Geometri-MAT 0100V

våren 2015

Kristian Ranestad

Matematisk institutt, UiO

Innledning

Dette kompendiet i Euklidsk plangeometri er satt sammen til bruk i kurset MAT 0100V. Det blander en syntetisk og en analytisk tilnærming til plangeometri og er spesielt å anbefale som bakgrunn for geometriundervisning i skolen.

Kompendiet er organisert i seks kapitler.

De to første kapitlene behandler trekanter og sirkler uten koordinater (syntetisk geometri). I denne delen legges grunnlaget for de geometriske resonnementene som brukes senere. Med utgangspunkt i formlikhetssetningene for trekanter viser vi og bruker Menelaos' og Cevas setninger for trekanter og setningene for periferivinker og punkts potens for sirkler. De to kapitlene avsluttes med bevis for hhv. Pappos' setning og Pascals setning for sirkler.

I det tredje kapitlet introduseres først geometriske steder, og så koordinater og ligningen til linjer og kjeglesnitt. I det fjerde kapitlet vises ulike praktiske anvendelser av kjeglesnitt, mens det femte kapitlet gir flere eksempler på geometriske steder knyttet til linjer og kjeglesnitt. I det siste kapitlet viser vi først analytisk hvordan kjeglesnitt er ulike snitt av en kjegle, deretter hvordan Dandelinske kuler kan gi et syntetisk bevis for det samme.

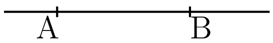
Det fjerde og femte kapitlet er i hovedsak tilleggstoff i kurset. Bare smakebiter vil bli tatt opp på forelesningene i kurset og vil være pensum til eksamen.

1 Trekantgeometri

Den første delen om trekanter begynner med mål for lengde og vinkler.

1.1 Lengdemål og vinkelmål

Geometri betyr landmåling. Derfor er det naturlig i et geometrikurs å starte med lengdemål. Linjestykker har lengdemål. Et linjestykke er avgrenset av to punkter.

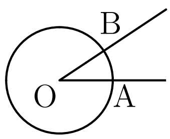


Figur 1: Linja gjennom AB

Linjestykket mellom punktene A og B i planet kaller vi AB, og med linja gjennom AB mener vi linja gjennom punktene A og B.

Lengden til linjestykket mellom A og B betegner vi også med AB. Denne lengden måler vi med en valgt lengdeenhet, f. eks centimeter eller meter. Lengdemålet blir derfor et tall som angir forholdet mellom lengden og en lengdeenhet. Ofte vil vi undertrykke lengdeenheten, og oppgi lengdene med et positivt reelt tall. Det vil si at om en måer i centimeter undertrykker vi ofte benevningen, slik at om lengden fra A til B er 3 cm, skriver vi ofte $AB = 3$.

Vinkler kan også måles med en valgt enhet, som når en måler en vinkel i grader. Her er der imidlertid et annet mål som er mer naturlig, nemlig radianer. Grunnen til at det er mer naturlig, er at vinkelmålet i radianer er forholdstallet mellom lengden til den sirkelbuen som vinkelen spenner over og radien til denne sirkelen.



$$\angle AOB = \frac{\cup AB}{OA}$$

Figur 2: Vinkel $\angle AOB$ målt i radianer

Siden dette forholdstallet er uavhengig av radien til sirkelen, blir det et absolutt mål uavhengig av hvilken lengdeenhet en bruker. Dersom radius i sirkelen er 1, blir omkretsen til hele sirkelen 2π, så en rett vinkel får måltall $\frac{\pi}{2}$. Vi vil som regel oppgi vinkelmål i radianer. Dersom A, B, C er tre punkter i planet, vil linjestykkene AB og BC danne en vinkel som vi betegner med $\angle ABC$. I radianer vil denne vinkelen ha mål mellom 0 og π.

Lengde- og vinkelmål regnes med positive reelle tall. I enkelte situasjoner er det nyttig å vite hvilken retning en måler lengden eller vinkelen. Det er bakgrunnen for begrepet fortegnsmål for et linjestykke.

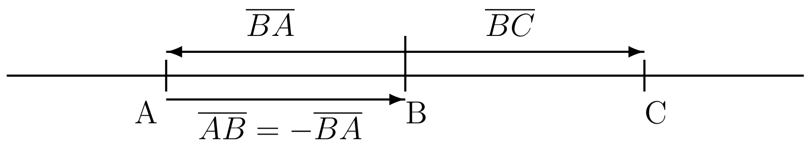
Definisjon 1.1. Fortegnsmål for linjestykker En valgt retning langs ei linje kalles en **orientering** av linja. Fortegnsmålet til et linjestykke AB på linja er lengden til et linjestykket AB regnet med positivt fortegn dersom retningen fra A til B følger orienteringen, og med negativt fortegn dersom den ikke gjør det. Vi betegner fortengsmålet med $\overline{AB}$. Tallverdien $|\overline{AB}|$ betegner vi på samme måte som linjestykket selv med AB.

For tre **kollineære** punkter A, B, C, det vil si tre punkter som ligger på samme linje, er den grunnleggende egenskapen til fortegnsmålet at

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

uavhengig av orientering, rekkefølge og om noen av punktene er like. Spesielt er

$$\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA} = 0.$$



Figur 3: Tre punkter A, B og C på linje

Den grunnleggende egenskapen kan også skrives slik:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{AC} + \overline{CA} = 0.$$

For hvert punkt O på linja gjennom AB kan vi derfor skrive

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

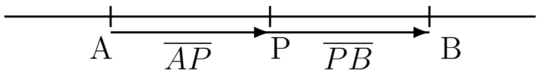
Fortegnsmål for linjestykker gir en nyttig definisjon av delingsforholdet som et punkt på ei linje deler et linjestykke på linja i:

Definisjon 1.2. Hvis A, B, P er tre forskjellige kollineære punkter, sier vi at P **deler** AB **i forholdet**

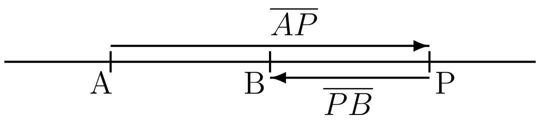
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}.$$

Med denne definisjonen ser en lett at forholdet er negativt dersom P ligger utenfor linjestykket AB (deler AB utvendig) og positivt dersom P ligger mellom A og B (deler AB innvendig).

Denne definisjonen har en naturlig utvidelse til hele linja dersom en tillater ∞ som verdi. Det skal vi la ligge her. Viktigere er



Figur 4: P deler AB innvendig og $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} > 0$



Figur 5: P deler AB utvendig og $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} < 0$

Hjelpesetning 1.3. *Et punkt P på linja gjennom AB er entydig bestemt av delingsforholdet $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$.*

Bevis. La P og Q være to punkter på linja gjennom AB med

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}}.$$

Legg til 1 på begge sider:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} + \frac{\overline{PB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} + \frac{\overline{QB}}{\overline{QB}},$$

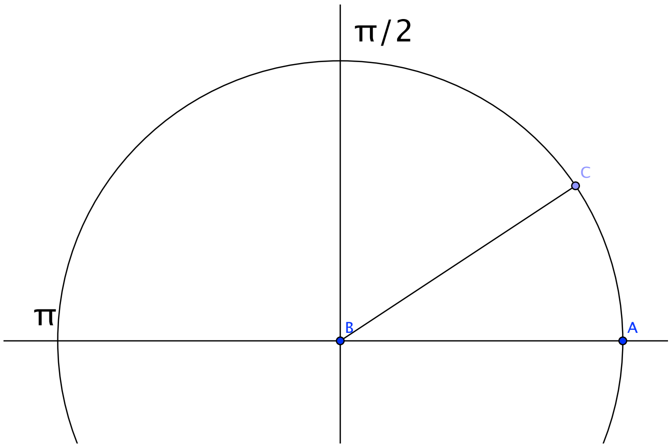
da får vi

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{QB}}.$$

Dermed er $\overline{PB} = \overline{QB}$, og setningen følger. $\square$

Vinkelmål kan også defineres med fortegn. Dette skjer når en velger orientering som en retning for rotasjon rundt et punkt, med klokka eller mot klokka.

Det er vanlig konvensjon å si at rotasjon mot klokka er positiv. Vinkelmålet er da mellom 0 og 2π for $\angle ABC$, når en går fra AB til BC i positiv omdreiningsretning om punktet B. Noen foretrekker vinkelmål $\leq \pi$ i tallverdi, og bruker derfor intervallet $(-\pi, \pi]$.



Figur 6: Vinkler målt i radianer mellom 0 og 2π

1.1.1 Oppgaver

1. Vis at om A, B, C, D er kollineære, så er
$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{BD} \cdot \overline{CA} + \overline{CD} \cdot \overline{AB} = 0.$$
2. La A og B være punktene 0 og 1 på tallinja, og la P være et tredje punkt x. Utrykk x ved hjelp av forholdstallet $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$.

1.2 Trekanter

I dette avsnittet skal vi se noen velkjente og noen kanskje mindre kjente resultater fra trekantgeometrien.

Dersom tre punkter A, B, C ikke er kollineære, altså ikke ligger på linje, betegner vi trekanten med hjørner i disse punktene med $\triangle ABC$. I hvert hjørne har trekanten en vinkel. Vinkelen i hjørnet A har vinkelmål som vi betegner med $\angle A$ og ligger mellom 0 og π. To vinkler er like dersom de har samme vinkelmål, tilsvarende er to linjestykker like, dersom de har samme lengdemål. Målt i radianer kjenner vi følgende setning om vinkelsummen i en trekant.

Setning 1.4. (Vinkelsumsetningen) *I en trekant $\triangle ABC$ er summen av vinklene*
$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi.$$

Bevis. Se oppgavene. □

Definisjon 1.5. (Kongruente trekanter) To trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er kongruente, dersom vinklene er parvis like, altså $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ og $\angle C = \angle F$ og de tilsvarende sidekantene er like, det vil si

$$AB = DE, BC = EF, AC = DF.$$

Setning 1.6. (Kongruenssetningen) *To trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er kongruente hvis og bare hvis et av følgende fire kriterier er oppfyllt:*

1. *Trekantene har parvis like sider.*
2. *I de to trekantene er en vinkel og de tilhørende sidekantene like, for eksempel er $\angle A = \angle D$ og $AB = DE$ og $AC = DF$*
3. *I de to trekantene er to vinkler og den mellomliggende sidekanten like, for eksempel er $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ og $AB = DE$.*
4. *I de to trekantene er to vinkler og den motstående sidekanten til den største av disse like, for eksempel er $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle A > \angle B$ og $BC = EF$.*

Vi skal ta denne setningen for gitt her, uten bevis. Det er en nyttig øvelse å prøve å gi et bevis, for å kjenne på spørsmålet: Hva bygger jeg beviset på? Er det noen mer grunnleggende setninger som jeg bruker når jeg vil vise denne setningen? Euklid var opptatt av dette i sine Elementer". Samme problemstilling dukker opp om en skal vise formlikhetssetningen nedenfor. Den er gitt med et ufullstendig bevis.

Legg merke til at om to trekanter har parvis like vinkler, så er de ikke nødvendigvis kongruente.

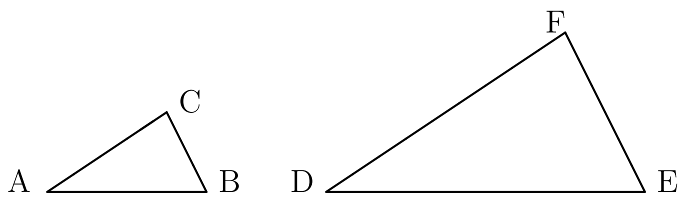
Definisjon 1.7. (Formlike trekanter) To trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er formlike, dersom vinklene er parvis like, altså $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ og $\angle C = \angle F$ og de tilsvarende sidekantene er proporsjonale, det vil si

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}.$$

I skolematematikken bruker vi ofte følgende setning for formlike trekanter.

Setning 1.8. (Formlikhetsetningen) *To trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er formlike hvis og bare hvis et av følgende fire kriterier er oppfyllt:*

1. *Trekantene har to parvis like vinkler.*
2. *Trekantene har en lik vinkel, og de tilhørende sidekantene er proporsjonale, for eksempel er $\angle A = \angle D$ og $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$*



Figur 7: Formlike trekanter

3. *Sidekantene er parvis proporsjonale, for eksempel er* $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$.

4. *Forholdet mellom lengdene til sidekantene er det samme i de to trekantene, for eksempel er* $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ *og* $\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$

Bevis. **(Ufullstendig)** De to kriteriene 3 og 4 er ekvivalente, siden en kan gå fra det ene til det andre ved enkel algebraisk manipulasjon. Prøv! Videre vil to trekanter som er formlike opplagt fylle kriteriene 1, 2 og 3. Så det som gjenstår å vise at to trekanter som oppfyller krav 1,2 eller 3 også er formlike. Når det gjelder 1 er det klart at når to vinkler er like, må også den tredje være det, siden summen av de tre er π. Å vise at sidekantene er parvis proporsjonale, krever imidlertid noe mer. For å vise dette helt fra grunnen må en bygge opp aritmetikk med linjestykker helt systematisk (se Hartshorne's bok [1]). Dette skal vi ikke gjøre her, men heller bruke resultatet som et grunnleggende prinsipp i plangeometri. Når jeg lar dette stå som setning, er det fordi det altså er mulig å vise det ut fra mer grunnleggende prinsipper.

