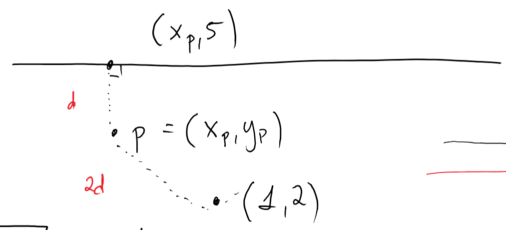
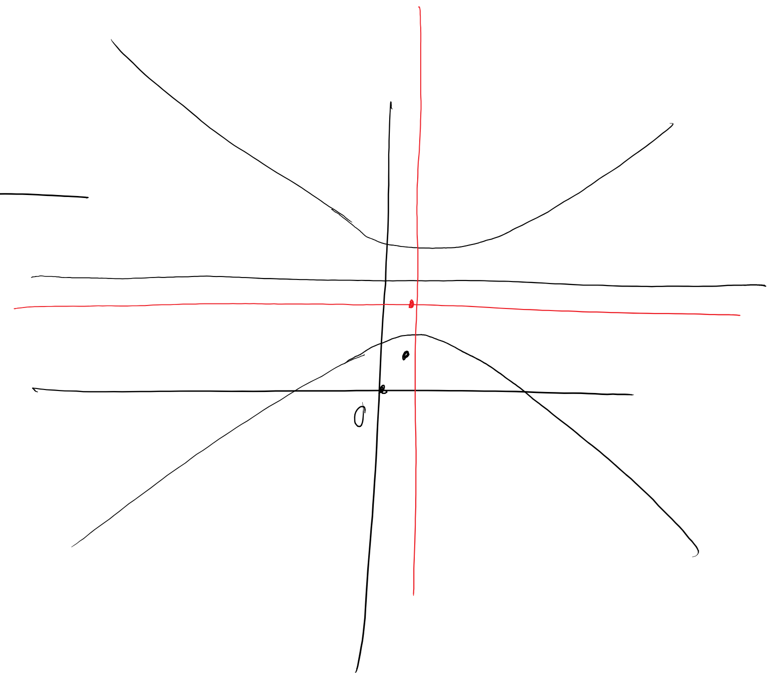
3. Finn ligningen og symmetriaksene til det geometriske stedet for punkter som har dobbelt så stor avstand til punktet $(1, 2)$ som til linja $y = 5$.





$$\underbrace{\sqrt{(x_p-1)^2+(y_p-2)^2}}_{2\,d} = 2\,\underbrace{|y_p-5|}_{d}$$

$$(x_p-1)^2+(y_p-2)^2 = 4(y_p-5)^2$$

$$x_p^2-2x_p+1+y_p^2-4y_p+4 = 4y_p^2-40y_p+100$$

$$x_p^2-2x_p \quad -3y_p^2+36y_p = 95$$

$$(x_p-1)^2-1 \quad -3(y_p-6)^2+3\cdot 6^2 = 95$$

$$(x_p-1)^2-3(y_p-6)^2 = 95+1-108 = -12 \quad \Big| \cdot \frac{-1}{12}$$

ligningen for stedet er:

$$\frac{3(y_p-6)^2}{12} - \frac{(x_p-1)^2}{12} = 1$$

$$\frac{(y_p-6)^2}{4} - \frac{(x_p-1)^2}{12} = 1$$

$$\boxed{\frac{(y_p-6)^2}{2^2} - \frac{(x_p-1)^2}{(2\sqrt{3})^2} = 1}$$

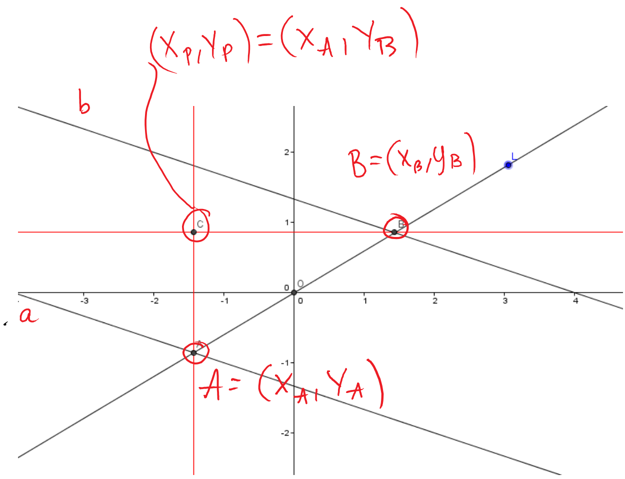
$$\sqrt{12} = \sqrt{2\cdot 2\cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Hyperbel

6. Gitt to rette linjer definert av ligningene

$$a: \quad x+3y+4=0 \quad \text{og} \quad b: \quad x+3y-4=0.$$

La l være ei linje gjennom origo som skjærer den første linja i A og den andre i B. Trekk ei linje gjennom A parallell med y-aksen og gjennom B parallell med x-aksen. Finn det geometriske stedet for skjæringspunktet mellom disse parallellene når l dreier seg om origo.



