 200, må x være et positivt tall. Moren din mener at x godt kan være et negativt tall. Hvem har rett?

Oppgave A.2.11 Kan summen av kvadratet av et reelt tall og 8 ganger tallet bli lik -17? Begrunn svaret.

Oppgave A.2.12 Kan fire ganger et tall minus kvadratet av tallet bli lik 5? Begrunn svaret.

Oppgave A.2.13 Faktoriser uttrykkene hvis det er mulig.

a) $5x^2 - 45$

b) $x^2 - 6x$

c) $x^2 - 2x - 8$

d) $x^2 + 25 - 10x$

Oppgave A.2.14 Faktoriser uttrykkene hvis det er mulig.

a) $3x^2 - 9x + 6$

b) $2x^2 + 32x + 30$

c) $-x^3 + 2x^2 + 8x$

d) $-x^3 + 5x^2 + 4x - 20$ (Hint: $(x - 2)$ er en faktor.)

Oppgave A.2.15 Forkort brøkene hvis det er mulig.

a) $\frac{x^2-8x+7}{x^2-1}$

b) $\frac{2w^2-3w-2}{2w-4}$

c) $\frac{z^2+6z+5}{z^2+2z+1}$

d) $\frac{2y^2-3y-2}{y^2+6y+5}$

Oppgave A.2.16 Faktoriser følgende uttrykk ved å bruke en av kvadratsetningene. Du skal ikke løse den tilhørende andregradslikningen først.

a) $x^2 + 4x + 4$

b) $3x^2 + 12x + 12$

c) $k^2 - 16$

d) $mlpg^2 - 9mlp$

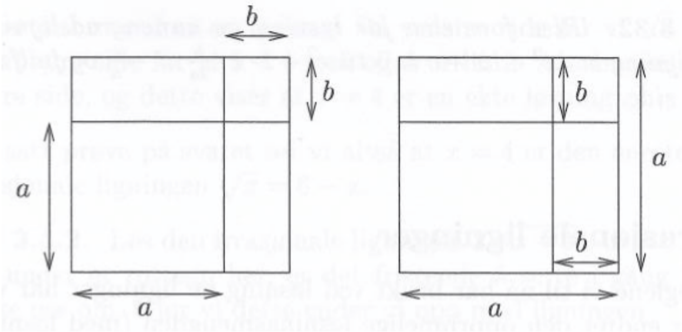
e) $4h^2 - 4th + t^2$

f) $7s^2q^2 - 14sqnv + 7n^2v^2$

Oppgave A.2.17 Når vi lar a og b være lengdene til to linjestykker, kan kvadratsetningene illustreres geometrisk.

a) Finn de kvadratene på figuren til venstre i Figur 2 som har arealene a^2, b^2 og ab. Bruk dette til å forklare hvorfor $(a+b)^2$ er lik $a^2+2ab+b^2$.

b) Bruk figuren til høyre i Figur 2 til å forklare hvorfor $(a-b)^2$ er lik $a^2-2ab+b^2$.



Figur 2: Illustrasjon for å forklare kvadratsetningene geometrisk

c) Bruk figuren til høyre i Figur 2 til å forklare tredje kvadratsetning.

Oppgave A.2.18 La a og b være reelle tall. Utled en formel for $(a+b)^3$ på samme måte som vi utledet første kvadratsetning.

Oppgave A.2.19 La a og b være reelle tall. Utled en formel for $(a-b)^3$.

Oppgave A.2.20 Tenk på et reelt tall. Gang det med 3, og legg til 12. Deretter deler du svaret på 3, og trekker fra tallet du tenkte på. Hvorfor blir svaret alltid 4?

Oppgave A.2.21 Utled formelen for løsning av en generell andregradslikning. (Hint: Skriv om likningen $ax^2+bx+c=0$ til $x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{c}{a}=0$ og fullfør kvadratet.)

Oppgave A.2.22 Løs likningene.

a) $2\sqrt{x}=2x-12$

b) $\sqrt{x-1} = 3 - x$

c) $x + 2\sqrt{x} = 8$

Oppgave A.2.23 Løs likningen $\sqrt{y^2 - 13} + \sqrt{y^2 - 24} = 11$. (Hint: Du må kvadrere to ganger.)

Oppgave A.2.24 Løs likningen $x + 2 - \sqrt{4x + 13} = 0$.

Oppgave A.2.25 Løs likningen $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1} = 2$.

Oppgave A.2.26 To av dine venner har vært på konsert på John Dee. På scenen stod det berømte bandet All Friday. Det var trengsel foran scenen, og dine venner kom bort fra hverandre. Da de etter konserten møttes på avtalt sted, oppstod en diskusjon om hvem av dem som hadde vært nærmest bandmedlemmet El Thoro. Venn A hadde avstand d_1 fra El Thoro, og venn B hadde avstand d_2 fra den tøffe nordmannen. Etter mye grubling fant de ut at avstandene passet inn i følgende likning:

$$\sqrt{d_1^2 - 144} + \sqrt{d_2^2 - 12^2} = 21$$

Øystein har observert dem begge under konserten, og vet at $d_1 - d_2 = 7$. Finn d_1 og d_2.

A.3 Kapittel 3

Oppgave A.3.1 Løs ulikhetene.

a) $2x + 4 > x + 6$

b) $2x - 4 > 3 - 2x + 6$

c) $x - 4(3 - 2x) > 2(x - 3)$

d) $-2x - 2(2 + x) \geq \frac{1}{3}(2x - 3)$

e) $\frac{1}{4}x + 3 > 2x - 6 + \frac{1}{2}x$

Oppgave A.3.2 Løs ulikhetene ved å bruke fortegnsskjema.

a) $(x-2)(x-4) < 0$

b) $(2-x)(x+3) > 0$

c) $3x^2 + 13x + 4 > 0$

d) $4x - x^2 > 0$

Oppgave A.3.3 For hvilke x er uttrykkene nedenfor positive? For hvilke x er uttrykkene negative?

a) $x^2 + 7$

b) $(3-x)(x+1) - 6$

c) $x^2 - 8x + 17$

Oppgave A.3.4 Løs ulikhetene ved å bruke fortegnsskjema.

a) $2x(x-4)(x+3) < 0$

b) $(2x-3)(x+1)(x-3) < 0$

c) $(1-x)(x-2)(3+x) < 0$

Oppgave A.3.5 Veksten i en familie bakterier av typen *Fotus soppus* er ved tiden x gitt ved uttrykket $x^4 + 2x^3 - 15x^2$. Når veksten er negativ, avtar antall bakterier i familien. Når er antall bakterier økende?

Oppgave A.3.6 Hvorfor har brøken $\frac{x-a}{x-b}$ samme fortegn som produktet $(x-a)(x-b)$?

Oppgave A.3.7 Løs ulikhetene ved å bruke fortegnsskjema.

a) $\frac{x(x-3)}{(x-2)(x+4)} < 0$

b) $\frac{(1-x)(1+2x)}{x-3} > 0$

c) $\frac{3x-4}{x-2} > 1$

d) $\frac{2x+6}{x-1} > 1$

e) $\frac{2x+1}{x-1} > \frac{x-6}{x-1}$

Oppgave A.3.8 Finn noen punkter i xy-planet som passer inn i likningene, og sett dem opp i en tabell. Tegn dem inn i et passende koordinatsystem, og tegn linja.

a) $y = 4x - 6$

b) $3y = 6x + 9$

c) $y = -x - 1$

d) $13y = 65x - 650$

Oppgave A.3.9 Finn likningen til linja som går gjennom punktet (x, y) og som har stigningstall a. Tegn linjene i et passende koordinasystem.

a) $a = 5$, $(x, y) = (-2, 4)$

b) $a = -1$, $(x, y) = (5\pi, 3)$

c) $a = 0$, $(x, y) = (1\ 000\ 000, b)$

Oppgave A.3.10 Finn likningen til linja gjennom de to punktene, og tegn den inn i et passende koordinatsystem.

a) $(2, 5)$ og $(-3, 6)$

b) $(-2, 3)$ og (t, u)

c) $(0, m)$ og $(n, 0)$

Oppgave A.3.11 Tegn de to linjene $y = 4x - 6$ og $y = -x - 1$ i samme koordinatsystem. Finn koordinatene til skjæringspunktet. Gi eksakte svar (ikke desimaltall). Sjekk med tegningen om du har regnet riktig.

Oppgave A.3.12 Finn skjæringspunktet mellom linja med stigningstall 5 og som går gjennom punktet $(-2, 4)$, og linja med likning $y = 2x + 3$. Gi eksakte svar (ikke desimaltall). Tegn figur, og sjekk om du har regnet riktig.

Oppgave A.3.13 Du skal løse likningssystemene nedenfor både grafisk og ved utregning. Du kan velge om du vil skrive om likningene slik at y står alene på den ene siden av likhetstegnet før du begynner, eller om du vil bruke metoden med å trekke den ene likningen fra den andre direkte. Skriv ned hvilken metode du bruker, og tenk over hvorfor det du gjør er 'tillatt'.

a) $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ -2x + 3y = -7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 6y = 3 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$

Oppgave A.3.14 Et område i xy-planet er avgrenset av linjene gitt ved likningene $x = -1$, $3x + 2y = 6$ og $y - x = -3$. Tegn linjene og skravér området. Finn koordinatene til hjørnene.