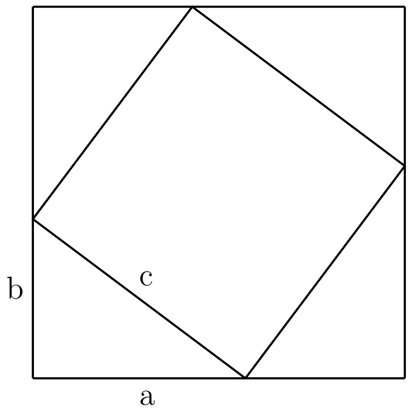
For å vise at to trekanter som oppfyller 2 er formlike forlenger vi om nødvendig sidekanten AB i trekanten $\triangle ABC$ til B', slik at $AB' = DE$, og trekker ei linje gjennom B' parallell med BC. La C' være skjæringspunktet mellom denne parallellen og forlengelsen av linja gjennom AC. Da har $\triangle ABC$ og $\triangle AB'C'$ to like vinkler og er derfor formlike. Det vil si at $\frac{AC}{AC'} = \frac{AC}{DF}$, så $AC' = DF$ og trekantene $\triangle AB'C$ og $\triangle DEF$ er kongruente etter setning 1.6. Da kan vi konkludere at $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er formlike.

Beviset for at to trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ som oppfyller 3, er formlike, er helt tilsvarende og overlates til leseren. □

Til slutt i dette innledende avsnittet gir vi et bevis for Pytagoras som kombinerer et geometrisk argument med algebra. Setningen gjelder en rettvinklet trekant, en trekant der en av vinklene er $\frac{\pi}{2}$. De tilhørende sidekantene kalles kateter, og den motstående sidekanten kalles hypotenusen.

[1] R. Hartshorne, *Companion to Euclid* Berkeley Mathematics Lecture Notes. **9** AMS 1997

Setning 1.9. (Pytagoras) *I en rettvinklet trekant er kvadratet av sidelengden til hypotenusen lik summen av kvadratene av sidelengdene til katetene.*



Figur 8: Bevis av Pytagoras

Bevis. På figur 8 har katetene sidelengde a og b, mens hypotenusen har sidelengde c. Siden de to spisse vinklene i trekanten har vinkelsum $\frac{\pi}{2}$, er firkanten i midten av figuren et kvadrat med sidelengde c. Det store kvadratet har areal $(a+b)^2$, mens trekanten har areal $\frac{ab}{2}$, så arealet til det lille kvadratet er også lik $(a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$. Men arealet er selvsagt uavhengig av hvordan vi regner det ut så

$$a^2 + b^2 = c^2$$

som er det vi skulle vise. □

Fra disse klassiske setningene skal vi i neste avnitt vise to andre setninger som på en slående måte kombinerer geometriske egenskaper med algebraiske relasjoner. Setningene vi skal se på er ikke like godt kjent som Pytagoras, men bruker også lengder av linjestykker, til og med med fortegn, altså fortegnsmål slik vi introduserte det i avsnitt 1.1.

1.2.1 Oppgaver

1. Bruk kongruenssetningen til å vise at to vinkler i en trekant er like hvis og bare hvis to sider i trekanten er like.

2. Finn to trekanter med en lik vinkel og to parvis like sidekanter som ikke er kongruente.

1.3 Menelaos og Ceva

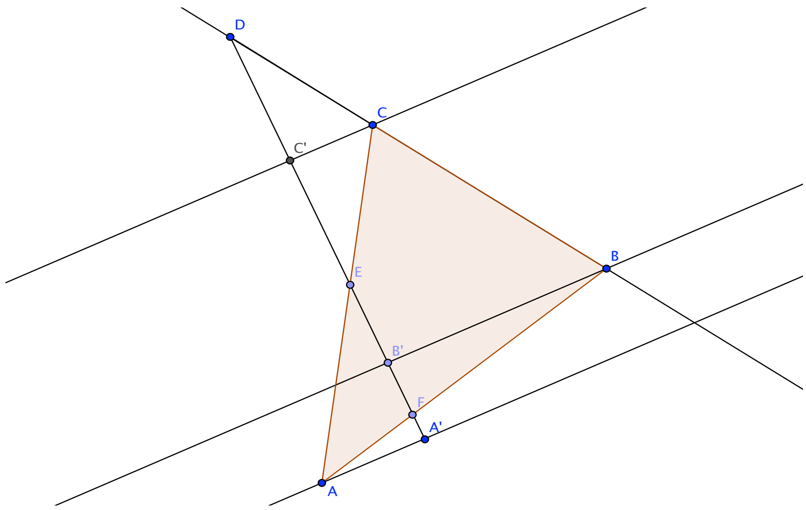
Vi skal se på setningene til Menelaos og Ceva som på en slående måte kombinerer geometriske egenskaper med algebraiske relasjoner. Denne kombinasjonen er selve styrken i analytisk geometri, geometri med koordinater. Disse setningene kan nærmest sees på som forløpere til analytisk geometri, selv om bare den ene er det i tid. De bruker ikke koordinater, men allikevel lengder av linjestykker, til og med med fortegn.

Tre punkter A, B, C som ikke ligger på linje er hjørner i en trekant som vi betegner $\triangle ABC$.

Definisjon 1.10. Et punkt på linja gjennom AB som ikke faller sammen med noen av hjørnene, kalles et **Menelaos-punkt** til trekanten for siden AB.

Setning 1.11. (Menelaos). *Tre Menelaos-punkter D, E, F for sidene BC, CA, AB til trekanten $\triangle ABC$ er kollineære hvis og bare hvis*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1.$$



Figur 9: Menelaos' setning

Bevis. Anta at Menelaos-punktene D, E, F ligger på linje. Vi skal regne ut produktet av delingsforholdene. Først finner vi fortegnet til produktet. Siden punktene ligger på linje, vil ett eller alle tre punktene ligge utenfor trekanten. Derfor vil enten ett eller tre av punktene dele sin side negativt, så produktet av delingsforholdene er også negativt. Vi kan derfor konsentrere oss om absoluttverdiene til delingsforholdene i resten av denne delen av beviset.

Trekk høydene fra hjørnene i trekanten ned til linja gjennom D, E, F og kall skjæringspunktene for A', B' og C'. Da er $\triangle BB'D$ og $\triangle CC'D$ formlike siden de er rettvinklede og i tillegg har en vinkel felles. Tilsvarende er også $\triangle AA'E$ og $\triangle CC'E$, og $\triangle AA'F$ og $\triangle BB'F$ formlike. Dermed er

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BB'}{CC'}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{CC'}{AA'}, \quad \frac{AF}{FB} = \frac{AA'}{BB'}.$$

Da blir

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \frac{BB'}{CC'} \cdot \frac{CC'}{AA'} \cdot \frac{AA'}{BB'} = 1$$

og bare hvis-delen av setningen følger.

Anta på den andre siden at D, E og F er Menelaos-punkter for sidene BC, CA, AB og at

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1.$$

(Nå bruker vi fortegnsmål igjen, og ikke absoluttverdien til delingsforholdene). La F' være skjæringspunktet mellom linja gjennom DE og linja gjennom AB.

(Hvis disse linjene er parallelle kan en vise at

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1.$$

Dette delingsforholdet forekommer ikke uten at vi utvider linja med et uendelig fjernt punkt. Det gjøres i projektiv geometri, som vi ikke skal komme inn på her.)

Med punktet F' vet vi av første delen at

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} = -1.$$

Ved å forkorte får vi derfor at

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}}.$$

Men av setningen over er punktene F og F' på linja gjennom AB derfor like, og Menelaos' setning følger. □

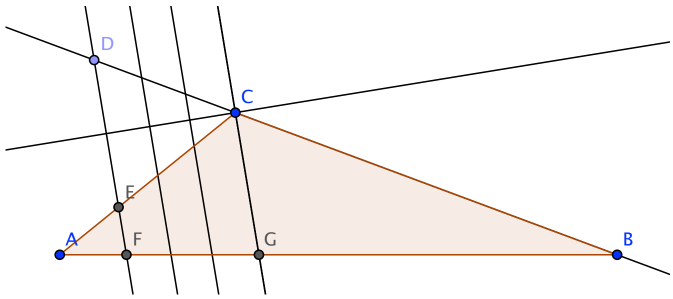
Dersom linja gjennom D og E er parallell med halveringslinja til vinkelen C er $DC = EC$ (se Figur 10).

Når denne linja nærmer seg C vil derfor produktet

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{BD}{EA}$$

nærme seg

$$\frac{BC}{CA}.$$



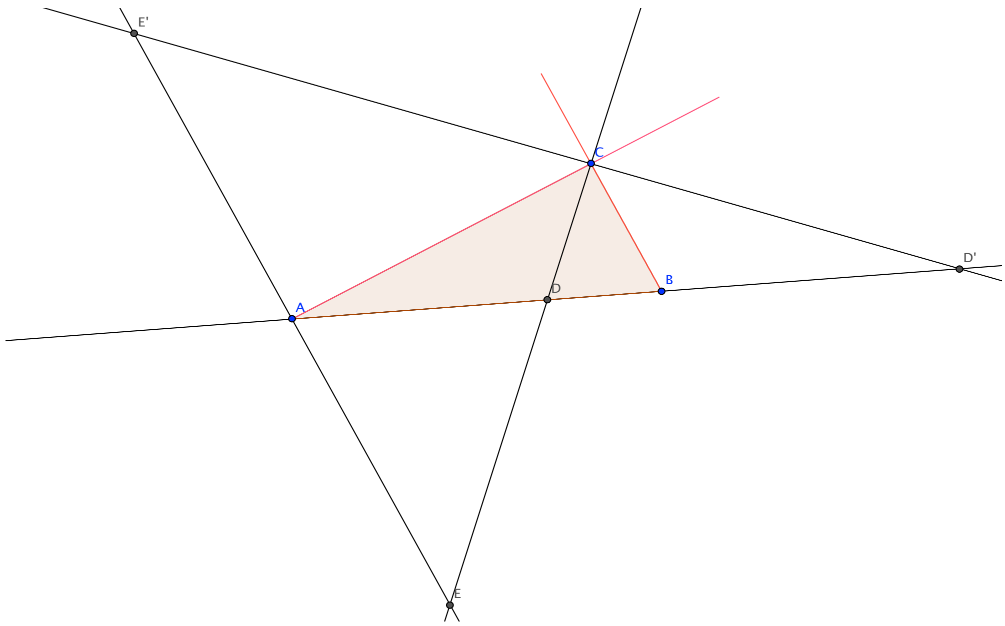
Figur 10: CG halverer $\angle ACB$

Så når linja gjennom CF halverer vinkelen C så får vi som et grensetilfelle av Menelaos' setning

$$\frac{BC}{CA} = \frac{FB}{AF}.$$

Dette er en del av en

Setning 1.12. (Halveringslinjer). *I en trekant $\triangle ABC$ vil ei linje gjennom hjørnet C dele linjestykket AB innvendig i forholdet $\frac{AC}{CB}$ hvis og bare hvis linja halverer vinkelen i C. Tilsvarende vil ei linje gjennom hjørnet C dele linjestykket AB utvendig i forholdet $-\frac{AC}{CB}$ hvis og bare hvis linja halverer den utvendige vinkelen i hjørnet C.*



Figur 11: Setning om indre og ytre halveringslinje

Bevis. La D være skjæringspunktet mellom linja gjennom C og linja gjennom AB. Siden vi vet at delingsforholdet $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$ er positivt dersom D ligger mellom A og B og negativt dersom D ligger utenfor AB er fortegnene i setningen riktige. I resten av beviset er det derfor tilstrekkelig å regne med absoluttverdier.

Trekk nå linja gjennom A parallelt med BC. Denne skjærer linja gjennom CD i E. Da er trekantene $\triangle ADE$ og $\triangle BDC$ formlike, så

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{BC}.$$

Men $AE = AC$ hvis og bare hvis linja gjennom CD halverer vinkelen i C, så setningen følger. For den utvendige halveringslinja er beviset helt tilsvarende. La D' være skjæringspunktet mellom linja gjennom C og linja gjennom AB som ligger utenfor trekanten. La punktet E' være skjæringspunktet mellom linja gjennom A parallelt med BC og linja gjennom CD'. Erstatt nå E med E' og D med D' i beviset over. □

Definisjon 1.13. Ei linje gjennom et hjørne i en trekant $\triangle ABC$, som ikke faller sammen med linja til noen av sidene i trekanten, kalles ei **Ceva-linje** til trekanten gjennom dette hjørnet .

Ei Ceva-linje gjennom A skjærer linja gjennom BC i Menelaos-punktet D (hvis den ikke er parallell med BC). Ceva-linja identifiseres derfor ofte med linja gjennom AD.

En fin anvendelse av Menelaos' setning er

Setning 1.14. (Ceva) *Dersom tre Ceva-linjer AD, BE, CF til trekanten $\triangle ABC$ er konkurrente, d.v.s. møtes i et felles punkt, så er*

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1.$$

Omvendt, dersom denne relasjonen holder, er Ceva-linjene parallelle eller konkurrente.

Bevis. Vi antar først at Ceva-linjene er konkurrente.

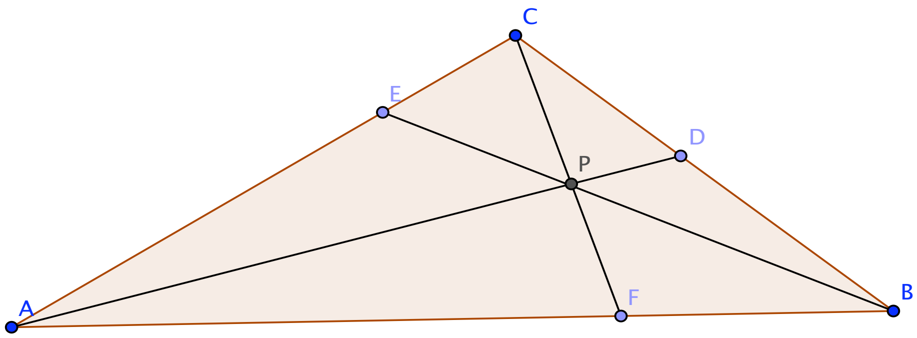
La P være skjæringspunktet mellom Ceva-linjene AD, BE og CF. Ved å anvende Menelaos' setning på $\triangle ABD$ og $\triangle ADC$ får vi

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{DP}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = -1$$

Produktet av de to sidene blir 1 og flere faktorer kan forkortes:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{DP}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{PD}}$$

$$= \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = 1$$



Figur 12: Cevas setning

så første del av setningen følger.