- ligning for linja l: $ex + fy = 0$ (ikke både e og $f = 0$)
- skjæringspunkt mellom l og a:
  - anta først at $f \neq 0$ $\quad y = \frac{-ex}{f}$ (sett inn i a)

$$x_A + 3\left(\frac{-ex_A}{f}\right) + 4 = 0$$
$$x_A\left(1 - \frac{3e}{f}\right) = -4$$
$$x_A = \frac{-4}{1 - \frac{3e}{f}}$$

  - hvis $f = 0$ så er l gitt ved $x = 0$
    så er $x_A = 0$

- skjæringspunkt mellom l og b.
  - anta at $e \neq 0$ $\quad x = \frac{-f}{e}y$ (sett inn i b)

$$-\frac{f y_B}{e} + 3y_B = 4$$
$$y_B\left(3 - \frac{f}{e}\right) = 4$$
$$y_B = \frac{4}{3 - \frac{f}{e}}$$

  - hvis $e = 0$, så er l gitt ved $y = 0$
    og $y_B = 0$

1) Se på tilfellet med $e, f \neq 0$ $\quad$ kall $\frac{e}{f} = t$
   - det geometriske stedet er gitt ved

$$(x_p, y_p) = (x_A, y_B) = \left(\frac{-4}{1-3t}, \frac{4}{3 - \frac{1}{t}}\right) = \left(\frac{-4}{1-3t}, \frac{4t}{3t-1}\right)$$
$$t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Vil finne ligning

$$x_p = \frac{-4}{1-3t}, \qquad 1 - 3t = \frac{-4}{x_p}$$
$$t = \left(\frac{4}{x_p} + 1\right)\frac{1}{3}$$

$x_p = \frac{4}{1-3t}$

$$t = \left(\frac{4}{x_p} + 1\right)\frac{1}{3}$$

$$y_p = \frac{4t}{3t-1} = \frac{4\left(\frac{4}{x_p}+1\right)\cdot\frac{1}{3}}{\cancel{3}\left(\frac{4}{x_p}+1\right)\frac{1}{\cancel{3}} - 1} = \frac{\frac{4}{3}\left(\frac{4}{x_p}+1\right)}{\frac{4}{x_p}}$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{4/3}{4/x_p} = \frac{4}{3} + \frac{x_p}{3}$$

ligningen for (x_p, y_p) er gitt ved

$$y_p = \frac{4}{3} + \frac{x_p}{3} \qquad (*)$$

- Hvis $e=0$ da var $y_B = 0$, sett $y=0$ inn i a.

$$x_A + 4 = 0$$
$$x_A = -4$$

punktet $(-4,0)$ er et punkt på det geometriske stedet (punktet tilfredstiller ligningen $(*)$)

- Hvis $f=0$, så var $x_A = 0$, sett inn $x=0$ i b

$\vdots$

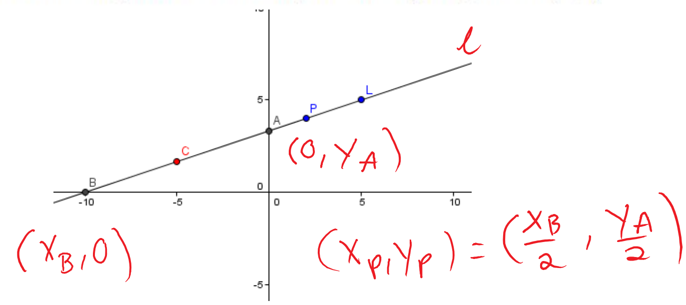
$$y_B = 4/3$$

$(0, 4/3)$ er et punkt på det geometriske stedet (punktet tilfredstiller lignin $(*)$)

ligning for det geometriske stedet er

$$\underline{\underline{y_p = \frac{4}{3} + \frac{x_p}{3}}}$$

10. Gjennom et punkt $(2,4)$ utenfor koordinataksene trekkes ei linje som skjærer koordinataksene i punktene A og B. La C være midtpunktet på linjestykket AB. Finn det geometriske stedet for punktet C når linja dreier seg om punktet $(2,4)$.



$$l: \quad e(x-2) + f(y-4) = 0$$

1) Vi finner y_A, ved å sette $x=0$ inn i ligningen for l.

2) Vi finner x_B ved å sette $y=0$ inn i ligningen for l.

- Holder å se på når $e \neq 0$ og $f \neq 0$
(forklar hvorfor!)

1) $$-e\,2 + f(y_A - 4) = 0$$

$$t = \frac{e}{f}$$

$$y_A - 4 = \frac{2e}{f} = 2t$$

$$y_A = 2t + 4$$

$$\underline{y_P(t) = t + 2} \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2) $$e(x_B - 2) - 4f = 0$$

$$(x_B - 2) = \frac{4f}{e} = \frac{4}{t}$$

$$x_B = \frac{4}{t} + 2$$

$$\underline{x_P(t) = \frac{2}{t} + 1} \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$x_p(t) = t$ ...

finner ligningen:

$t = y_p - 2$ sett inn i lign. for x_p

$$x_p = \frac{2}{y_p - 2} + 1$$

$$(x_p - 1) = \frac{2}{y_p - 2}$$

$$\boxed{(x_p - 1)(y_p - 2) = 2}$$

Alternativ skrivemåte hvis geogebra ikke skjønner

$$y_p - 2 = \frac{2}{x_p - 1}$$

$$y_p = \frac{2}{x_p - 1} + 2$$

$$= 2\left(\frac{1}{x_p - 1} + 1\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{x_p - 1} + \frac{x_p - 1}{x_p - 1}\right)$$

$$= 2\left(\frac{x_p}{x_p - 1}\right)$$