Oppgave A.3.15 Følgende ulikheter bestemmer et trekantformet område i xy-planet:

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y \leq 2$$

Skravér området, og finn koordinatene til områdets hjørner.

Oppgave A.3.16 Hva kaller vi to linjer som har samme stigningstall? (Hint: Tegn en figur, og si det første som faller deg inn.)

Oppgave A.3.17 Kan to parallelle linjer skjære hverandre? Hvorfor/hvorfor ikke?

Oppgave A.3.18 Kan to linjer skjære hverandre i flere enn et punkt? I så fall, hvor mange?

Oppgave A.3.19 Du har to linjer $y_1 = a_1x + b_1$ og $y_2 = a_2x + b_2$. Hva er kriteriene på a_1, a_2, b_1 og b_2 for at linjene skal skjære hverandre i nøyaktig ett punkt?

Oppgave A.3.20 Vi skal sette sammen et måltid som består av x gram potetgull og y gram kanel. Måltidet skal inneholde

- 920 kcal
- 40 gram fett

Ett gram av potetgullet vi bruker inneholder 0,4 gram fett, og 9 kcal. Ett gram kanel inneholder ikke noe fett, men 4 kcal. Kravene til måltidet gir følgende likninger og ulikheter:

$$\begin{aligned}
&9x + 4y = 920 \qquad \text{(Energi)}\\
&0{,}4x = 40 \qquad \text{(Fett)}\\
&x \geq 0\\
&y \geq 0
\end{aligned}$$

Hvorfor?
Et måltid kan vi nå tenke på som et punkt i xy-planet. Hvor mange gram potetgull og hvor mange gram kanel må vi spise for at måltidet skal tilfredsstille kravene?

Oppgave A.3.21 Finn absoluttverdiene til tallene $-5{,}21$ og $567{,}43$.

Oppgave A.3.22 Løs likningene.

a) $|x| = 10$

b) $|x + 2| = 3$

c) $|x - 4| = 6$

d) $|x + 5| = 5$

Oppgave A.3.23 Bruk avstandstolkningen av absoluttverdi (vi tolker $|a-b|$ som avstanden mellom a og b) til å løse likningen

$$|x + 5| + 3 = |x + 2|.$$

Oppgave A.3.24 Bruk avstandstolkningen av absoluttverdi til å løse likningen

$$|x-5|+10=|x+5|.$$

Oppgave A.3.25 (Vanskelig.) Vi generaliserer de to foregående oppgavene: La a og b være positive reelle tall, der $b>a$. For hvilke x er

$$|x-a|+(b-a)=|x-b|?$$

Oppgave A.3.26 Løs ulikhetene.

a) $|x-2|<5$

b) $|x-2|>5$

c) $|x-1|<4$

d) $|x+2|>3$

e) $|x+3|>7$

f) $|x-a|<b$ der a er et vilkårlig reelt tall og b er et positivt reelt tall.

g) $|x-a|>b$ der a er et vilkårlig reelt tall og b er et positivt reelt tall.

Oppgave A.3.27 For hvilke reelle tall x er

a) $x<|x|$?

b) $|x|\leq x$?

c) $|x|<x$?

Oppgave A.3.28 La x og y være tall slik at $|x|=3$ og $|y|=4$. Hva kan du si om

a) xy?

b) $\frac{x}{y}$?

c) $x+y$?

d) $x - y$?

Oppgave A.3.29 I denne oppgaven er a, b, c, d, e og f reelle tall.

a) Hva kan du si om a hvis du vet at $|a| > 7$?

b) Hva kan du si om b hvis du vet at $|b| < 9$?

c) Hva kan du si om c hvis du vet at $|c - 2| < 4$?

d) Hva kan du si om d hvis du vet at $|d + 1| > k$ der k er et positivt reelt tall?

e) Hva kan du si om e hvis du vet at $|e + l| < 17$ der l er et positivt reelt tall?

f) Hva kan du si om f hvis du vet at $|f - m| \leq 0$ der m er et reelt tall?

Oppgave A.3.30 For hvilke reelle tall y er $(|y|)^2 = y^2$?

Oppgave A.3.31 For hvilke reelle tall z er $(|z|)^2 > z^2$?

A.4 Kapittel 4

Oppgave A.4.1 Finn en retningsvektor til linja gitt ved

a) $y = x$

b) $y = 2x$

c) $2y = x + 3$

Oppgave A.4.2 Hvilke av disse linjene er parallelle med vektoren $[2, 3]$. Begrunn.

a) $y = \frac{3}{2}x + 1$

b) $y = \frac{2}{3}x + 1$

c) $4x - 6y = 3$

d) $4x + 6y = 2$

e) $\frac{2}{3}y = x$

Oppgave A.4.3 For hver av linjene i forrige oppgave:

a) Skriv linja på vektorform.

b) Finn en parameterfremstilling for linja.

Oppgave A.4.4 Er

$$[x, y] = [0, 1] + r[1, 2]$$

og

$$[x, y] = [-1, -1] + s[\tfrac{1}{2}, 1]$$

to vektorformer av den samme linja? Hvorfor/hvorfor ikke?

Oppgave A.4.5 Tegn en sirkel og del den opp i like store 'kakestykker'. Finn ut hvor mange kakestykker du trenger for at hvert av dem skal danne en vinkel på v grader, når

a) $v = 180$

b) $v = 90$

c) $v = 45$

d) $v = 22{,}5$

e) $v = 60$

f) $v = 30$

g) $v = 15$

Oppgave A.4.6 Beregn areal og omkrets av områdene i planet.

a) Rektangel med grunnlinje 5 og høyde 3.

b) Rektangel med høyde l og grunnlinje m.

c) Kvadrat med sidelengde 7.

d) Kvadrat med sidelengde s.

e) Sirkel med diameter 4.

f) Sirkel med radius 4.

Oppgave A.4.7 Hva er omkretsen til en sirkel med areal 16π?

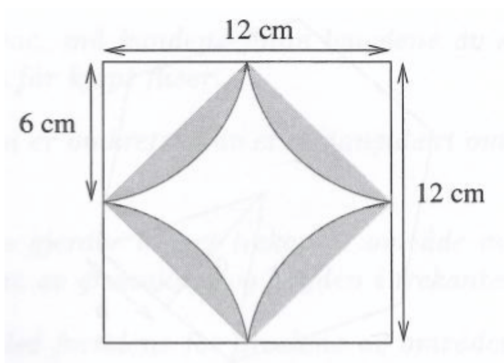
Oppgave A.4.8 Hva er radien til en sirkel med diameter Δ?

Oppgave A.4.9 Hva er arealet til en sirkel med omkrets $k\pi$ der k er et positivt reelt tall?

Oppgave A.4.10 Hva er omkretsen til en sirkel med radius 1?

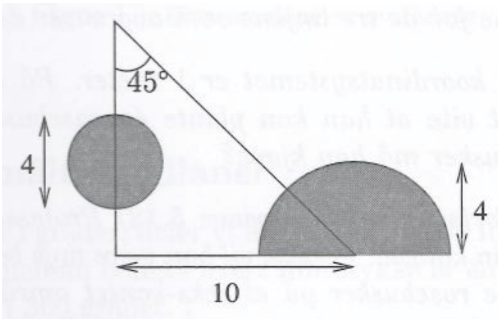
Oppgave A.4.11 Alf vil pynte i hagen sin. Han bestemmer seg for å plante trær langs en sirkel med diameter 2,7 meter. Trærne plantes med en avstand på omtrent 50 cm målt langs sirkelen. Han utelater ett tre for å lage en inngang. Hvor mange trær må han plante?

Oppgave A.4.12 Finn det samlede arealet av de hvite områdene i Figur 3 (ytterkantene av de fire skraverte områdene danner et kvadrat). Gi et eksakt svar (ikke desimaltall).



Figur 3

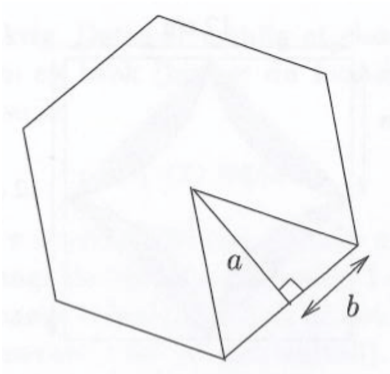
Oppgave A.4.13 Finn arealet av det hvite området inne i den (rettvinklede) likebeinte trekanten i Figur 4. Gi et eksakt svar.



Figur 4

Oppgave A.4.14 Jordas radius ved ekvator er omtrent 6378 km. Tenk deg at ekvator danner en sirkel. Hvor mye øker omkretsen av denne sirkelen dersom jordas radius øker med 1 km? Hvor mye øker omkretsen hvis jordas radius øker med 3 km? Gi eksakte svar.

Oppgave A.4.15 Hva er arealet av sekskanten i Figur 5 (satt sammen av likesidede trekanter)?