Anta omvendt at produktet av delingsforholdene er 1 og at Ceva-linjene ikke er parallelle (hvis de er parallelle, vis at produktrelasjonen holder (oppgave 8)). Trekk linja gjennom C og skjæringspunktet mellom Ceva-linjene AD og BE til skjæring F' med siden AB. Da er AF' en ny Ceva-linje gjennom A. Helt tilsvarende beviset for andre del av Menelaos' setning bruker vi produktrelasjonen innsatt F og F' til å vise at F og F' deler AB i samme forhold. Av setningen om entydighet av slike delingsforhold konkluderer vi at F og F' må være samme punkt. Dermed følger også andre delen av setningen. □

En annen fin anvendelse av Menelaos' setning er

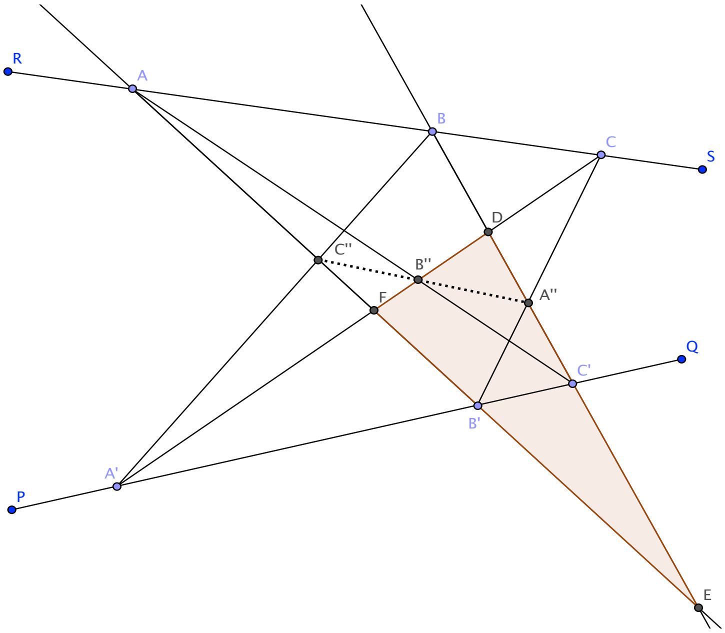
Setning 1.15. (**Pappos**) *Dersom A, B, C og A', B', C' er to tripler av kollineære punkter på to forskjellige linjer, så er skjæringspunktene C'', A'', B'' mellom linjene gjennom AB' og $A'B$, BC' og $B'C$, CA' og $C'A$ kollineære.*

Bevis. Tegn figur med skjæringspunkt D mellom linjene gjennom BC' og CA', skjæringspunkt E mellom linjene gjennom AB' og BC' og skjæringspunkt F mellom linjene gjennom CA' og AB'. Menelaos' setning brukt på triplene av Menelaos-punkter

$$\{A, B, C\} \quad \{A', B', C'\} \quad \{A, B'', C'\}, \quad \{A', B, C''\} \quad \text{og} \quad \{A'', B', C\}$$

til trekanten $\triangle DEF$ gir

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{AE}} = -1,$$
$$\frac{\overline{EC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DA'}}{\overline{A'F}} \cdot \frac{\overline{FB'}}{\overline{B'E}} = -1,$$



Figur 13: Pappos' setning

$$\frac{\overline{EC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DB''}}{\overline{B''F}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{AE}} = -1,$$

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{DA'}}{\overline{A'F}} \cdot \frac{\overline{FC''}}{\overline{C''E}} = -1$$

og

$$\frac{\overline{EA''}}{\overline{A''D}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{FB'}}{\overline{B'E}} = -1.$$

Sammenligner vi produktet av de tre siste venstresidene med produktet av de to første får vi:

$$\frac{\overline{EC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DB''}}{\overline{B''F}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{EB}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{DA'}}{\overline{A'F}} \cdot \frac{\overline{FC''}}{\overline{C''E}} \cdot \frac{\overline{EA''}}{\overline{A''D}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{FB'}}{\overline{B'E}}$$
$$= -\frac{\overline{EB}}{\overline{BD}} \cdot \frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{EC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DA'}}{\overline{A'F}} \cdot \frac{\overline{FB'}}{\overline{B'E}}$$

Denne ligningen kan vi redusere til:

$$\frac{\overline{DB''}}{\overline{B''F}} \cdot \frac{\overline{FC''}}{\overline{C''E}} \cdot \frac{\overline{EA''}}{\overline{A''D}} = -1.$$

Menelaos-punktene A'', B'', C'' til trekanten $\triangle DEF$ er derfor kollineære. $\square$

1.3.1 Oppgaver

1. Vis at om A, B, C, D er kollineære, så er

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} + \overline{BD} \cdot \overline{CA} + \overline{CD} \cdot \overline{AB} = 0.$$

2. Vis at halveringslinjene til to vinkler i en trekant og halveringslinja til den utvendige vinkelen i det tredje hjørnet skjærer sine respektive motsatte linjer i trekanten i kollinear punkter.

3. Vis at halveringslinjene til de utvendige vinklene i en trekant skjærer sine respektive motsatte linjer i trekanten i kollineære punkter.

4. Vis følgende generalisering av Menelaos' setning: For en firkant $ABCD$ vil punktene A', B', C', D' på linjene gjennom AB, BC, CD og DA være kollineære bare hvis

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{A'B}} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{B'C}} \cdot \frac{\overline{CC'}}{\overline{C'D}} \cdot \frac{\overline{DD'}}{\overline{D'A}} = 1.$$

5. Bruk Cevas setning til å vise at

   a) Høydene i en trekant er konkurrente.

   b) Medianene i en trekant er konkurrente.

   c) Vinklenes halveringslinjer i en trekant er konkurrente.

6. For to parallellogrammer $ABCD$ og $A'BC'D'$ med felles vinkel i B, vis at linjene gjennom DD', $A'C$ og AC' er konkurrente.

7. La AD, BE og CF være tre Ceva-linjer til en trekant $\triangle ABC$ som er konkurrente. Anta at linjene gjennom EF, FD, og DE skjærer linjene gjennom BC, CA og AB respektivt i punktene D', E' og F'. Vis at D', E' og F' er kollineære.

8. Vis at hvis tre Ceva-linjer til en trekant er parallelle så er produktrelasjonen mellom delingsforholdene i Cevas setning oppfyllt.

2 Sirkler

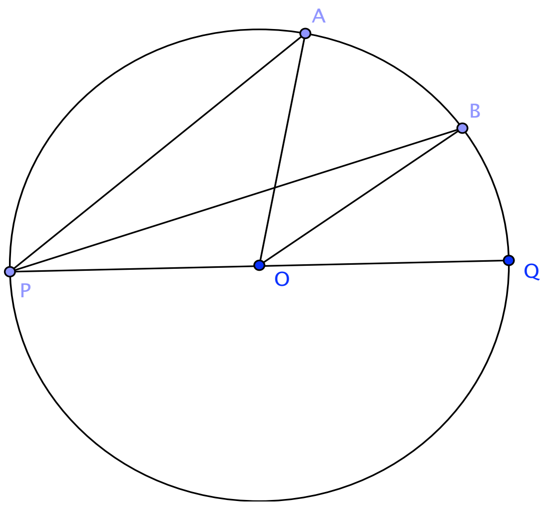
2.1 Punkts potens og Pascal

I dette avsnittet skal vi vise de sentrale setningene i sirkelgeometrien om periferivinkler og punkts potens. Disse anvender vi sammen med Menelaos' setning i beviset for Pascal's setning for sirkelen. Denne setningen representerer sammen med Pappos' setning i forrige avsnitt to spesialtilfeller av Pascals setning for kjeglesnitt. Beviset for denne setningen i siste kapittel bygger i vesentlig grad på disse spesialtilfellene.

Dersom punktene A, B, C ikke er kollineære, betegner vi med $\angle BAC$ vinkelen med toppunkt i A og vinkelbein langs AB og AC.

I en sirkel kalles en vinkel med toppunkt i sentrum av sirkelen for en **sentralvinkel**. Dersom sentrum er O og vinkelbeina spenner over buen mellom A og B på sirkelperiferien, identifiserer vi sentralvinkelen med $\angle AOB$. En vinkel med toppunkt i periferien og med vinkelbein som skjærer periferien i to andre punkter kalles en **periferivinkel** til sirkelen. Som grensetilfelle inkluderer vi tilfellet der det ene vinkelbeinet tangerer sirkelen i toppunktet. Dersom toppunktet er P og vinkelbeina spenner over buen fra A til B på sirkelperiferien, identifiserer vi vinkelen med $\angle APB$.

Setning 2.1. (Periferivinkler) *I en sirkel er en sentralvinkel dobbelt så stor som en periferivinkel som spenner over samme bue. Spesielt er periferivinkler som spenner over samme bue like store.*



Figur 14: Setning om periferivinkler

Bevis. Lag figur med en sentralvinkel $\angle AOB$ og en periferivinkel $\angle APB$, forleng linja gjennom PO til skjæringspunktet Q med periferien.

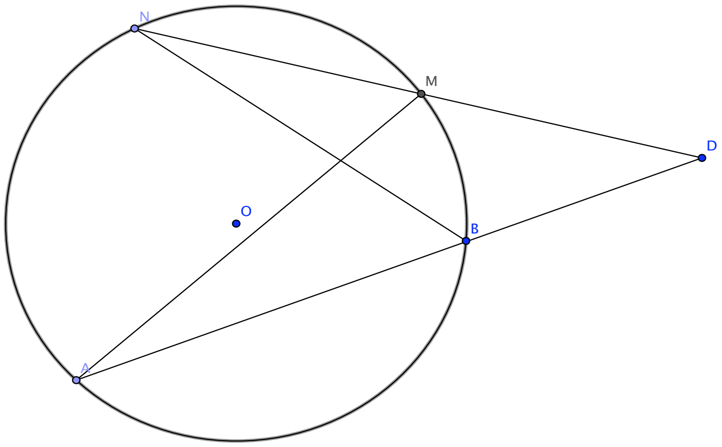
Vinkelen $\angle AOQ$ er nabovinkel til $\angle AOP$ i $\triangle AOP$, og vinkelen $\angle BOQ$ er nabovinkel til $\angle BOP$ i $\triangle BOP$.

Men trekantene $\triangle AOP$ og $\triangle BOP$ er begge likebeinte trekante, så $\angle AOQ = 2\angle APO$ og $\angle BOQ = 2\angle BPO$. Derfor er

$$\angle AOB = \angle AOQ - \angle BOQ = 2\angle APO - 2\angle BPO = 2\angle APB$$

og setningen følger. □

Setning 2.2. (Punkts potens) *La P være et punkt og la Σ være en sirkel i planet. La l være ei linje gjennom P med skjæringspunkter A og B med Σ. Da er produktet $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ uavhengig av posisjonen til linja l, og kalles* **punktet P's potens m.h.p. sirkelen**.



Figur 15: Punkts potens

Bevis. Tegn figur og trekk ei linje gjennom P (D i figur over) forskjellig fra l som har skjæringspunkter M og N med sirkelen. Trekk linjene MA og NB. I trekantene $\triangle MPA$ og $\triangle BPN$ er vinkelen i P felles. Videre spenner periferivinklene $\angle MNB$ og $\angle MAB$ over samme bue, så av setningen om periferivinkler er de like. Derfor er $\triangle MPA$ og $\triangle BPN$ formlike. Men da er

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PN}},$$

med fortegn til og med (alle linjemålene har samme fortegn dersom P ligger utenfor sirkelen, mens to og to har samme fortegn dersom P ligger inne i sirkelen). Så

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PM} \cdot \overline{PN}$$

er uavhengig av linja l. □

Legg merke til at punktet P's potens m.h.p. Σ er positiv dersom P ligger utenfor sirkelen, 0 dersom P ligger på sirkelen og negativ dersom P ligger inne i sirkelen.

Setning 2.3. (Pascals setning for en sirkel) *La A, B, C, D, E, F være 6 forskjellige punkter på en sirkel. Da er skjæringspunktene mellom linjene gjennom AB og DE, BC og EF, FA og CD (dersom ingen av disse parene er parallelle) kollineære.*

Bevis. Tegn figur med skjæringspunkter henholdsvis L, M og N. Forleng linjene gjennom AB og CD til skjæringspunktet R, linjene gjennom CD og EF til skjæringspunktet S, og linjene gjennom AB og EF til skjæringspunktet T.

Menelaos' setning for triplene av Menelaos-punkter $\{E, L, D\}$, $\{F, A, N\}$ og $\{M, B, C\}$ til trekanten $\triangle RST$ sier nå at

$$\frac{\overline{SE}}{\overline{ET}} \cdot \frac{\overline{TL}}{\overline{LR}} \cdot \frac{\overline{RD}}{\overline{DS}} = -1,$$

$$\frac{\overline{SF}}{\overline{FT}} \cdot \frac{\overline{TA}}{\overline{AR}} \cdot \frac{\overline{RN}}{\overline{NS}} = -1$$

og

$$\frac{\overline{SM}}{\overline{MT}} \cdot \frac{\overline{TB}}{\overline{BR}} \cdot \frac{\overline{RC}}{\overline{CS}} = -1.$$

Produktet av disse blir

$$\frac{\overline{SE}}{\overline{ET}} \cdot \frac{\overline{TL}}{\overline{LR}} \cdot \frac{\overline{RD}}{\overline{DS}} \cdot \frac{\overline{SF}}{\overline{FT}} \cdot \frac{\overline{TA}}{\overline{AR}} \cdot \frac{\overline{RN}}{\overline{NS}} \cdot \frac{\overline{SM}}{\overline{MT}} \cdot \frac{\overline{TB}}{\overline{BR}} \cdot \frac{\overline{RC}}{\overline{CS}} = -1,$$

som vi kan skrive

$$\frac{\overline{SM}}{\overline{MT}} \cdot \frac{\overline{TL}}{\overline{LR}} \cdot \frac{\overline{RN}}{\overline{NS}} = -\frac{\overline{DS}}{\overline{RD}} \cdot \frac{\overline{ET}}{\overline{SE}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{TA}} \cdot \frac{\overline{FT}}{\overline{SF}} \cdot \frac{\overline{BR}}{\overline{TB}} \cdot \frac{\overline{CS}}{\overline{RC}}.$$

På den andre siden sier setningen om et punkts potens m.h.p. sirkelen brukt på punktene R, S, T at

$$\overline{RA} \cdot \overline{RB} = \overline{RC} \cdot \overline{RD},$$

$$\overline{SC} \cdot \overline{SD} = \overline{SE} \cdot \overline{SF}$$

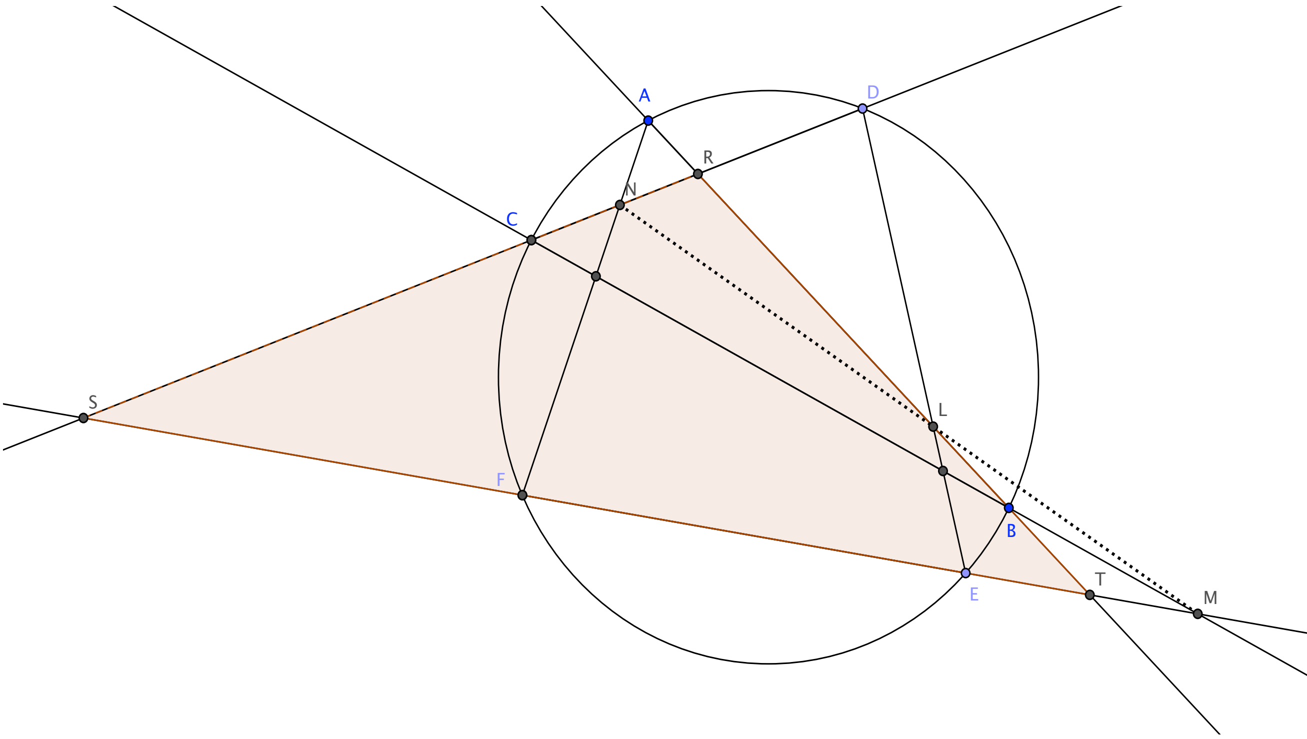
og

$$\overline{TA} \cdot \overline{TB} = \overline{TE} \cdot \overline{TF}.$$

Setter vi inn for disse ligningene i høyre siden ovenfor får vi

$$\frac{\overline{SM}}{\overline{MT}} \cdot \frac{\overline{TL}}{\overline{LR}} \cdot \frac{\overline{RN}}{\overline{NS}} = -\frac{\overline{ES}}{\overline{RD}} \cdot \frac{\overline{AT}}{\overline{SE}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{TA}} \cdot \frac{\overline{BT}}{\overline{SF}} \cdot \frac{\overline{DR}}{\overline{TB}} \cdot \frac{\overline{FS}}{\overline{RC}} = -1.$$

Av Menelaos' setning anvendt på Menelaos-punktene M, L, N til trekanten $\triangle RST$ følger det at M, L, N er kollineære. □



Figur 16: Pascals setning

2.1.1 Oppgaver

1. Vis at tangentlinjene til den omskrevne sirkelen til en trekant i hjørnene skjærer sine respektive motsatte linjer i trekanten i kollineære punkter.

2. *La S være sentrum for den omskrevne sirkelen til en trekant $\triangle ABC$, la T være tyngdepunktet og la O være ortosenteret (skjæringspunktet mellom høydene). Vis at O , S og T ligger på linje. Denne linja kalles **Eulers linje**.

3. * Vis at midtpunktet mellom O og S er sentrum i en sirkel som passerer gjennom: Fotpunktene til høydene i trekanten $\triangle ABC$, midtpunktene mellom O og hjørnene i trekanten, og midtpunktene på sidene i trekanten. Denne sirkelen kalles **nipunkt-sirkelen** til trekanten.

4. * (**Skaus vinkelpar-setning**) La A, A', B, B', C, C' være punkter i planet slik at ingen utvalg av tre er kollineære. Anta at $\angle B'AC = \angle BAC'$ og at $\angle C'BA = \angle CBA'$. Da er linjene gjennom AA', BB' og CC' konkurrente hvis og bare hvis $\angle A'CB = \angle ACB'$.

   Et bevis for Skaus vinkelpar-setning er gitt av Killinbergtrø, (Normat 43, s 162-167), her finner en også følgende generalisering:

   Nikantsetningen: I et gitt kjeglesnitt er innskrevet en nikant med hjørner, A, A', A", B, B', B" og C, C', C". La AB og $A'B'$ skjære hverandre C_0, AB" og AB i C_1 o.s.v.. Da vil AA_1, BB_1 og CC_1 være konkurrente hvis og bare hvis A_0, B_0, C_0 er kollinneære.

3 Geometriske steder og koordinater

3.1 Geometriske steder: Linjer og kjeglesnitt

I dette siste kapittelet med koordinatfri geometri studerer vi noen enkle geometriske steder. I definisjonene av disse inngår ofte avstanden mellom punkter, disse gis da ved sine absolutte mål og ikke fortegnsmål som vi ofte brukte i forrige kapittel.

Definisjon 3.1. Mengden av punkter som oppfyller en bestemt geometrisk betingelse kalles **det geometriske stedet for punkter som oppfyller denne betingelsen.**

3.1.1 Eksempler:

1. Det geometriske stedet for punkter som har en gitt fast avstand fra et gitt fast punkt O, er en sirkel med sentrum i O og radius den gitte avstanden.

2. Det geometriske stedet for punkter som har samme avstand fra to gitte punkter A og B, er midtnormalen på linjestykket AB.

3. Gitt en vinkel v og to faste punkter A og B. Det geometriske stedet for toppunktet til en vinkel lik v med vinkelbein gjennom A og B er to sirkelbuer med endepunkt i A og B. (Husk Periferivinkelsetningen 2.1)

4. (Thales) Det geometriske stedet for toppunktet til en rett vinkel med vinkelbein gjennom to punkter A og B er sirkelen med diameter AB.

5. Det geometriske stedet for punkter P hvis avstander PA og PB til to faste punkter A og B har et konstant forhold

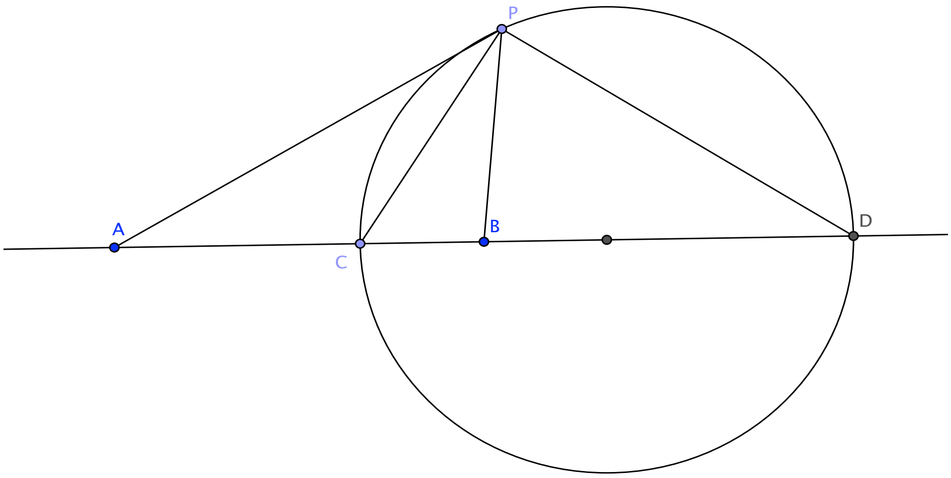
   $$k = \frac{PA}{PB} \geq 0$$

   er en sirkel med sentrum på linja gjennom AB. Denne sirkelen kalles **Apollonios sirkel**.

   Det geometriske stedet ligger symmetrisk om linja gjennom AB og har to punkt M og N på denne linja siden vi regner med absolutte mål. Et punkt, M, deler linjestykket AB utvendig mens det andre punktet, N, deler AB innvendig. Fra et punkt P på dette geometriske stedet utenfor linja, trekker vi linjene PB, PM, PA, PN. I trekanten $\triangle ABP$ er nå

   $$\frac{PA}{PB} = \frac{NA}{NB}$$

   så av setningen om halveringslinja til en vinkel i en trekant følger det at PN halverer vinkelen i P. Helt tilsvarende følger det at PM halverer den utvendige vinkelen i



Figur 17: Apollonios-sirkel

P. Siden den innvendige og den utvendige vinkelen i P er supplementvinkler, må de halve vinklene $\angle APM$ og $\angle APN$ være komplementvinkler. Dermed er $\angle MPN$ en rett vinkel og P ligger på periferien til sirkelen som har MN som diameter. Denne sirkelen danner derfor det søkte geometriske stedet.

6. Det geometriske stedet for punkter hvis forhold mellom avstandene til to gitte faste linjer er konstant, er ei linje gjennom skjæringspunktet til de to gitte linjene.

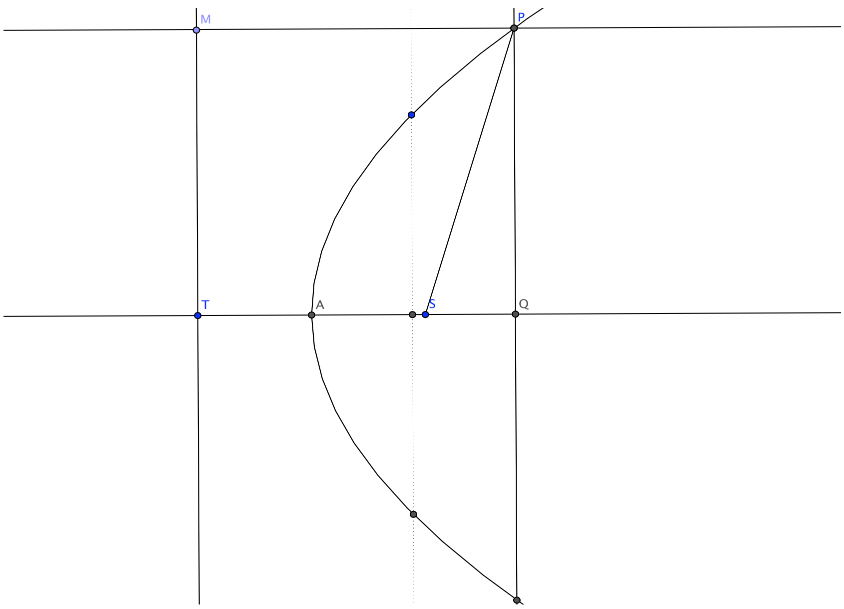
Nå er vi ved en definisjon av kjeglesnittene ellipse, parabel og hyperbel som geometriske steder.

Definisjon 3.2. (Parabel - brennpunkt og styrelinje-definisjon) En **parabel** er det geometriske stedet for punkter som ligger like langt fra et gitt fast punkt og ei gitt fast linje som ikke inneholder punktet (se figur 18).

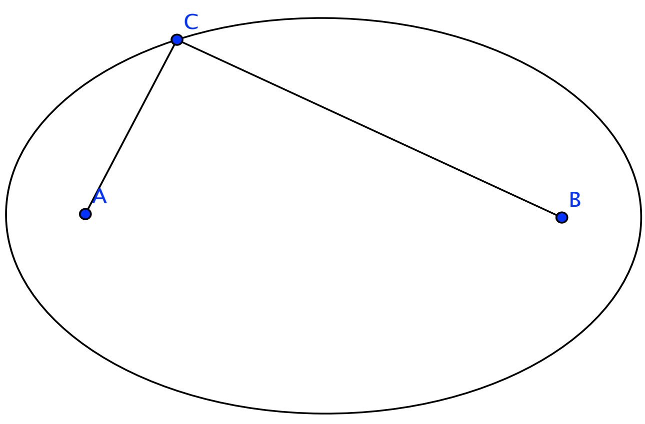
Det gitte faste punktet kalles **brennpunktet** til parabelen, og den gitte faste linja kalles **styrelinja**. Normalen gjennom brennpunktet på styrelinja er den ei symmetrilinja til parabelen.

Definisjon 3.3. (Ellipse og hyperbel - sum- og differensdefinisjon) En **ellipse** er det geometriske stedet for punkter hvis avstander til to gitte faste punkter har en gitt fast sum. En **hyperbel** er det geometriske stedet for punkter hvis avstander til to gitte fast punkter har en gitt fast differens (se figur 19 og 20).