Figur 5

Oppgave A.4.16 Professor Sammensunket skal plante roser i hagen sin. Som den matematikeren han er, starter han med å lage et koordinatsystem av taustumper utover hele plenen. Han bestemmer seg for at rosenes skjønnhet kommer best til sin rett hvis han planter dem i trekantområdet der hjørnene har koordinater $(1, 1)$, $(1, 7)$ og $(6, 1)$.

a) Finn likningene for de tre linjene som avgrenser dette området.

b) Måleenheten i koordinatsystemet er 1 meter. På gartneriet får Prof. Sammensunket vite at han kan plante én rosebusk pr. kvadratmeter. Hvor mange busker må han kjøpe?

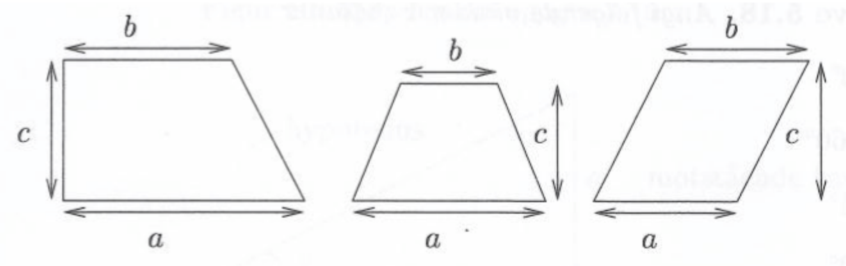
Oppgave A.4.17 (Fortsettelse på forrige oppgave) Professor Forknytt vil ikke være dårligere enn sin kollega. Faktisk vil han være mye bedre. Så han bestemmer seg for å plante rosebusker på et sekskantet område satt sammen av likesidede trekanter på samme måte som i Figur 5. Professor Forknytt mener opplegget med å lage koordinatsystem av taustumper er teit, og avgrenser sitt område på følgende måte: Han bestemmer at avstanden fra sentrum i sekskanten til hvert av hjørnene skal være 4 meter. Han beregner at avstanden fra sentrum til midtpunktet på hver av de seks sidene er $2\sqrt{3}$. Rosebuskene han velger (selvsagt litt dyrere enn Sammensunket sine) må ha 1,5 kvadratmeter hver. Hvor mange busker er det plass til i Professor Forknytt sin hage?

Oppgave A.4.18 Steffen Høyogslank er sjef i en stor byggevareforretning. Torsdag 12. august har de tilbud på kvadratiske frostsikre fliser. I annonsen står det at flisenes areal er $x^2 - 4x + 4$ for en eller annen $x > 4$. For å få kjøpe de billige flisene, må kundene finne lengdene av sidekantene (uttrykt ved x). Sjekk om du får kjøpt fliser.

Oppgave A.4.19 Hva er omkretsen av et rektangulært område med areal $x^2 + 6x - 7$ der $x > 7$?

Oppgave A.4.20 Du gjerder inn et trekantet område med areal $\frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}$ der $x > 3$. Finn lengdene av grunnlinja og høyden i trekanten.

Oppgave A.4.21 Utled formlene for arealene av områdene i Figur 6 uttrykt ved a, b og c. (I den tredje tegningen har vi et parallellogram, dvs. $a = b$.)



Figur 6

Oppgave A.4.22 Angi følgende vinkler i radianer:

a) $60°$

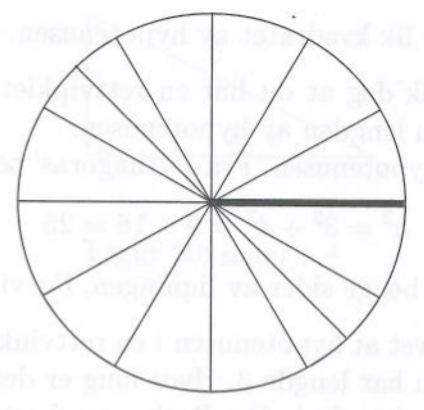
b) $-60°$

c) $45°$

d) $30°$

e) $180°$

Oppgave A.4.23 Du skal tegne en sirkel og merke av vinklene $0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330°$ og $360°$. Det kan være lurt å bruke Figur 7. Husk at vinkler måles ved å starte på den tykke streken og gå mot klokka.



Figur 7

Oppgave A.4.24 Du skal tegne en sirkel og merke av vinklene (målt i radianer) $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{3}$ og 2π. Det kan være lurt å bruke Figur 7 her også. Sammenlign med det du fant i forrige oppgave.

Oppgave A.4.25 I en rettvinklet trekant har den ene kateten lengde 7 og hypotenusen har lengde 9. Hva er lengden av den andre kateten? Gi eksakt svar.

Oppgave A.4.26 I en rettvinklet trekant har katetene lengder henholdsvis 5 og 6. Hva er lengden av hypotenusen? Gi eksakt svar.

Oppgave A.4.27 En stige som er 8 meter lang er lent mot en husvegg. Hvor høyt opp på veggen når den når foten av stigen er 2 meter fra husveggen? Tegn figur og gi eksakt svar.

Oppgave A.4.28 Lars Ragnar svømmer 160 meter parallelt med stranda. Deretter svømmer han 65 meter utover og vinkelrett på strandkanten. Til slutt svømmer han korteste vei tilbake til utgangspunktet. Vi regner med at strandkanten er rettlinjet. Hvor langt svømmer Lars Ragnar til sammen?

Oppgave A.4.29 Bruk kalkulatoren din til å finne $\sin v$, $\cos v$ og $\tan v$ når

a) $v = 60°$

b) $v = \frac{\pi}{3}$

c) $v = 30°$

d) $v = \frac{\pi}{6}$

e) $v = 0°$

f) $v = 0$

g) $v = 45°$

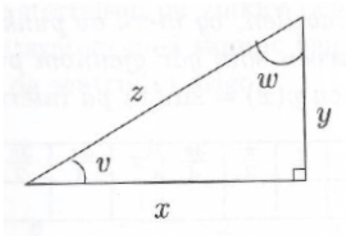
h) $v = \frac{\pi}{4}$

i) $v = 90°$

j) $v = \frac{\pi}{2}$

Hva ser du?

Oppgave A.4.30 For å løse disse oppgavene må du bruke Figur 8.



Figur 8

a) Finn x når $z = 3$ og $y = 2$.

b) Finn x når $z = 7$ og $v = 0{,}8$.

c) Finn y når $x = 21$ og $\tan w = 20$.

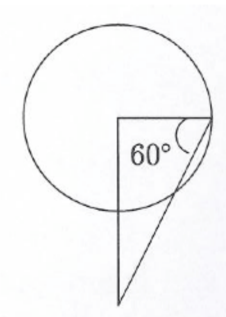
d) Finn y når $v = \frac{\pi}{6}$ og $z = 8$.

e) Finn z når $v = 1{,}2$ og $y = 17$.

f) Finn z når $x = a$ og $y = b$.

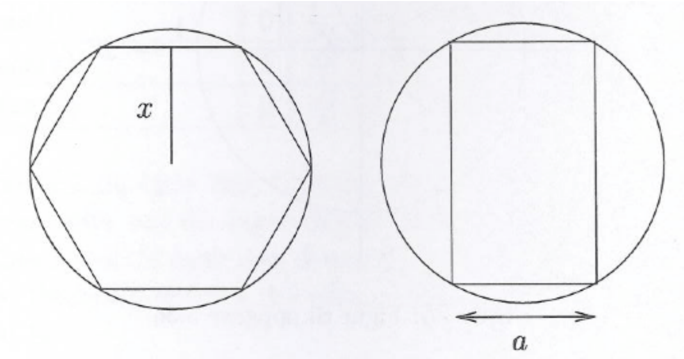
Oppgave A.4.31 Et kvadrat har areal 49 cm^2. Hvor lang er diagonalen?

Oppgave A.4.32 Sirkelen i Figur 9 har areal 11 cm^2. Hvor lang er hypotenusen i (den rettvinklede) trekanten?



Figur 9

Oppgave A.4.33 Sirkelen til venstre i Figur 10 har areal 6,25π. Finn x eksakt. Sirkelen til høyre i Figur 10 har omkrets 6π. Hva er omkretsen av rektangelet?



Figur 10

A.5 Kapittel 5

Oppgave A.5.1 Tegn fortegnslinja til

a) $\sin x$ for $x \in [0, 2\pi]$.

b) $\cos x$ for $x \in [0, 2\pi]$.

Oppgave A.5.2 Fyll ut tabellen, og merk av punktene $(x, \sin x)$ i et koordinatsystem. Tegn også inn kurven som går gjennom punktene. Når du er ferdig ser du grafen til funksjonen $f(x) = \sin x$ på intervallet $[0, 2\pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\sin x$									

Oppgave A.5.3 Fyll ut tabellen, og merk av punktene $(x, \cos x)$ i samme koordinatsystem som du brukte i forrige oppgave. Tegn inn kurven gjennom disse punktene. Når du er ferdig ser du grafen til funksjonen $g(x) = \cos x$ på intervallet $[0, 2\pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos x$									

Hvordan ligger grafen til funksjonen $g(x) = \cos x$ i forhold til grafen til $f(x) = \sin x$? Hvorfor er $g(x) = \cos x$ en funksjon? Hvorfor er $f(x) = \sin x$ en funksjon?