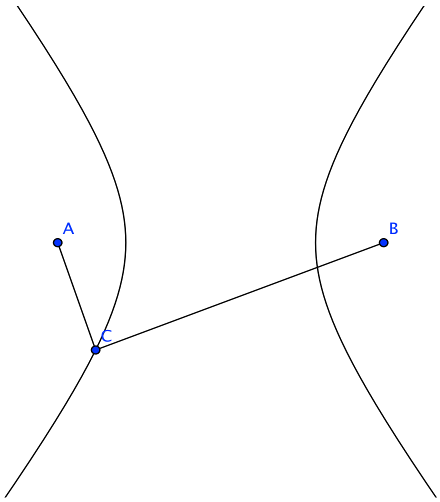
De to gitte fast punktene kalles brennpunktene til ellipsen, hhv. hyperbelen.



Figur 18: Brennpunkt og styrelinje til en parabel



Figur 19: Brennpunktene til en ellipse



Figur 20: Brennpunktene til en hyperbel

En **sekant** til et kjeglesnitt er ei linje som skjærer kjeglesnittet i to punkter. Linjestykket mellom skjæringspunktene kalles en **korde**.

En ellipse har som vi har sett to brennpunkter. Midtpunktet mellom dem kalles **sentrum** i ellipsen. En korde til ellipsen gjennom sentrum kalles en **diameter**.

Brennpunktene ligger på en diameter, som kalles den **store aksen**. Endepunktene til den store aksen er toppunktene til ellipsen. Diameteren som står normalt på den store aksen kalles den **lille aksen**. Ellipsen er symmetrisk om både den store og den lille aksen. Spesielt betyr det at ellipsen er symmetrisk om sentrum.

En hyperbel har også to brennpunkter. Midtpunktet mellom dem kalles **sentrum** i hyperbelen. En korde til hyperbelen gjennom sentrum kalles en **diameter**. Brennpunktene ligger på en sekant gjennom sentrum på forlengelsen av en diameter. Denne diameteren kalles den **reelle aksen**. Endepunktene til den reelle aksen er toppunktene til hyperbelen. Sekanten gjennom brennpunktene og linja gjennom sentrum som står normalt på denne er begge symmetriakser for hyperbelen. Derfor er hyperbelen symmetrisk også om sentrum.

Eksentrisiteten e til en ellipse er forholdet mellom avstanden mellom brennpunktene og avstanden mellom toppunktene. Dersom vi holder de to toppunktene fast og lar eksentrisiteten e avta mot null, det vil si at brennpunktene nærmer seg hverandre, ser vi at kjeglesnittet er en ellipse som blir til en sirkel. Dette passer godt med karakteriseringen av sirkelen som et geometrisk sted og sumdefinisjonen av ellipsen.

3.2 Koordinater: Linjer og kjeglesnitt

Hittil har vi undersøkt linjer, trekanter og geometriske steder uten å bruke koordinater og ligninger. Undersøkelsene har avklart symmetriegenskaper til kjeglesnitt som vi vil utnytte når vi velger koordinatsystem og finner ligningen til et kjeglesnitt.

Et koordinatsystem i planet bestemmer koordinater (x, y) for hvert punkt i planet. Disse er bestemt av to orienterte linjer, x-aksen og y-aksen, som står normalt på hverandre. Skjæringspunktet kalles **origo**, som har koordinater $(0, 0)$.

Ei linje i planet kan i et koordinatsystem bestemmes med en ligning: Punktene på linja har koordinater som oppfyller en **lineær** ligning

$$Ax + By = C$$

for passe konstanter A, B, C (merk at A og B ikke begge kan være lik 0). Om denne ligningen blir multiplisert med en konstant $k \neq 0$, så bestemmer den fortsatt samme linje, dette er imidlertid eneste mulige forskjell mellom ligninger som bestemmer samme linje. Dersom linja er parallell med $y-$aksen er $B = 0$ og $A \neq 0$, så vi kan velge $A = 1$ og få ligningen $x = C$. Dersom linja ikke er parallell med $y-$aksen er den grafen til en lineær funksjon. Da er $B \neq 0$ og vi kan skrive ligningen

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}.$$

Koeffisienten $-\frac{A}{B}$ kalles da stigningstallet til linja. Ei linje med stigningstall k som går gjennom punktet (a, b) har ligning

$$y - b = k(x - a) \quad \text{eller} \quad y = kx - ka + b.$$

Stigningstallet til ei linje er tangens til vinkelen mellom den positive x-aksen og linja. Dersom linja står normalt på x-aksen, så er tangens til denne vinkelen ikke definert, derfor heller ikke stigningstallet. Linja med ligning $Ax + By = C$ står normalt på x-aksen, når $B = 0$. Når $B \neq 0$ er stigningstallet lik $-\frac{A}{B}$. Tangens til vinkelen mellom to linjer med ligninger $Ax + By = C$ og $A'x + B'y = C'$ er bestemt av stigningstallene etter formelen for tangens til en differens av vinkler, så den er

$$\frac{-\frac{A}{B} - (-\frac{A'}{B'})}{1 + (-\frac{A}{B}) \cdot (-\frac{A'}{B'})} = \frac{-AB' + A'B}{AA' + BB'}.$$

Linjene står normalt på hverandre hvis og bare hvis tangens til vinkelen mellom linjene ikke er definert, så vi ser av denne formelen at

Hjelpesetning 3.4. *Linjene med ligninger $Ax + By = C$ og $A'x + B'y = C'$ står normalt på hverandre hvis og bare hvis*

$$AA' + BB' = 0.$$

Spesielt får vi at hvis stigningstallene for to linjer er k og k', så står linjene normalt på hverandre hvis

$$k = -\frac{1}{k'}.$$

Avstanden mellom to punkter $P = (a, b)$ og $Q = (c, d)$ er selvsagt gitt ved Pytagoras' setning:

$$PQ = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}.$$

Når vi nå kjenner symmetriegenskaper til kjeglesnitt velger vi et koordinatsystem som utnytter disse. Vi starter med ellipsen med eksentrisitet e og store akse lik $2a$:

Legg origo i sentrum for ellipsen, og la x-aksen og y-aksen være linjene gjennom hhv. store og lille akse. Da har brennpunktene koordinater $(\pm c, 0)$ der $c = ea$. Dersom (x, y) er et punkt på ellipsen så oppfyller koordinatene x og y, på grunn av sumdefinisjonen av ellipsen, logningen

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Denne reduseres ved isolering av et rottegn og kvadrering i steg til

$$(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - 2a)^2 = (x-c)^2 + y^2,$$

$$4cx + 4a^2 = 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

og

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2((x+c)^2 + y^2)$$

som igjen reduseres til

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Legg merke til at dersom den lille aksen er $2b$, så er $b^2 = a^2 - c^2$ siden avstanden mellom et brennpunkt og et endepunkt til den lille halvaksen er a. Ligningen for ellipsen blir derfor

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

der a og b er store og lille halvakse.

Tilsvarende får vi for hyperbelen med eksentrisitet $e > 1$, reell akse lik $2a$, sentrum i origo og brennpunkter i $(\pm c, 0)$, der $c = ea$, ligningen

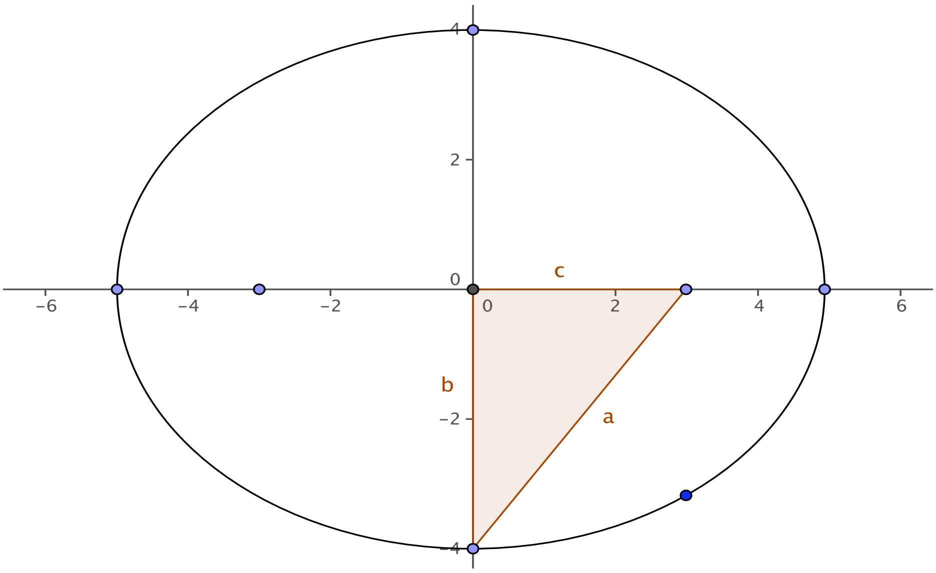
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Denne reduseres ved isolering av et rottegn og kvadrering til

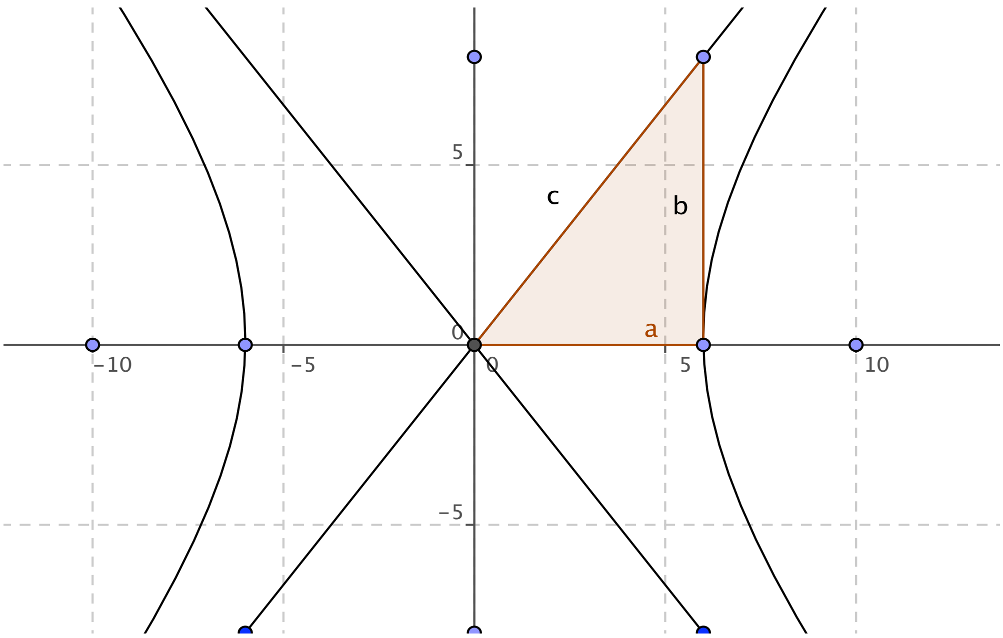
$$-cx - a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

som igjen reduseres til

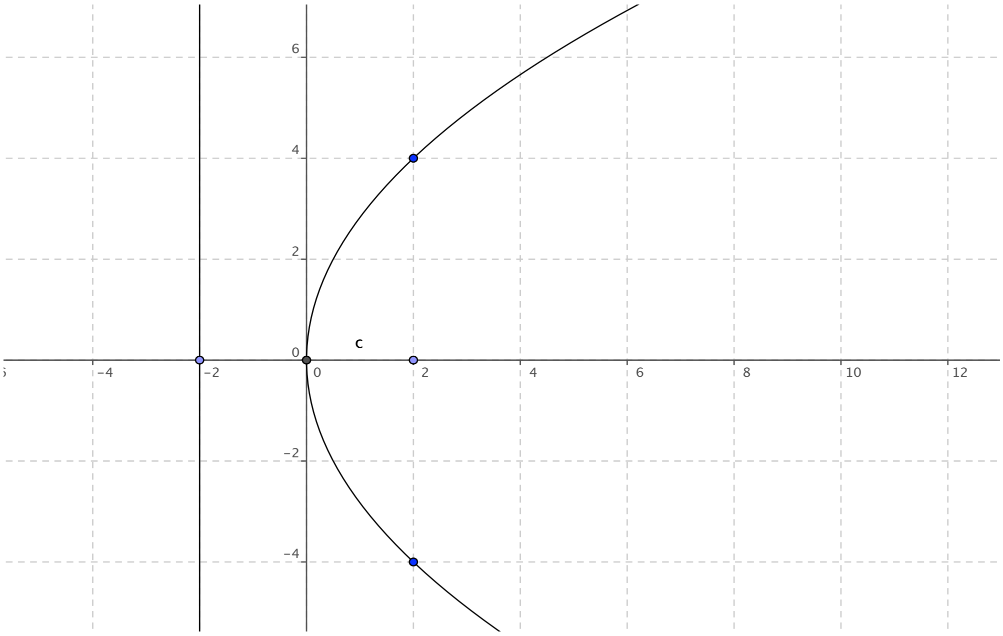
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$



Figur 21: Ellipse med ligning $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Figur 22: Hyperbel med ligning $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Figur 23: Parabel med ligning $y^2 = 4cx$

som med $b^2 = c^2 - a^2$ får formen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Til slutt får vi for en parabel med brennpunkt i $(c, 0)$ og styrelinje $x = -c$ ligningen:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = x + c$$

som etter kvadrering kan reduseres til

$$y^2 = 4cx.$$

I 3.4 har vi oppsummert ligninger og parametre for kjeglesnitt med akser langs koordinataksene.

Felles for de ligningene som vi har utledet for ellipser og hyperbler med sentrum i origo og for parabler er at de kan skrives på formen

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma x + \delta y = \epsilon$$

for passende koeffisienter. For ellipser og hyperbler med sentrum i origo er koeffisientene $\gamma = \delta = 0$. Når disse koeffisientene er ulik null kan vi alltid danne fullstendige kvadrater slik at ligningen får formen

$$\alpha(x-p)^2 + \beta(y-q)^2 = \mu$$

eller

$$(y-q)^2 = 4\rho(x-p)$$

eventuelt med x og y byttet rolle. I det første tilfellet definerer ligningen en ellipse eller hyperbel med sentrum i (p, q) med akser parallelle med koordinataksene, mens ligningen i det andre tilfellet definerer en parabel med toppunkt i (p, q) og akse parallell med x-aksen. Mer generelt vil også en ligning av andre grad i x, y med produktledd xy definere et kjeglesnitt, hyperbelen $xy = 1$ er et kjent eksempel, disse har akser som ikke er parallelle med koordinataksene. Det generelle kjeglesnittet i planet har ligningen

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

der minst en av koeffisientene A, B, C er ulike 0. For spesielle verdier av koeffisientene vil denne ligningen definere to linjer, en linje, et punkt eller ingen punkter. Disse kalles gjerne **degenererte kjeglesnitt**.

Dersom en har gitt 5 punkter i planet $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), P_3 = (x_3, y_3), P_4 = (x_4, y_4), P_5 = (x_5, y_5)$ får en ved innsetting i ligningen for det generelle kjeglesnittet 5 lineære ligninger i koeffisientene. Dersom ikke 4 av punktene ligger på linje, er det bare et sett av koeffisienter (opp til multiplikasjon med en konstant), som løser disse ligningene. Det betyr at det er nøyaktig ett kjeglesnitt gjennom de 5 punktene i planet.

I dynamisk geometriprogramvare kan en som regel bruke ulike definisjoner av kjeglesnitt. Det er en fin øvelse å bruke de ulike definisjonene til å se hvordan kjeglesnittet varierer med ligningen.

3.3 Implisitt derivasjon og tangentlinjer

Husk at ei linje som skjærer en kurve i to punkter kalles en sekant til kurven. Når en holder det ene punktet fast mens det andre punktet nærmer seg det første, vil sekanten gjennom punktene nærme seg en grenseposisjon som vi kaller en *tangent* til kurven.

Klassisk ble en tangent definert som ei linje som passerer gjennom et punkt på kurven uten å skjære den.

For en kurve definert av en polynomligning $f(x, y) = 0$ kan vi og definere en tangent til kurven som ei linje slik at restriksjonen av $f(x, y) = 0$ til linja, det vil si substitusjon av en av variablene ved hjelp av ligningen for linja, har ei dobbel rot.

Hver av disse definisjonene passer med tolkningen av den deriverte i et punkt som stigningstallet til tangenten i punktet: For en kurve som er grafen til en funksjon $y = f(x)$ finner vi tangenten ved å derivere, siden stigningstallet til tangenten i et punkt $(p, f(p))$ nettopp er den deriverte $f'(p)$.

Vi skal bruke den siste definisjonen og derivasjon til å finne ligninger for tangenter til kjeglesnitt.

Vi har sett at et kjeglesnitt alltid kan defineres av en polynomligning av andre grad.

Et kjeglesnitt med sentrum i origo og store/reelle akse langs x-aksen er bestemt av ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ved å avgrense x- og y-verdiene til et lite område, kan vi alltid realisere den delen av kjeglesnittet som ligger innenfor dette området som grafen til en funksjon $y = g(x)$ (eller $x = h(y)$). Ved å tenke på y som en funksjon av x blir alle variablene i ligningen funksjoner av variabelen x. Disse er polynomer, så de er alle deriverbare. Ved å derivere begge sider av polynomligningen (dette kalles implisitt derivasjon) får vi derfor:

$$2\frac{x}{a^2} \pm 2\frac{yy'}{b^2} = 0.$$

Stigningstallet til tangenten i et punkt (p, q) på kjeglesnittet er derfor $\mp\frac{pb^2}{qa^2}$, mens ligningen til tangenten blir

$$(y - q) = \mp\frac{pb^2}{qa^2}(x - p)$$

som forenkles etter multiplikasjon med $\pm\frac{q}{b^2}$ til

$$\frac{px}{a^2} \pm \frac{qy}{b^2} = \frac{p^2}{a^2} \pm \frac{q^2}{b^2}.$$

Men (p, q) oppfyller ligningen

$$\frac{p^2}{a^2} \pm \frac{q^2}{b^2} = 1,$$

så tangentlinja får ligningen

$$\frac{px}{a^2} \pm \frac{qy}{b^2} = 1.$$

For parabler på formen

$$y^2 = 4cx$$

får tangentligningen i punktet (p, q) på parabelen etter tilsvarende regning følgende form:

$$qy = 2c(x + p).$$

3.4 Kjeglesnitt med akser langs koordinataksene

I Tabell 1 nedenfor har vi sammenfattet ligninger og brennpunkt for ellipser og hyperbler med sentrum i origo og store/reell akse langs $x-$aksen, og brennpunkt og styrelinje for parabler med toppunkt i origo og akse langs $x-$aksen.

	ellipse	hyperbel	parabel
ligning	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$y^2 = 4cx$
brennpunkt	$(\pm c, 0)$	$(\pm c, 0)$	$(c, 0)$
Pythagoreisk relasjon	$a^2 = b^2 + c^2$	$a^2 + b^2 = c^2$	
eksentrisitet	$e = \frac{c}{a} \quad (< 1)$	$e = \frac{c}{a} \quad (> 1)$	
styrelinje			$x = -c$
tangentlinje	$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$	$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$	$yy_0 = 2c(x + x_0)$
asymptoter		$\frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b}$	

Tabell 1: Kjeglesnitt med akser langs koordinataksene

4 Anvendelser av kjeglesnitt

De viktigste praktiske anvendelsene av kjeglesnitt bruker enten definisjonen som geometriske steder eller så speilingsegenskapene til kjeglesnitt.

4.1 Speilingsegenskaper til kjeglesnitt

Setning 4.1. (Speilingsegenskapen til en ellipse) *Linjene fra et punkt på en ellipse til brennpunktene danner samme vinkel med tangenten til ellipsen i punktet. Det vil si at i et speil med form som en ellipse, vil lys fra det ene brennpunket bli reflektert mot det andre, og lys utenfra mot det ene brennpunktet vil bli reflektert i retning fra det andre.*

Bevis. Vi velger koordinatsystem som tidligere med origo i sentrum, $x-$akse langs den store aksen og brennpunkt i $B = (c, 0)$ og $B' = (-c, 0)$. Det vil si at ligningen til ellipsen er

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

med eksentrisitet $e = \frac{c}{a}$ og $b^2 = a^2 - c^2$. Husk at avstanden fra origo til styrelinjene er $\frac{1}{e^2} \cdot c$ så styrelinjene har ligninger

$$x = \pm\frac{c}{e^2} = \pm\frac{a}{e}.$$

La $P = (p, q)$ være et punkt på ellipsen. Da er avstanden mellom P og styrelinjene henholdsvis $p + \frac{a}{e}$ og $p - \frac{a}{e}$. Forholdet mellom avstandene fra P til brennpunktene B og B' og til de tilhørende styrelinjene er lik eksentrisiteten, så vi får

$$PB' = e(p + \frac{a}{e}) = a + ep$$

og

$$PB = a - ep.$$

Tangenten til ellipsen i punktet P har ligning

$$\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1.$$

Stigningstallet til denne tangenten er

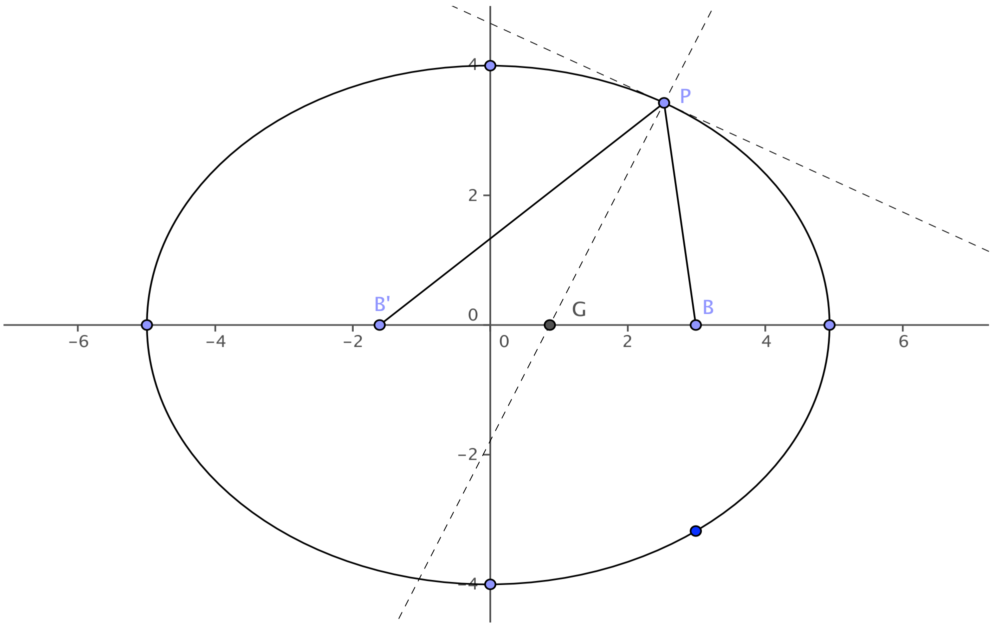
$$-\frac{pb^2}{qa^2},$$

så normalen til denne tangenten gjennom P har stigningstall

$$\frac{qa^2}{pb^2}$$

og ligning

$$\frac{q}{b^2}(x - p) - \frac{p}{a^2}(y - q) = 0.$$



Figur 24: Speilingsegenskapen til en ellipse

Denne skjærer x-aksen i punktet

$$G = (p(1 - \frac{b^2}{a^2}), 0) = (e^2 p, 0).$$

Dermed får vi

$$B'G = c + e^2 p = ea + e^2 p = e(a + ep) = eB'P$$

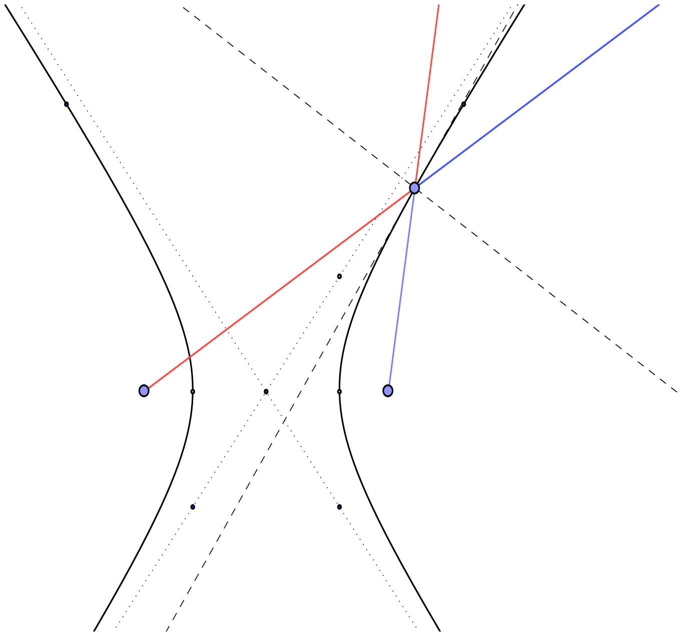
og tilsvarende

$$BG = c - e^2 p = ea - e^2 p = e(a - ep) = eBP.$$

Av setning 1.12 om halveringsvinkler må PG halvere vinkelen mellom PB' og PB så speilingsegenskapen er vist. $\square$

Setning 4.2. (Speilingsegenskapen til en hyperbel) *Linjene fra et punkt på en hyperbel til brennpunktene danner samme vinkel med tangenten til hyperbelen i punktet. Det vil si at i et speil formet som en hyperbel, vil lys utenfra mot det ene brennpunktet bli reflektert i retning fra det andre, mens lys fra det ene brennpunktet blir reflektert i retning fra det andre.*

Beviset er helt analogt med beviset for ellipsen.



Figur 25: Speilingsegenskapen til en hyperbel

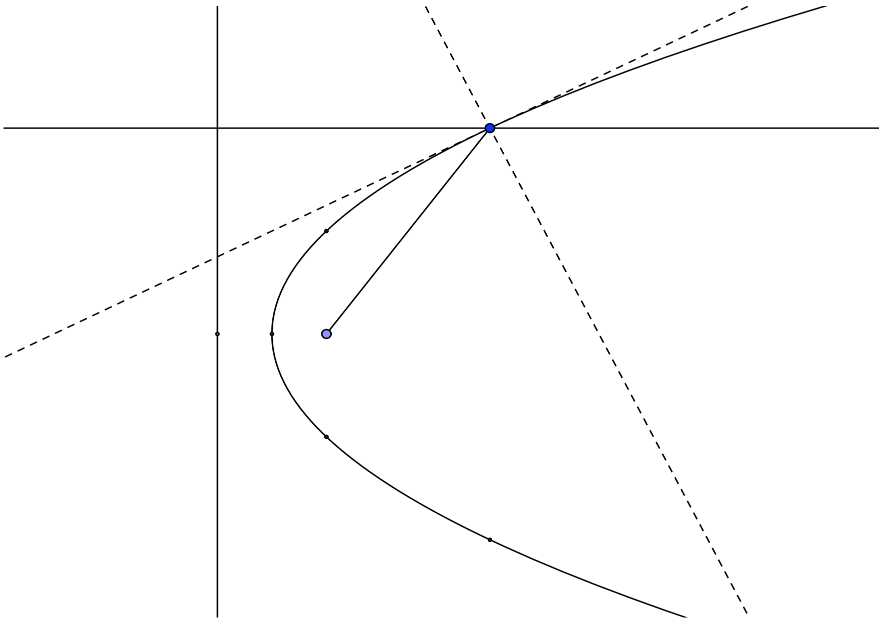
Setning 4.3. (Speilingsegenskapen til en parabel) *Linjene fra et punkt på parabelen til brennpunktet og parallelt med symmetriaksen danner samme vinkel med tangenten til parabelen i punktet.*

Bevis. Dette er grensetilfellet for ellipsen når det ene brennpunktet går mot uendelig. □