Oppgave A.5.4

- Tegn en sirkel der du merker av vinklene $\frac{\pi}{6}$ og $\frac{5\pi}{6}$. Finn sinus til disse to vinklene. Hva ser du? Gjenta dette med vinklene $\frac{\pi}{3}$ og $\frac{2\pi}{3}$. Hva ser du? Hva tror du er sammenhengen mellom sinusverdiene til vinklene $\frac{7\pi}{6}$ og $\frac{11\pi}{6}$?
- Merk av vinklene $\frac{\pi}{3}$ og $\frac{5\pi}{3}$ i samme figur som du brukte ovenfor. Finn cosinus til disse vinklene (også på kalkulator). Hva ser du? Gjenta dette med vinklene $\frac{\pi}{6}$ og $\frac{11\pi}{6}$. Hva ser du? Hva tror du er sammenhengen mellom cosinusverdiene til vinklene $\frac{2\pi}{3}$ og $\frac{4\pi}{3}$?

Oppgave A.5.5 Markér parene av vinkler på en enhetssirkel. Hva er sammenhengen mellom $\cos v$ og $\cos w$? Hva med sammenhengen mellom $\sin v$ og $\sin w$? Kan du si noe generelt ut i fra dette?

a) $v = \frac{\pi}{6}$ og $w = \frac{11\pi}{6}$

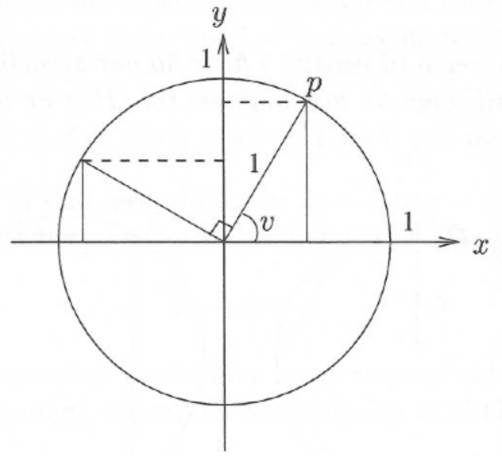
b) $v = \frac{\pi}{6}$ og $w = \frac{5\pi}{6}$

c) $v = \frac{\pi}{3}$ og $w = \frac{4\pi}{3}$

Oppgave A.5.6 Fra grafene til sinus- og cosinusfunksjonene kan det se ut til at

$$\cos v = \sin\left(v + \frac{\pi}{2}\right).$$

Prøv å gi en forklaring på at dette stemmer ved hjelp av Figur 11.



Figur 11

Oppgave A.5.7 a) Lag en tabell med vinklene 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$, π, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{6}$ og 2π, og med plass til å fylle inn sinus, cosinus og tangens til disse vinklene (eventuelt bruk en blank tabell fra forelesning hvis du fikk tak i det).

b) Legg vekk alle hjelpemidler og fyll inn tabellen så fort du kan. Ta tiden!

Oppgave A.5.8 Bruk enhetssirkelen til å finne de vinklene x som er slik at $\sin x = \cos x$, dvs. løs likningen $\sin x = \cos x$ geometrisk.

Oppgave A.5.9 Bruk enhetssirkelen til å finne de vinklene x som er slik at $\sin x = -\cos x$, dvs. løs likningen $\sin x = -\cos x$ geometrisk.

Oppgave A.5.10 Bruk tabellen over eksakte verdier av sinus og cosinus til å finne x. Gi svaret i både radianer og grader.

a) $\sin x + \frac{1}{2} = 1$

b) $2 \sin x = \sqrt{2}$

c) $a \sin x = a$, der a er et reelt tall, $a \neq 0$

d) $\cos x - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\cos x}{b} = \frac{1}{2b}$, der b er et reelt tall, $b \neq 0$

f) $\tan^2 x = 3$ (Merk skrivemåte: $\tan^2 x = (\tan x)^2$.)

g) $10^8 \tan x + \pi^7 = \pi^7$

Oppgave A.5.11 Hvilke av tilordningsreglene er funksjoner?

a) Regelen f tar et tall x og legger til π.

b) Regelen g tar et tall y, ganger det med 7 og legger til 14.

c) Regelen h tar en person a og tilordner skostørrelsen til denne personen.

d) Regelen F tar et tall x og produserer kvadratet av dette.

e) Regelen G tar et tall y og produserer kvadratrøttene til dette.

f) Regelen H tar et tall z, deler det på et tall b og legger til et tall c.

Oppgave A.5.12 Hvilke funksjoner er følgende sammensatte funksjoner satt sammen av? (F.eks. $f(x) = \sqrt{e^x}$ kan skrives $f(x) = g(h(x))$, der $g(x) = \sqrt{x}$ og $h(x) = e^x$.)

a) $f(x) = \ln(x^2)$

b) $f(x) = \cos(3x)$

c) $f(x) = \sin(e^{\sqrt{x}})$

d) $f(x) = 4 \sin x + 3$

e) $f(x) = (\ln x)^3 - \ln x$

Oppgave A.5.13 La $f(x) = \sin x$ og $g(x) = e^x$. Finn funksjonsuttrykket til følgende sammensatte funksjoner:

a) $f(g(x))$

b) $g(f(x))$

c) $f(g(g(x)))$

d) $g(f(g(f(x))))$

Oppgave A.5.14 La $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^2 - x$ og $h(x) = \sqrt{x}$. Finn funksjonsuttrykket til følgende sammensatte funksjoner:

a) $g(f(x))$

b) $f(g(h(x)))$

c) $g(g(x))$

d) $h(h(x))$

Oppgave A.5.15 Tegn grafene til funksjonene.

a) $f(x) = -4x$

b) $f(x) = 3$

c) $f(x) = -21x - 63$

Oppgave A.5.16 Finn noen punkter (x, y) som tilfredsstiller likningen $y = x^2 - 6x + 8$, og sett dem opp i en tabell. Du skal velge x jevnt fordelt i intervallet $[0, 6]$. Du kan for eksempel fylle ut tabellen nedenfor:

x	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	5	6
y									

Merk av punktene i et passende koordinatsystem, og tegn kurven som går gjennom punktene. Løs ulikheten $x^2 - 6x + 8 < 0$ både ved å bruke fortegnsskjema og ved å se på grafen du tegnet.

Oppgave A.5.17 Finn noen punkter grafene til funksjonene går gjennom. Merk dem av i et passe stort koordinatsystem. Tegn grafen til funksjonene ved hjelp av støttepunktene dine.

a) $f(x) = x(x-2)$

b) $g(x) = x^2 - 5$

c) $h(x) = 3(x+5)(x-3)$

d) $f(t) = t^2 + 2t - 15$

Oppgave A.5.18 (Vanskelig) Løs ulikheten $x(x-7)\cos x > 0$, der $0 \leq x \leq 7{,}5$.

Oppgave A.5.19 (Vanskelig) Løs ulikheten $\sin x \cos x < 0$, der $0 \leq x \leq 2\pi$.

A.6 Kapittel 6

Oppgave A.6.1 Deriver funksjonene ved hjelp av definisjonen (6.2).

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = 4x^3 - 2$

c) $f(x) = 2(x-1)$

d) $f(x) = x(x^2+3)$

Oppgave A.6.2 Deriver funksjonene.

a) $f(x) = (2x^2+3)(x+1)$

b) $f(x) = (-1-x^2)(x^4+1)$

c) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$

d) $f(x) = -\frac{3}{3x^2+1}$

e) $f(x) = \frac{x}{x-3}, \quad x \neq 3$

f) $f(x) = \frac{x-3}{5x}, \quad x \neq 0$

g) $f(x) = -2e^{3x}$

h) $f(x) = -2\ln(3x), \quad x > 0$

Oppgave A.6.3 Deriver funksjonene.

a) $f(x) = \frac{e^x}{x}, \quad x \neq 0$

b) $f(x) = \frac{2\ln x+1}{x^2}, \quad x > 0$

c) $f(x) = 4\ln(\frac{1}{x}) + 3\pi, \quad x > 0$

d) $f(x) = \frac{2x+5}{5-2x}, \quad x \neq \frac{5}{2}$

e) $f(x) = \frac{x^2-7x+2}{x^3-1}, \quad x \neq 1$

Oppgave A.6.4 Deriver funksjonene. To av funksjonene kan forenkles før de deriveres -hvilke?

a) $r(x) = \ln(x^2), \quad x \neq 0$

b) $s(x) = e^{x^2}$

c) $t(x) = e^{\ln(x^2)}, \quad x \neq 0$

d) $u(x) = 3x^5 + \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$

e) $v(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}, \quad x \geq 0$

f) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+x-2}, \quad x \neq 1, x \neq -2$

g) $g(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$

h) $k(x) = (2\ln(2x))^2, \ x > 0$

Oppgave A.6.5 Finn stigningstallet til tangenten til f for $x = 1$.

a) $f(x) = e^x + \ln x$

b) $f(x) = (\frac{5}{2})^x + 2e^x$

c) $f(x) = e^x + 2^x + \ln 2$

d) $f(x) = 3\ln 3 + 3\ln x$

e) $f(x) = \frac{e^{x+1}}{x+1}$

Oppgave A.6.6 La f være funksjonen gitt ved

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+x-2}.$$

For hvilke x-verdier vokser f? avtar f? (Husk at en x-verdi må være med i definisjonsmengden for at vi i det hele tatt skal kunne snakke om den deriverte for denne x-verdien.)