4.2 Eksempler

Eksempel 4.4. Bruk av speilingsegenskapene

- Parabolantennen reflekterer parallelle stråler inn mot en mottaker i brennpunktet.
- Lyskastere med lyskilde i brennpunktet reflekterer lyset i et parabolsk speil til stråler parallelle med aksen.
- Elliptisk refleksjon brukes i medisin til å knuse nyrestein, ved å sende ut ødeleggende stråler fra ett brennpunkt for å knuse nyresteinen i det andre.
- I teleskoper brukes både parabolske og hyperbolske speil til å konsentrere lyset fra stjernehimmelen innpå en liten skjerm. Det parabolske speilet har et hull i toppunktet, det reflekterer lyset først mot et hyperbolske speil med samme brennpunkt, der-



Figur 26: Speilingsegenskapen til en parabel

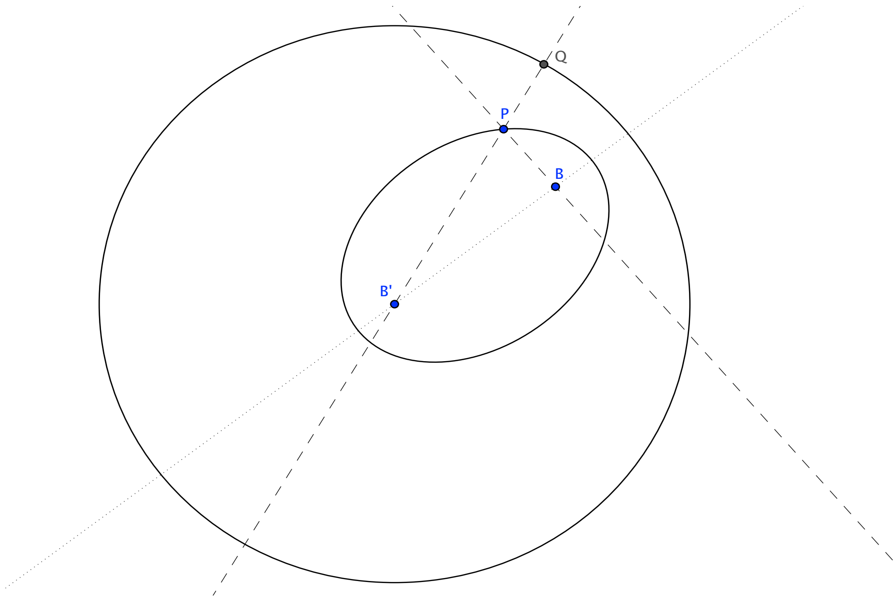
etter reflekteres lyset mot hyperbelens andre brennpunkt like bakenfor toppunktet til det parabolske speilet. Dette systemet kalles et Cassegrain system.

Eksempel 4.5. GPS

Hyperbelen blir brukt i navigasjonssystemet DECCA og det nyere systemet GPS. I begge tilfeller mottar man signaler på bestemte frekvenser fra ulike faste sendestasjoner. Disse er kjente stasjoner på jordoverflaten eller satelitter. Ved måling av faseforskjeller finner en presis differansen mellom avstandene fra egen posisjon til sendestasjonene. Denne differansen angir hvilken hyperbel (eller hyperboloide) med sendestasjonene som brennpunkt en ligger på. Gjentar en målingen fra ulike sendestajoner får en bestemt egen posisjon med stor nøyaktighet.

Eksempel 4.6. Modeller i fysikk

- Kjeglesnitt opptrer også naturlig som bevegelsesbaner bestemt av tyngdekraften: Ellipser er banene til planeter og kometer med sola i det ene brennpunktet.
- Parabelen er banen til et prosjektil som påvirkes av en konstant kraft (f.eks tyngdekraften).



Figur 27: P har samme avstand til B som til Q

5 Flere geometriske steder

I dette avsnittet skal vi finne ulike geometriske steder knyttet til kjeglesnitt med og uten bruk av koordinater. De utvalgte egenskapene er bare noen få blant mange, og de fleste går tilbake til Apollonios. Bevisene som brukes her er valgt med vekt på å få en så stor spredning i metoder som mulig, for å vise nytten av de ulike måtene som kjeglesnittene er presentert på.

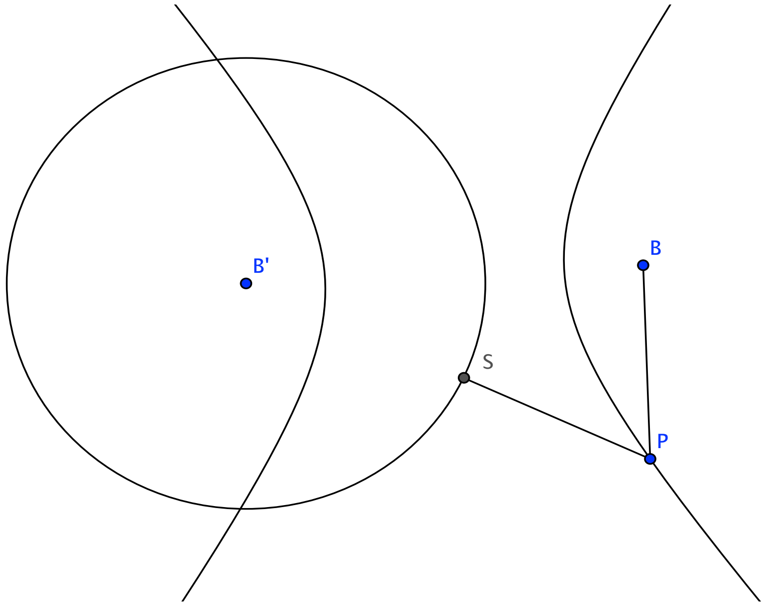
Først skal vi gi en ny karakteristikk av ellipser og hyperbler:

Setning 5.1. *En ellipse er det geometriske stedet for de punktene som har samme avstand til en sirkel som til et gitt punkt inne i sirkelen.*

Bevis. For en ellipse med brennpunkt i B' og B og store akse lik $2a$, la S være sirkelen med sentrum i B' og radius lik $2a$. Da vil ethvert punkt P på ellipsen ha samme avstand til B som til sirkelen S. □

Setning 5.2. *Den ene greina til en hyperbel er det geometriske stedet for de punktene som har samme avstand til en sirkel som til et gitt punkt utenfor sirkelen.*

Bevis. For en hyperbel med brennpunkter i B' og B og reelle akse lik $2a$, la S være sirkelen med sentrum i B' og radius lik $2a$. Da vil ethvert punkt P på hyperbelgreina nærmest B ha samme avstand til B som til sirkelen S. □



Figur 28: P har samme avstand til B som til S

5.0.1 Pedalkurver

For en kurve i planet som har en tangent i hvert punkt definerer vi **pedalkurven** med hensyn til et punkt S utenfor kurven som *det geometriske stedet for fotpunktet til en normal fra S på en tangent til kurven.* Vi skal vise at pedalkurven til en ellipse med hensyn til et brennpunkt er en sirkel.

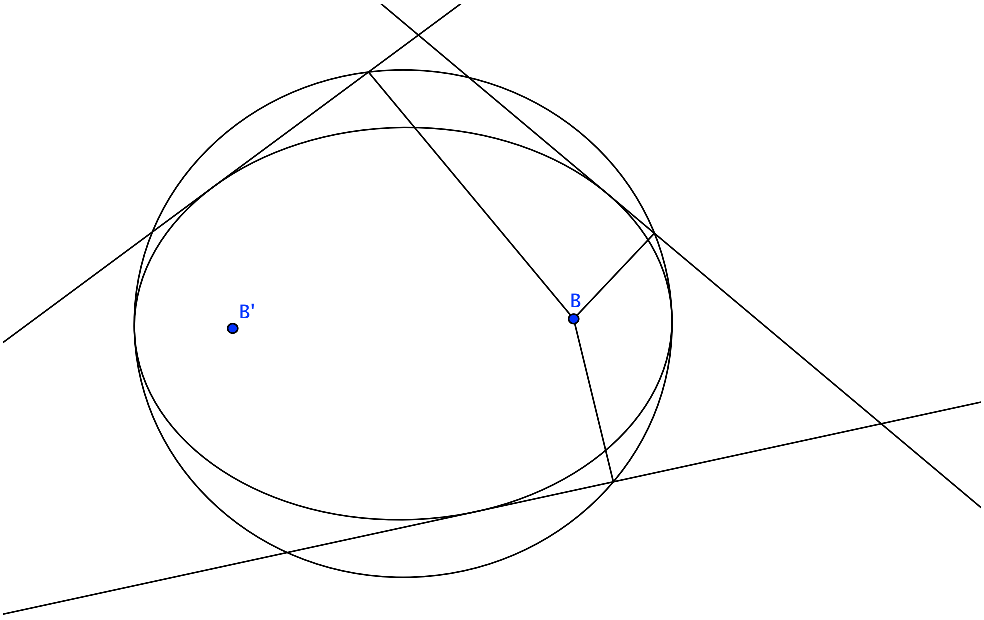
Vi kaller brennpunktene til ellipsen, B og B', lar P være et punkt på ellipsen, og lar Q være skjæringspunktet mellom tangenten i P og normalen gjennom B til tangentlinja.

La videre R være skjæringspunktet mellom linja gjennom PB' og linja gjennom BQ. Se på trekantene $\triangle PQB$ og $\triangle PQR$. Disse har siden PQ felles, som av speilingsegenskapen til ellipsen halverer vinkelen $\angle BPR$. Videre er begge trekantene rettvinklede, så de er kongruente. Dermed er $PR = PB$ og $B'R = 2a$. Sentrum O ligger midt mellom brennpunktene, og Q ligger midt mellom B og R så avstanden mellom sentrum O og Q må være a. Derfor er det søkte geometriske stedet sirkelen med sentrum i sentrum av ellipsen og radius lik den store halvakse. Denne pedalkurven til ellipsen kalles også **storsirkelen** til ellipsen.

5.1 Pol og polare

For et vilkårlig punkt (x_0, y_0) i planet har linja

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$



Figur 29: Pedalkurven mht til B er storsirkelen til ellipsen

også interessante egenskaper. Denne linja kalles *polaren* til punktet (x_0, y_0) med hensyn til ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

mens omvendt punktet kalles **polen** til linja. Tilsvarende defineres polaren til et punkt (x_0, y_0) m.h.t hyperbelen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

som linja

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1,$$

mens polaren m.h.t. parabelen

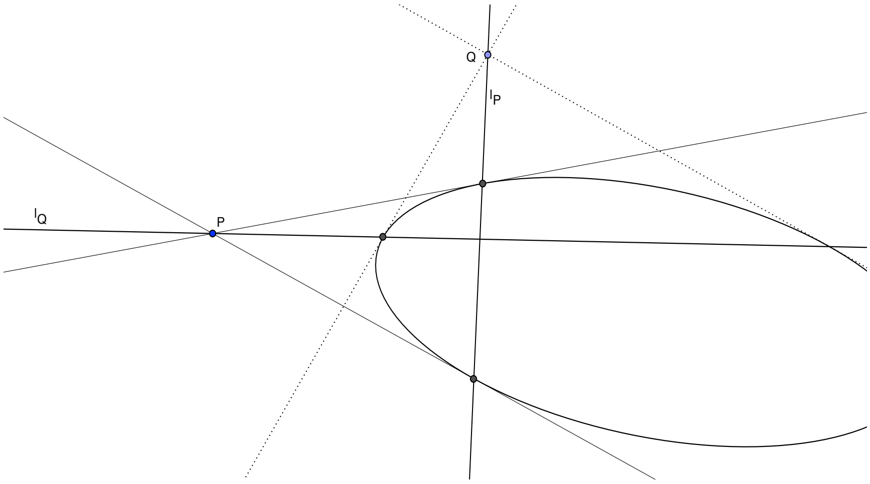
$$y^2 = 4cx$$

er linja med ligning

$$y_0 y = 2c(x + x_0).$$

Av definisjonene følger nesten umiddelbart:

Setning 5.3. *Et punkt P ligger på sin polare $l(P)$ med hensyn til et kjeglesnitt hvis og bare hvis P ligger på kjeglesnittet og $l(P)$ er tangenlinja til kjeglesnittet i P.*



Figur 30: Pol og polare

Bevis. Vi viser dette for en ellipse med ligning

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

De andre tilfellene er helt analoge.

Punktet $P = (x_0, y_0)$ ligger på polaren

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

hvis og bare hvis

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

som betyr at P ligger på kjeglesnittet og polaren er tangentlinja i P. □

Den viktigste egenskapen til pol og polare er

Setning 5.4. (Pol og polare) *La linja $l = l(P)$ være polaren til punktet P med hensyn til et kjeglesnitt. Da vil polaren $l(Q)$ til et punkt Q på l inneholde punktet P, og omvendt vil polen til ei linje gjennom P ligge på l. Kortere sagt:*

$$Q \in l(P) \quad \text{hvis} \quad \text{og} \quad \text{bare} \quad \text{hvis} \quad P \in l(Q).$$

Bevis. Vi antar først at kjeglesnittet er en ellipse og velger koordinater slik at det har sentrum i origo og store akse langs $x-$aksen. Da har det ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

mens ligningen til polaren l til et punkt P med koordinater (x_0, y_0) er

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Et punkt $Q = (x_1, y_1)$ ligger på polaren l til P dersom

$$\frac{x_0 x_1}{a^2} + \frac{y_0 y_1}{b^2} = 1.$$

Denne ligningen er symmetrisk i P og Q. Den sier at P ligger på polaren med ligning

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$$

til Q hvis og bare hvis Q ligger på polaren til P, som var det vi skulle vise.