Oppgave A.6.7 a) Skisser grafen til en funksjon som vokser på intervallet $(-\infty, 2]$ og avtar på intervallet $[2, \infty)$.

b) Skisser grafen til en funksjon som er positiv på intervallet $(-\infty, 0]$, avtar på intervallet $[0, 1]$ og er negativ på intervallet $[1, \infty)$.

Oppgave A.6.8 La $f(x) = ax^2 - 4,\ a > 0$.

a) Hvor er f positiv og hvor er f negativ?

b) Hvor vokser f og hvor avtar f?

c) For hvilken verdi av a har tangenten til f i punktet $x = 1$ stigningstall lik 1?

Oppgave A.6.9 Finn noen punkter (x, y) som tilfredsstiller likningen $y = 4x - x^2$, og sett dem opp i en tabell. Du kan for eksempel fylle ut tabellen nedenfor:

x	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4	5	6
y										

Merk av punktene i et passende koordinatsystem, og tegn kurven som går gjennom punktene. Løs ulikheten $4x - x^2 > 0$ både ved å bruke fortegnsskjema og grafisk. Hva er den største verdien til funksjonen $y(x) = 4x - x^2$? Hva er den minste verdien?

Oppgave A.6.10 Finn noen punkter (x, y) som tilfredsstiller likningen $y = x^2 - 12x + 36$, og still dem opp i en tabell. Du skal velge x jevnt fordelt i intervallet $[3, 9]$. Merk av punktene i et passende koordinatsystem, og tegn kurven som går gjennom punktene.

Løs ulikheten $x^2 - 12x + 36 < 0$ både ved å bruke fortegnsskjema og grafisk. Hva er den minste verdien til funksjonen $y(x) = x^2 - 12x + 36$? Hva er den største verdien?

Oppgave A.6.11 Finn noen punkter (x, y) som tilfredsstiller likningen $y = \frac{1}{x}$. Du kan for eksempel fylle ut tabellen

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y										

Merk av punktene i et passende koordinatsystem, og tegn kurven som går gjennom punktene. Hva skjer i $x = 0$? Drøft fortegnet til funksjonen $y = \frac{1}{x}$ ved å bruke fortegnsskjema. Stemmer resultatet med grafen du tegnet? Har funksjonen noen maksimums- eller minimumsverdi?

Oppgave A.6.12 Vis at funksjonen $f(x) = x^2$ er voksende på intervallet $[0, 3]$ ved å bruke definisjonen av voksende.

Oppgave A.6.13 Vis at funksjonen $f(x) = \frac{1}{x}$ er avtagende til høyre for null på tallinja ved å bruke definisjonen av avtagende. Er funksjonen strengt avtagende? Vis at funksjonen også er avtagende til venstre for null på tallinja. Er funksjonen avtagende på hele tallinja?

Oppgave A.6.14 Vis at funksjonen $f(x) = x^3$ er voksende på hele tallinja. Er funksjonen strengt voksende?

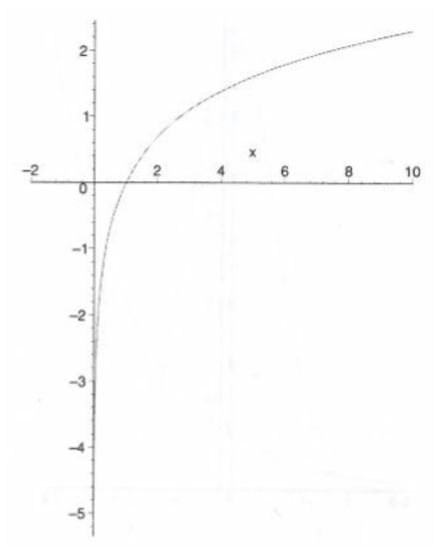
Oppgave A.6.15 Du har lært at cosinus til en vinkel er det samme som x-koordinaten til det tilhørende punktet på enhetssirkelen. Bruk dette til å avgjøre hvor funksjonen $\cos(x)$ er voksende og avtagende når x gjennomløper intervallet $[-2\pi, 2\pi]$.

Oppgave A.6.16 Du har lært at sinus til en vinkel er det samme som y-koordinaten til det tilhørende punktet på enhetssirkelen. Bruk dette til å avgjøre hvor funksjonen $\sin(x)$ er voksende og avtagende når x gjennomløper intervallet $[-2\pi, 2\pi]$.

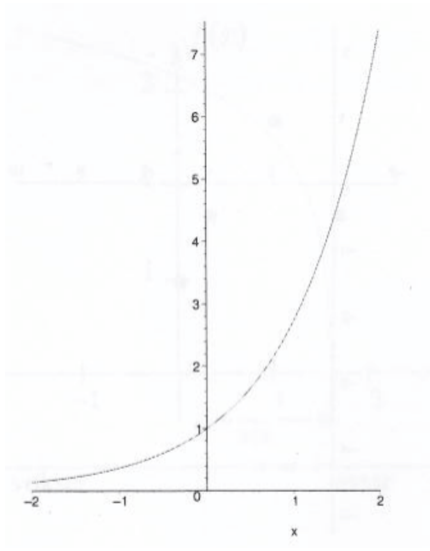
Oppgave A.6.17 Avgjør hvor grafene er voksende/avtagende. Hvor er grafene konvekse/konkave? Hva kan du si om funksjonsverdiene? Har grafen noe maksimums-/minimumspunkt? Har funksjonen noe(n) nullpunkt(er)?

a) Grafen i Figur 12.

b) Grafen i Figur 13.



Figur 12

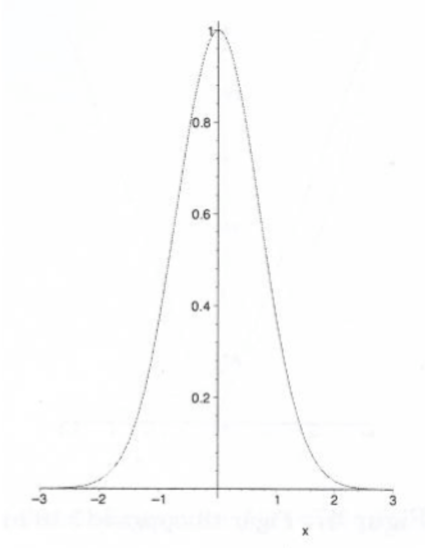


Figur 13

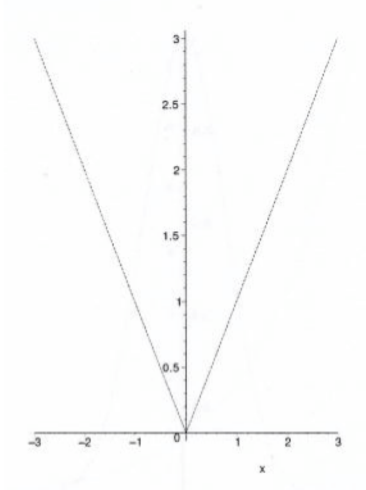
Oppgave A.6.18 Avgjør hvor grafene er voksende/avtagende? Hvor er grafene konvekse/konkave? Hva kan du si om funksjonsverdiene? Har grafen noe maksimums-/minimumspunkt? Har funksjonen noe(n) nullpunkt(er)?

a) Grafen i Figur 14.

b) Grafen i Figur 15.



Figur 14



Figur 15

Oppgave A.6.19 Funksjonen $f(x)$ har følgende egenskaper:

- Grafen skjærer x-aksen i $x = -100$, $x = 0$ og i $x = 1000$.
- Grafen har minimumspunkt i $x = -40$ og $f(-40) = -500$.
- Grafen smiler (konveks) på intervallet $[-100, 0]$, og er sur (konkav) på intervallene $[-200, -100]$ og $[0, 1000]$.
- Grafen har maksimumspunkt i $x = 400$ og $f(400) = 300$.

Tegn grafen på intervallet $[-200, 1000]$. Pass på at koordinatsystemet ditt er passe stort!

Oppgave A.6.20 Funksjonen $g(x)$ har følgende egenskaper:

- Funksjonen er ikke definert i $x = 0$. Grafen skjærer altså ikke den vertikale aksen.
- Grafen er ikke sammenhengende.
- $g(x) > 0$ for alle x i definisjonsområdet.

- Grafen vokser for negative x, og avtar for positive x.
- Grafen smiler over alt (konveks).
- $g(-1) = g(1) = 3$.
- Grafen har ikke noe maksimumspunkt.

Tegn grafen på intervallet $[-1, 1]$, og la verdiene på y-aksen gå fra 0 til 50.

Oppgave A.6.21 Funksjonen $h(x)$ har følgende egenskaper: Funksjonen er definert for alle reelle tall x, og grafen vokser over alt. Grafen skjærer y-aksen i punktet $(0, 1)$, og funksjonen har ingen nullpunkter. Funksjonsverdiene er positive og grafen smiler over alt (konveks). Tegn grafen.

Oppgave A.6.22 Funksjonen $s(x)$ har følgende egenskaper på intervallet $[-10, 2]$: Grafen smiler og avtar overalt. Funksjonen har ingen nullpunkter, og $s(0) = 1$. Funksjonsverdiene er positive. Det er et maksimumspunkt i $x = -10$ og $s(-10) = 22\ 000$. Det er et minimumspunkt i $x = 2$, og $s(2) = 0{,}2$. Tegn grafen i et passende koordinatsystem. (Hint: Ingen sier at du må ha samme lengdeenhet på de to aksene.)

Oppgave A.6.23 Tegn grafen til funksjonen $f(x) = e^x$ uten å se på det vi har gjort i eksempelet ovenfor. Har funksjonen noen nullpunkter? Hva kan du si om monotonien? Hvor er grafen konveks og hvor er den konkav?

Oppgave A.6.24 Tegn grafen til funksjonen $g(x) = \ln(x)$. Har funksjonen noen nullpunkter? Hva kan du si om monotonien? Har grafen noen vendepunkter? Hvis ja, hva er punktet? Hvis nei, er grafen konveks eller konkav?

Oppgave A.6.25 Tegn grafen til funksjonen $h(x) = e^{-x}$. Har funksjonen noen nullpunkter? Er det noen maksimums-/minimumspunkter? Hvor vokser og hvor avtar grafen? Har grafen noe vendepunkt? Hvor er grafen konveks/konkav?

Oppgave A.6.26 Tegn grafen til funksjonen $f(x) = \frac{1}{x}$ på intervallet $[-10, 10]$. Legg merke til at funksjonen ikke er definert i $x = 0$, så grafen er ikke sammenhengende. Har funksjonen noen nullpunkter? Hvor vokser/avtar grafen? Hvor er grafen konveks/konkav?

Oppgave A.6.27 Tegn grafen til funksjonen $g(x) = x^3$ på intervallet $[-10, 10]$. Har funksjonen noen nullpunkter? Hvor vokser/avtar grafen? Hvor er grafen konveks/konkav? Hva kan du si om funksjonsverdiene for positive x? Hva kan du si om funksjonsverdiene når x er negativ?

Oppgave A.6.28 Tegn grafen til funksjonen $f(x) = e^{-x^2+2x}$. Du må regne ut ganske mange punkter for å få til dette. La x gjennomløpe intervallet $[-3, 3]$. Sett opp en tabell før du tegner koordinatsystemet, slik at du er sikker på å få plass til alle punktene. Bruk opplysningen om at det er et maksimumspunkt i $x = 1$.

Har funksjonen noen nullpunkter? Hvor vokser/avtar grafen? Hvor smiler grafen, og hvor er den sur? Hva kan du si om funksjonsverdiene?

Oppgave A.6.29 [Lineær forskyvning] Tegn grafene til funksjonene $f(x) = x^2$ og $g(x) = x^2 + 3$ i samme koordinatsystem. Hva ser du? Har det du ser noen sammenheng med funksjonsuttrykkene?

Oppgave A.6.30 [Lineær forskyvning] Tegn grafene til funksjonene $h_1(x) = x^2$ og $h_2(x) = (x - 3)^2$ i samme koordinatsystem. Hva ser du? Har det du ser noen sammenheng med funksjonsuttrykkene?

Oppgave A.6.31 [Lineær forskyvning] Du skal besvare oppgaven uten å tegne grafene til funksjonene! Hvordan vil grafen til $g_1(x) = x^3$ ligge i forhold til grafen til $g_2(x) = x^3 + 3 \cdot 2 \cdot x^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot x + 2^3$? (Hint: Regn ut $(x + 2)^3$.)

Oppgave A.6.32 [Strekking] Tegn grafen til funksjonene $f(x) = x(x + 4)$ og $g(x) = 2x(x + 4)$ i samme koordinatsystem. Hva ser du?

Oppgave A.6.33 [Flytt og strekk] Hvordan vil grafen til $f_1(x) = x^2$ ligge i forhold til grafen til $f_2(x) = (x - 7)^2 + 4$?

Oppgave A.6.34 [For de aller tøffeste] Du har en funksjon $f(x)$. Hvordan vil grafen til f ligge i forhold til grafen til

a) $2f(x)$?

b) $af(x)$, der a er et reelt tall?

c) $f(x)+c$, der c er et reelt tall?

d) $f(x-1)$?

e) $f(x+k)$, der k er et reelt tall?

f) $pf(x-q)+r$, der p, q, og r er reelle tall?

Tillegg B

Fasit

Bokstaven B står for 'fasit'... 'Oppgave B.*,•' betyr 'fasit til Oppgave A.*.•', der * står for kapittelnummer og • står for løpenummer i hvert kapittel.

Noen oppgaver er markert med 'Ikke fasit' -spør gruppelærer hvis du står fast eller vil sjekke tegning/forklaring o.l. i disse oppgavene. Og spør gjerne om de andre oppgavene også.

B.1 Kapittel 1

Oppgave B.1.1 $\mathbb{R}$

Oppgave B.1.2 0,1 kan skrives som $\frac{1}{10}$, så dette tallet hører hjemme i $\mathbb{Q}$. Tallet $-0{,}1$ hører også hjemme i $\mathbb{Q}$. Tallene 0,11 og $-0{,}11$ er også rasjonale tall.

Oppgave B.1.3 Ikke fasit.

Oppgave B.1.4 Ikke fasit.

Oppgave B.1.5 For eksempel $\frac{1}{3} = 0,33333333\ldots$ og $\frac{1}{7}$

Oppgave B.1.6 a) $1{,}7 \cdot 10^{-3}$ b) $4{,}23 \cdot 10^{2}$ c) $1{,}674 \cdot 10^{6}$ d) $2 \cdot 10^{-1}$

Oppgave B.1.7 Spesifiseringene er ikke med i fasiten, bare de forenklede uttrykkene:
a) 1 b) $\frac{13}{3}$ c) $\frac{16}{15}$ d) $\frac{7}{25}$

Oppgave B.1.8 a) 4 b) 15 c) 21 d) 12 e) a f) $2a$ g) ab h) $5a + 15$

Oppgave B.1.9 a) 17 b) 2 c) 2 d) 2 e) 1 f) 12 g) 9 h) 1 i) 6 j) 8 k) 4 l) 2

Oppgave B.1.10 a) 10 b) 5 c) -5 d) 8 e) 0,008 f) Ikke definert

Oppgave B.1.11 a) $7a$ b) -4∇ c) Kan ikke forenkles noe særlig.
d) $-6a - 6b - 6c - 6d - 6e - 6f - 6g = -6(a + b + c + d + e + f + g)$

Oppgave B.1.12 a) b b) $27a^2b^3c^7 - 28h$

Oppgave B.1.13 a) $\frac{12}{5}$ b) $\frac{abc}{4}$ c) a^2 d) x^3 e) x^{-3}

Oppgave B.1.14 a) $\frac{-5hk-hsj}{jk} = \frac{-h(5k+sj)}{jk}$ b) $\frac{ji^2p^2w+hur^2av}{vw}$ c) $\frac{5x-5y+4z}{(x-y)z}$
d) $\frac{i(p+1)+qp}{p(p+1)}$ e) 0 f) $\frac{a^2+2ab-b^2}{(a+b)(a-b)}$ g) $\frac{3}{a}$ h) $\frac{1-b}{2b}$

Oppgave B.1.15 a) $\frac{3x+6}{10}$ b) $\frac{7x+19}{15}$ c) $\frac{x-3}{15}$ d) $\frac{8+x}{2x}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $-\frac{2}{a^2}$
g) $\frac{c^2-ab+3a^2bc+a^3bc}{a^2bc}$ h) $\frac{b^2+2a}{ab}$

Oppgave B.1.16 Spesifiseringene er ikke med, bare de forenklede uttrykkene:
a) 0 b) $n - 2n^2$ c) Kan ikke forenkles noe særlig. d) Kan ikke forenkles noe særlig. e) $-2\sqrt{n}$ f) 0

Oppgave B.1.17 Ikke fasit.

Oppgave B.1.18 Ikke fasit.

Oppgave B.1.19 a) $a(b + c + d)$ b) $-(f + g + h)$ c) $\Diamond(a + \nabla - 9)$
d) $xy(nz - pw + rs + 7e)$ e) $a(4 + e - 6u)$ f) $h(g - 1 + qh)$

Oppgave B.1.20 a) $(a + b)(c - d)$ b) $(g - h)(r - k - m)$
c) $(r + s + t - u - v - w)(l + m - npq)$

Oppgave B.1.21 a) $\frac{a(k+l+m)}{ab} = \frac{k+l+m}{b}$ b) $\frac{z(n-x)}{n}$, kan ikke forkortes
c) Kan ikke faktoriseres, og ikke forkortes. d) $\frac{uv(a+b)}{uvc} = \frac{a+b}{c}$
e) $\frac{e(1+e^3)}{e^2} = \frac{1+e^3}{e}$

Oppgave B.1.22 Ikke fasit.

Oppgave B.1.23 a) $x = 4$ b) $x = 4$ c) $x = 0$ d) $x = 5$ e) $x = \frac{7}{3}$ f) $x = -\frac{5}{8}$ g) $x = \frac{11}{8}$

Oppgave B.1.24 a) -1 b) $\frac{26}{3}$ c) $\frac{23}{7}$ d) 7

Oppgave B.1.25 a) 4 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$

Oppgave B.1.26 a) 0 b) 1 c) 1 d) e e) 2 f) 12 g) $-\ln 2 \approx -0{,}69$

Oppgave B.1.27 a) $\frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0{,}63$ b) $\ln 7 \approx 1{,}95$ c) $\frac{\ln 10}{\ln \frac{1}{2}} = \frac{\ln 10}{-\ln 2} \approx 3{,}32$

Oppgave B.1.28 a) $-3 \ln a$ b) $34 \ln a$ c) $\frac{1}{2} \ln a$ d) ab^2

Oppgave B.1.29 a) $x = \sqrt{e}$ b) $x = e^2$ c) $x = \frac{e^2-2}{3}$ d) $x = e$

Oppgave B.1.30 15

Oppgave B.1.31 20

Oppgave B.1.32 37 og 38

Oppgave B.1.33 50 kr. (Forslag til likning: $370 - x = 2(110 + x)$.)

Oppgave B.1.34 7 terninger

Oppgave B.1.35 $6 + y$ plagg. Yngvar har $y - 2 + 7 = y + 5$ plagg inne i sitt prøverom. Yngvar prøver til sammen $y + 7$ plagg i denne butikken.

Oppgave B.1.36 $D = 2S$. Du har kjøpt 40 plater 'Symfoni'.

Oppgave B.1.37 $\frac{130(5x-7)}{x+1}$. Det er 11 barn i klassen.

Oppgave B.1.38 a) $E \approx 9{,}0 \cdot 10^7$ kWtimer.
b) Forholdet er tilnærmet 31,1.

B.2 Kapittel 2

Oppgave B.2.1 a) $x = 3$ eller $x = -3$ b) $x = 0$ eller $x = 6$ c) $x = -2$ eller $x = 4$

Oppgave B.2.2 a) $3^2 = 9$ b) $1^2 = 1$ c) $10^2 = 100$ d) $\left(\frac{15}{2}\right)^2$

Oppgave B.2.3 a) $x = 5$ b) $x = -3$ eller $x = -2$ c) $x = -3$ eller $x = 5$ d) $x = -8$ eller $x = -1$ e) Ingen løsning.

Oppgave B.2.4 a) $x = \frac{-7-\sqrt{57}}{4}$ eller $x = \frac{-7+\sqrt{57}}{4}$ b) $x = 1$

Oppgave B.2.5 a) 3 m b) 3,16 dm c) 0,4 km

Oppgave B.2.6 a) 0,24 m b) 0,10 m

Oppgave B.2.7 $x = 7$

Oppgave B.2.8 Elin er 21 år.

Oppgave B.2.9 Du er 27 år.

Oppgave B.2.10 Begge har rett (løsningene er $x = 8$ og $x = -25$).

Oppgave B.2.11 Nei

Oppgave B.2.12 Nei

Oppgave B.2.13 a) $5(x-3)(x+3)$ b) $x(x-6)$ c) $(x+2)(x-4)$ d) $(x-5)^2$

Oppgave B.2.14 a) $3(x-1)(x-2)$ b) $2(x+15)(x+1)$ c) $-x(x+2)(x-4)$ d) Første steg: $-x^2(x-5) + 4(x-5) = (x-5)(-x^2+4)$. Faktoriser så andregradsuttrykket og få $(x-5)(2+x)(2-x)$.

Oppgave B.2.15 a) $\frac{x-7}{x+1}$ b) $w + \frac{1}{2}$ c) $\frac{z+5}{z+1}$ d) Hvis vi faktoriserer over og under brøkstreken får vi $\frac{2(y+\frac{1}{2})(y-2)}{(y+1)(y+5)}$. Brøken kan derfor ikke forkortes.

Oppgave B.2.16 a) $(x+2)^2$ b) $3(x+2)^2$ c) $(k-4)(k+4)$ d) $mlp(g+3)(g-3)$ e) $(2h-t)^2$ f) $7(sq-nv)^2$

Oppgave B.2.17 Ikke fasit.

Oppgave B.2.18 $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Oppgave B.2.19 $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Oppgave B.2.20 Kall tallet du tenker på x. Vi vet at $\frac{3x+12}{3} - x = x + 4 - x = 4$.

Oppgave B.2.21 Vi ønsker å løse likningen $ax^2 + bx + c = 0$ der $a \neq 0$. Vi deler på a i alle ledd, og skriver dermed om likningen til

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Vi fullfører kvadratet på venstre side:

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

Vi bruker 1. kvadratsetning på de tre første leddene på venstresiden, og trekker sammen de resterende leddene til én brøk:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Dersom $b^2 - 4ac \geq 0$, kan vi nå ta kvadratrot på begge sider av likhetstegnet, og vi får

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)^2 = 0.$$

Vi bruker konjugatsetningen, som gir

$$(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}})(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}) = 0.$$

Dette gir at

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{eller} \qquad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Trekker vi sammen til én brøk, får vi at

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Oppgave B.2.22 a) $x = 9$ b) $x = 2$ c) $x = 4$

Oppgave B.2.23 $y = 7$ eller $y = -7$

Oppgave B.2.24 $x = 3$

Oppgave B.2.25 $x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

Oppgave B.2.26 $d_1 = 20$ og $d_2 = 13$

B.3 Kapittel 3

Oppgave B.3.1 a) $x > 2$ b) $x > \frac{13}{4}$ c) $x > \frac{6}{7}$ d) $x \leq -\frac{9}{14}$ e) $x < 4$

Oppgave B.3.2 a) $2 < x < 4$ b) $x \in (-3, 2)$ c) $x < -4$ eller $x > -\frac{1}{3}$ d) $x \in (0, 4)$

Oppgave B.3.3 a) Uttrykket er positivt for alle x. b) Uttrykket er negativt for alle x. c) Uttrykket er positivt for alle x.

Oppgave B.3.4 a) $x < -3$ eller $0 < x < 4$ b) $x < -1$ eller $\frac{3}{2} < x < 3$ c) $-3 < x < 1$ eller $x > 2$

Oppgave B.3.5 Antall bakterier øker når $x > 3$.

Oppgave B.3.6 Ikke fasit.

Oppgave B.3.7 a) $-4 < x < 0$ eller $2 < x < 3$ b) $x < -\frac{1}{2}$ eller $1 < x < 3$ c) $x < 1$ eller $x > 2$ d) $x < -7$ eller $x > 1$ e) $x < -7$ eller $x > 1$

Oppgave B.3.8 Ikke fasit.

Oppgave B.3.9 a) $y = 5x + 14$ b) $y = -x + (3 + 5\pi)$ c) $y = b$

Oppgave B.3.10 a) $y = -\frac{1}{5}x + \frac{27}{5}$ b) $y = \frac{u-3}{t+2}x + \frac{2u+3t}{t+2}$ c) $y = -\frac{m}{n}x + m$

Oppgave B.3.11 Skjæringspunktet er $(1, -2)$.

Oppgave B.3.12 Skjæringspunktet er $\left(-\frac{11}{3}, -\frac{13}{3}\right)$.

Oppgave B.3.13 a) $x = 6$, $y = 2$ b) $x = 2$, $y = -1$ c) $x = 3$, $y = -2$

Oppgave B.3.14 Hjørnene er $\left(-1, \frac{9}{2}\right), \left(-1, -4\right)$ og $\left(\frac{12}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

Oppgave B.3.15 Hjørnene er $(0, 0), (0, 2)$ og $(2, 0)$.

Oppgave B.3.16 To linjer med samme stigningstall er parallelle (eller sammenfallende).

Oppgave B.3.17 To parallelle linjer (ikke sammenfallende) kan ikke skjære hverandre.

Oppgave B.3.18 Hvis to linjer ikke er sammenfallende, kan de maksimalt skjære hverandre i ett punkt. Hvis de er sammenfallende, har de alle punktene på linja felles. Det er ubeskrivelig (uendelig) mange punkter på en linje.

Oppgave B.3.19 Linjene skjærer hverandre i nøyaktig ett punkt dersom $a_1 \neq a_2$. Det er ingen kriterier på b-ene.

Oppgave B.3.20 100 gram potetgull og 5 gram kanel.

Oppgave B.3.21 5,21 og 567,43

Oppgave B.3.22 a) $x = 10$ eller $x = -10$ b) $x = -5$ eller $x = 1$ c) $x = -2$ eller $x = 10$ d) $x = -10$ eller $x = 0$

Oppgave B.3.23 Likningen er sann for alle $x \leq -5$.

Oppgave B.3.24 Likningen er sann for alle $x \geq 5$.

Oppgave B.3.25 $x \leq a$

Oppgave B.3.26 a) $-3 < x < 7$ b) $x < -3$ eller $x > 7$ c) $-3 < x < 5$ d) $x < -5$ eller $x > 1$ e) $x < -10$ eller $x > 4$ f) $a - b < x < a + b$ g) $x < a - b$ eller $x > a + b$

Oppgave B.3.27 a) Når $x < 0$. b) Når $x \geq 0$. c) Aldri.

Oppgave B.3.28 a) $xy = 12$ eller -12 b) $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ eller $-\frac{3}{4}$ c) $x + y = 7, -1, 1$ eller -7 d) $x - y = -1, 7, -7$ eller 1

Oppgave B.3.29 a) $a > 7$ eller $a < -7$ b) $-9 < b < 9$ c) $-2 < c < 6$ d) $d > k - 1$ eller $d < -(1 + k)$ e) $-(l + 17) < e < 17 - l$ f) $f = m$

Oppgave B.3.30 Alle

Oppgave B.3.31 Ingen

B.4 Kapittel 4

Oppgave B.4.1 a) $[1, 1]$ b) $[1, 2]$ c) $[1, \frac{1}{2}]$

Oppgave B.4.2 Linjene i a) og e) har stigningstall $\frac{3}{2}$, og er parallelle med $[1, \frac{3}{2}]$, og dermed med $[2, 3]$.

Oppgave B.4.3 Mange muligheter. Mulige vektorformer: a) $[x, y] = [0, 1] + s[1, \frac{3}{2}]$ b) $[x, y] = [0, 1] + s[1, \frac{2}{3}]$ c) $[x, y] = [0, -\frac{1}{2}] + s[1, \frac{2}{3}]$ d) $[x, y] = [0, \frac{1}{3}] + s[1, -\frac{2}{3}]$ e) $[x, y] = s[1, \frac{3}{2}]$

Oppgave B.4.4 Ja, siden de har parallelle retningsvektorer og felles punkt (for eksempel $r = 1$ og $s = 0$ gir punktet $(-1, -1)$).

Oppgave B.4.5 a) 2 b) 4 c) 8 d) 16 e) 6 f) 12 g) 24

Oppgave B.4.6 a) $A = 15$, $O = 16$ b) $A = l \cdot m$, $O = 2l + 2m$ c) $A = 49$, $O = 28$ d) $A = s^2$, $O = 4s$ e) $A = 4\pi$, $O = 4\pi$ f) $A = 16\pi$, $O = 8\pi$

Oppgave B.4.7 $O = 8\pi$

Oppgave B.4.8 $\frac{\Delta}{2}$

Oppgave B.4.9 $A = \frac{\pi k^2}{4}$

Oppgave B.4.10 2π

Oppgave B.4.11 16 trær

Oppgave B.4.12 $A = 36(6-\pi)$ cm^2

Oppgave B.4.13 $50 - 4\pi$

Oppgave B.4.14 2π, 6π

Oppgave B.4.15 $6ab$

Oppgave B.4.16 a) $x = 1$, $y = 1$ $y = -\frac{6}{5}x + \frac{41}{5}$ b) 15 rosebusker

Oppgave B.4.17 27 rosebusker

Oppgave B.4.18 Sidekantene har lengde $(x-2)$.

Oppgave B.4.19 $4x + 12$

Oppgave B.4.20 $x - 3$ og $x + 3$

Oppgave B.4.21 $\frac{(a+b)c}{2}$, $\frac{(a+b)c}{2}$ og ac

Oppgave B.4.22 a) $\frac{\pi}{3}$ b) $-\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{6}$ e) π

Oppgave B.4.23 Ikke fasit.

Oppgave B.4.24 Ikke fasit.

Oppgave B.4.25 $4\sqrt{2}$

Oppgave B.4.26 $\sqrt{61}$

Oppgave B.4.27 $2\sqrt{15}$

Oppgave B.4.28 ca. 400 meter

Oppgave B.4.29 Ikke fasit.

Oppgave B.4.30 a) $\sqrt{5}$ b) $7 \cdot \cos(0{,}8) = 4{,}9$ c) $\frac{21}{20}$ d) 4 e) 18,2 f) $\sqrt{a^2 + b^2}$

Oppgave B.4.31 9,9 cm

Oppgave B.4.32 3,7 cm

Oppgave B.4.33 $\frac{5\sqrt{3}}{4}$, $2a + 2\sqrt{36 - a^2}$

B.5 Kapittel 5

Oppgave B.5.1 Ikke fasit.

Oppgave B.5.2 Ikke fasit.

Oppgave B.5.3 Ikke fasit.

Oppgave B.5.4 Ikke fasit.

Oppgave B.5.5 a) $\cos(v) = \cos(w)$ og $\sin(v) = -\sin(w)$
b) $\cos(v) = -\cos(w)$ og $\sin(v) = \sin(w)$
c) $\sin(v) = -\sin(w)$ og $\cos(v) = -\cos(w)$
Generelt er $\sin(v) = \sin(\pi - v)$ og $\cos(v) = \cos(-v)$.

Oppgave B.5.6 Ikke fasit.

Oppgave B.5.7 b) Verdensrekorden er foreløpig ukjent. 2 minutter? 5 minutter?

Oppgave B.5.8 $\frac{\pi}{4}$ og $\frac{5\pi}{4}$

Oppgave B.5.9 $\frac{3\pi}{4}$ og $\frac{7\pi}{4}$

Oppgave B.5.10 a) $\frac{\pi}{6},\ 30°$ b) $\frac{\pi}{4},\ 45°$ c) $\frac{\pi}{2},\ 90°$ d) $\frac{\pi}{6},\ 30°$ e) $\frac{\pi}{3},\ 60°$ f) $\frac{\pi}{3},\ 60°$ g) 0

Oppgave B.5.11 Alle reglene unntatt e) er funksjoner.

Oppgave B.5.12 a) $f(x) = g(h(x))$; $g(x) = \ln x, h(x) = x^2$
b) $f(x) = g(h(x))$; $g(x) = \cos x, h(x) = 3x$
c) $f(x) = g(h(k(x)))$; $g(x) = \sin x, h(x) = e^x, k(x) = \sqrt{x}$
d) $f(x) = g(h(x))$; $g(x) = 4x + 3, h(x) = \sin x$
e) $f(x) = g(h(x))$; $g(x) = x^3 - x, h(x) = \ln x$

Oppgave B.5.13 a) $\sin(e^x)$ b) $e^{\sin x}$ c) $\sin(e^{e^x})$ d) $e^{\sin(e^{\sin x})}$

Oppgave B.5.14 a) $\cos^2 x - \cos x$ b) $\cos(x - \sqrt{x})$ c) $x^4 - 2x^3 + x$ d) $x^{\frac{1}{4}}$

Oppgave B.5.15 Ikke fasit.

Oppgave B.5.16 $2 < x < 4$

Oppgave B.5.17 Ikke fasit.

Oppgave B.5.18 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ eller $7 < x \leq 7{,}5$

Oppgave B.5.19 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ eller $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

B.6 Kapittel 6

Oppgave B.6.1 a) 1 b) $12x^2$ c) 2 d) $3x^2 + 3$

Oppgave B.6.2 a) $6x^2 + 4x + 3$ b) $-6x^5 - 4x^3 - 2x$ c) $-\frac{x+2}{x^3}$ d) $\frac{18x}{(3x^2+1)^2}$ e) $-\frac{3}{(x-3)^2}$ f) $\frac{3}{5x^2}$ g) $-6e^{3x}$ h) $-\frac{2}{x}$

Oppgave B.6.3 a) $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ b) $-\frac{4\ln x}{x^3}$ c) $-\frac{4}{x}$ d) $\frac{20}{(5-2x)^2}$ e) $\frac{-x^4+14x^3-6x^2-2x+7}{(x^3-1)^2}$

Oppgave B.6.4 c) og f) kan forenkles til $t(x) = x^2$ og $f(x) = \frac{1}{x-1}$.
a) $\frac{2}{x}$ b) $2xe^{x^2}$ c) $2x$ d) $15x^4 - \frac{1}{x^2}$ e) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ f) $-\frac{1}{(x-1)^2}$ g) $\frac{2x(1-\ln(x^2+1))}{(x^2+1)^2}$ h) $\frac{8\ln(2x)}{x}$

Oppgave B.6.5 a) $e + 1$ b) $\frac{5}{2}\ln\frac{5}{2} + 2e$ c) $e + 2\ln 2$ d) 3 e) $\frac{e^2}{4}$

Oppgave B.6.6 f avtar for $x \in (-\infty, 1)$ og for $x \in (1, \infty)$, og vokser aldri (vi deriverte denne funksjonen i forrige oppgave f)). Funksjonen er ikke definert for $x = 1$ (tegn grafen på kalkulator).

Oppgave B.6.7 Spør noen av de andre om de liker/er enige i grafene dine.

Oppgave B.6.8 a) Positiv for $x \in (-\infty, -\frac{2}{\sqrt{a}}]$ og for $x \in [\frac{2}{\sqrt{a}}, \infty)$. Negativ for $x \in [-\frac{2}{\sqrt{a}}, \frac{2}{\sqrt{a}}]$. b) f avtar for $x \in (-\infty, 0]$ og f vokser for $x \in [0, \infty)$. c) $a = \frac{1}{2}$ (siden $f'(x) = 2ax$ og $f'(1) = 2a$)

Oppgave B.6.9 $0 < x < 4$. Største verdi er 4. Det er ingen minimumsverdi.

Oppgave B.6.10 Uttrykket er aldri negativt. Minimumsverdi er 0. Ingen maksimumsverdi.

Oppgave B.6.11 Funksjonen er ikke definert for $x = 0$. Funksjonen y er negativ for $x < 0$, og positiv for $x > 0$. Funksjonen har ikke noen maksimumsverdi og heller ingen minimumsverdi.

Det er ikke fasit til resten av oppgavene. Spør gruppelærer.

Register