Dersom kjeglesnittet er en hyperbel er argumentet helt likt, i ligningene er et fortegn endret. Dersom kjeglesnittet er en parabel, kan vi velge koordinater slik at toppunktet er i origo og $x-$aksen er symmetriakse. Da har parabelen ligningen $y^2 = 4cx$. Polaren til et punkt $P = (x_0, y_0)$ m.h.t. parabelen har ligningen $y_0 y = 2c(x + x_0)$. For et punkt $Q = (x_1, y_1)$ på denne linja er $y_0 y_1 = 2c(x_1 + x_0)$ som igjen er symmetrisk i P og Q. Derfor gjelder setningen også for parabler. $\square$

5.1.1 Styresirkelen

Dernest vil vi finne *det geometriske stedet for punkter P som er slik at tangentene fra P til en gitt ellipse står normalt på hverandre.*

Husk fra 3.4 at to linjer med ligninger

$$Ax + By - C = 0 \quad \text{og} \quad A'x + B'y - C' = 0$$

står normalt på hverandre hvis og bare hvis

$$AA' + BB' = 0.$$

Vi velger nå koordinatsystem som tidligere slik at ligningen til ellipsen blir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dersom de to linjene tangerer ellipsen i henholdsvis (p, q) og (p', q'), så er linjene definert av ligningene

$$\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{og} \quad \frac{p'x}{a^2} + \frac{q'y}{b^2} - 1 = 0.$$

Derfor vil tangentene i (p, q) og (p', q') står normalt på hverandre hvis og bare hvis

$$\frac{pp'}{a^4} + \frac{qq'}{b^4} = 0.$$

La nå (x_1, y_1) være et punkt på det søkte geometriske stedet. Da vil polaren til punktet ha ligningen

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

og skjære ellipsen i to punkter (p, q) og (p', q') slik at

$$\frac{pp'}{a^4} + \frac{qq'}{b^4} = 0.$$

Ved å substituere ligningen for polaren inn i ligningen for ellipsen finner vi utrykk for pp' og qq': Først multipliserer vi ligningen for ellipsen med y_1^2/b^2 og får

$$\frac{y_1^2 x^2}{a^2 b^2} + \frac{y_1^2 y^2}{b^4} = \frac{y_1^2}{b^2},$$

deretter setter vi inn

$$\frac{y_1 y}{b^2} = 1 - \frac{x_1 x}{a^2}$$

og får

$$\frac{y_1^2 x^2}{a^2 b^2} + \left(1 - \frac{x_1 x}{a^2}\right)^2 = \frac{y_1^2}{b^2}.$$

Dette er en andregradsligning i x hvis to røtter er p og p'. Derfor er produktet pp' lik konstantleddet i ligningen når denne er normalisert med 1 som koeffisient foran x^2. Litt regning gir

$$\left(\frac{y_1^2}{a^2 b^2} + \frac{x_1^2}{a^4}\right) x^2 - \frac{2x_1}{a^2} x + 1 - \frac{y_1^2}{b^2} = 0$$

så

$$pp' = \frac{1 - \frac{y_1^2}{b^2}}{\frac{y_1^2}{a^2 b^2} + \frac{x_1^2}{a^4}} = \frac{a^2 - \frac{a^2 y_1^2}{b^2}}{\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{x_1^2}{a^2}}.$$

Tilsvarende får vi

$$qq' = \frac{b^2 - \frac{b^2 x_1^2}{a^2}}{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}}.$$

Derfor vil tangentene gjennom (x_1, y_1) stå normalt på hverandre hvis og bare hvis

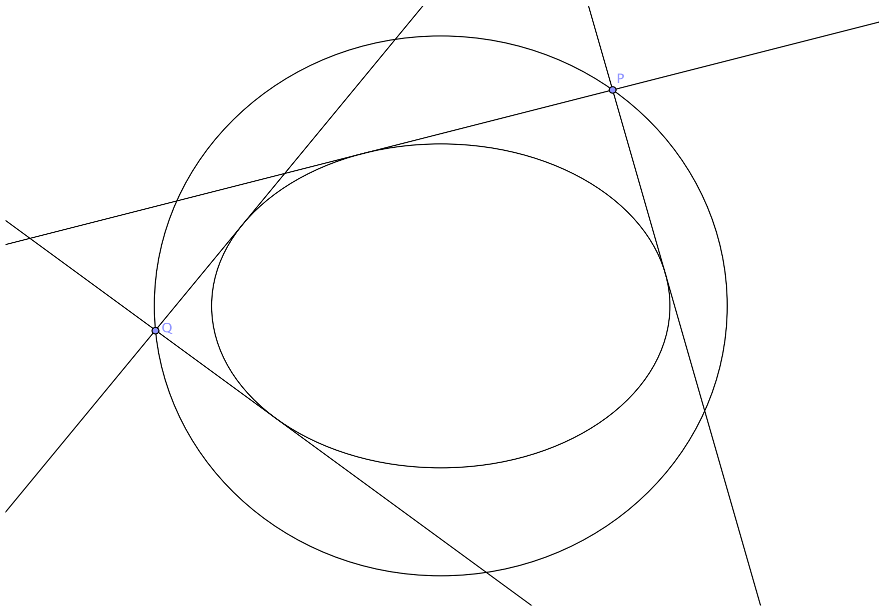
$$\frac{pp'}{a^4} + \frac{qq'}{b^4} = \frac{1}{a^4} \frac{a^2 - \frac{a^2 y_1^2}{b^2}}{\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{x_1^2}{a^2}} + \frac{1}{b^4} \frac{b^2 - \frac{b^2 x_1^2}{a^2}}{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}} = 0.$$

Denne ligningen kan vi redusere til

$$\frac{1}{a^4}\left(a^2 - \frac{a^2 y_1^2}{b^2}\right) + \frac{1}{b^4}\left(b^2 - \frac{b^2 x_1^2}{a^2}\right) = 0$$

som ved multiplikasjon med $a^2 b^2$ blir til

$$(b^2 - y_1^2) + (a^2 - x_1^2) = 0,$$



Figur 31: Styresirkelen til ellipsen

det vil si

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2.$$

Det søkte geometriske stedet er altså en sirkel med sentrum i sentrum til ellipsen. Denne sirkelen kalles **styresirkelen**.

5.2 Geometriske steder til realartium

Geometriske steder i planet kan en noen ganger finne ved smarte syntetiske argumenter, slik vi har sett i de forrige underkapitlene. Med koordinater har en imidlertid en generell metode som ofte fører fram. Vi skal vise dette i noen eksempler, og så overlate flere eksempler til oppgavene. Eksemplene er alle modifiserte utgaver av realartiumsoppgaver fra perioden 1900-1975.

Eksempel 5.5. For hver $t \in \mathbb{R}$ er

$$(1+t)x^2 + (1-t)y^2 = 36$$

ligningen til en kurve C_t som er symmetrisk om $x-$ og $y-$aksen. Først skal vi undersøke hva slags kurve C_t er når t varierer. Ligningen har formen til ligningen til en ellipse eller hyperbel med akser langs koordinataksene og sentrum i origo. Hvis koeffisientene $1+t$ og $1-t$ begge er positive, det vil si $-1 < t < 1$, så er C_t en ellipse. Dersom koeffisientene har forskjellig fortegn, det vil si $t < -1$ eller $t > 1$, så er C_t en hyperbel. Når $t = \pm 1$ er C_t to parallelle linjer.

Videre skal vi for hver kurve C_t finne en tangent med stigningstall 1 og finne det geometriske stedet til tangeringspunktet til denne tangenten når t varierer.

Ligningen til tangenten i et punkt (a, b) på C_t er

$$(1+t)ax + (1-t)by = 36$$

Stigningstallet til denne tangenten er 1, dersom $(1+t)a = -(1-t)b$. Tangeringspunktet oppfyller derfor ligningene

$$(1+t)a + (1-t)b = 0 \quad \text{og} \quad (1+t)a^2 + (1-t)b^2 = 36.$$

Fra den første ligningen får vi

$$t = \frac{(-(a+b))}{(a-b)}$$

som innsatt i den andre ligningen gir

$$a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\frac{(-(a+b))}{(a-b)} = 36,$$

det vil si

$$a^2 + b^2 - (a+b)^2 = 2ab = 36.$$

Så det geometriske stedet for tangeringspunktet har ligning

$$xy = 18$$

og er en hyperbel.

Eksempel 5.6. Punktet $A = (a, 0)$ og punktet $B = (0, b)$ er gitt. La C_A være sirkelen gjennom origo som har sentrum i A, og la C_B være sirkelen gjennom origo som har sentrum i B. La l være en linje gjennom origo, og la A' og B' være de andre skjæringspunktene mellom linja l og sirklene C_A og C_B. La P være midtpunktet på linjestykket $A'B'$. Vi skal finne det geometriske stedet for P når l varierer og vise at A, B og origo ligger på dette geometriske stedet.

Ligningene til C_A og C_B er

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \quad \text{og} \quad x^2 + (y-b)^2 = b^2$$

mens ligningen til l er $kx - y = 0$ eller $x = 0$. Punktet A' har koordinater bestemt av ligningene $y_A = kx_A$ og $x_A^2 - 2ax_A + y_A^2 = 0$, så $(1+k^2)x_A^2 - 2ax_A = 0$ og derfor

$$x_A = \frac{2a}{1+k^2}, y_A = \frac{2ak}{1+k^2}.$$

Tilsvarende får vi punktet B' sine koordinater

$$x_B = \frac{2bk}{1+k^2}, y_B = \frac{2bk^2}{1+k^2}.$$

Midtpunktet P på $A'B'$ har derfor koordinater

$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{a + bk}{1 + k^2}, y_P = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{ak + bk^2}{1 + k^2} = kx_P$$

Så (x_p, y_p) oppfyller ligningen

$$x_P = \frac{a + b\frac{y_P}{x_P}}{1 + (\frac{y_P}{x_P})^2},$$

som etter multiplikasjon med $x_P(1 + (\frac{y_P}{x_P})^2)$ kan ordnes til

$$(x_P - \frac{a}{2})^2 + (y_P - \frac{b}{2})^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}.$$

Det betyr at det geometriske stedet er en sirkel gjennom origo, som også går gjennom A og B.

5.3 Oppgaver

1. Finn sentrum og halvakser til kjeglesnittet med ligningen $25x^2 + 9y^2 - 18x + 2y = 0$.

2. Finn asymptoter og eksentrisitet til hyperbelen med ligning $9x^2 - 4y^2 - 18x + 4y - 6 = 0$.

3. Finn ligningen og symmetriaksene til det geometriske stedet for punkter som har dobbelt så stor avstand til punktet $(1, 2)$ som til linja $y = 5$.

4. Finn brennpunkt og styrelinje til parabelen $y = x^2$. Finn det geometriske stedet for midtpunktet til kordene til parabelen som går gjennom brennpunktet.

5. La A være et punkt på parabelen $x = y^2$, og la B være det andre punktet på parabelen som har samme x-koordinat som A. La P være skjæringspunktet mellom tangentlinja til parabelen i A og linja gjennom origo og B. Finn ligningen til det geometriske stedet for P når A gjennomløper parabelen.

6. Gitt to rette linjer definert av ligningene

$$x + 3y + 4 = 0 \quad \text{og} \quad x + 3y - 4 = 0.$$

   La l være ei linje gjennom origo som skjærer den første linja i A og den andre i B. Trekk ei linje gjennom A parallell med y-aksen og gjennom B parallell med x-aksen. Finn det geometriske stedet for skjæringspunktet mellom disse parallellene når l dreier seg om origo.

7. En sirkel med sentrum i origo skjærer x-aksen i $A = (-r, 0)$ og $B = (r, 0)$. La M være midtpunktet på normalen fra et punkt P på sirkelen på x-aksen. Finn det geometriske stedet for skjæringspunktet mellom AP og BM nå P beveger seg på sirkelen.

8. Gitt ellipsen definert av ligningen

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

der $a > b$ og punktet $M = (m, 0)$. Gjennom M trekker vi ei linje L som skjærer ellipsen i punktene P og Q. Finn ligningen til det geometriske stedet for midtpunktet av korden PQ når l dreier seg om M.

9. I parabelen $y^2 = 2px$ er det dratt en korde gjennom brennpunktet med stigningstall k. Korden er diameter i en sirkel. Finn ligningen til denne sirkelen og vis at den tangerer parabelens styrelinje. Finn så ligningen til det geometriske stedet for midtpunktet til korden når k varierer.

10. Gjennom et punkt $(2, 4)$ utenfor koordinataksene trekkes ei linje som skjærer koordinataksene i punktene A og B. La C være midtpunktet på linjestykket AB. Finn det geometriske stedet for punktet C når linja dreier seg om punktet $(2, 4)$.

11. Gitt to linjer som står normalt på hverandre. Ei tredje bevegelig linje flytter seg slik at den sammen med de to faste linjene avgrenser en trekant med konstant areal. Finn det geometriske stedet for midtpunktet av hypotenusen til denne trekanten.

12. Gitt parabelen $y^2 = 2x$ og punktet $A = (a, 0)$. La F være parabelens brennpunkt og la S være et punkt på parabelen. Finn ligningen til linja l_A gjennom A som er parallell med FS. Finn ligningen til tangenten til parabelen i S og til normalen l_S til denne tangenten i S. La P være skjæringspunktet mellom l_A og l_S. Finn det geometriske stedet for P når S gjennomløper parabelen. Hvordan varierer dette geometriske stedet når A gjennomløper $x-$aksen?

13. Gitt parabelen $y^2 = 4x$ med brennpunkt F og et punkt $Q = (-2, 4)$ utenfor parabelen. La l_Q være ei linje gjennom Q som skjærer parabelen i to punkter, A og B, og la l_d være diameteren til parabelen gjennom midtpunktet til korden AB. Diameteren l_d og styrelinja til parabelen skjærer hverandre i punktet C. La P være skjæringspunktet mellom linjene gjennom CF og QA. Finn det geometriske stedet for P når l_Q varierer, og vis at både F og Q ligger på dette geometriske stedet.

14. Finn ligningen til en generell sirkel i planet. Hvor mange punkter trengs for å bestemme en sirkel?

15. Finn ligningen til en hyperbel med gitte asymptoter symmetrisk om aksene. Hvor mange punkter trengs for å bestemme en hyperbel med disse asymptotene?

16. Dersom alle sidene i en trekant tangerer en parabel, så går den omskrevne sirkelen til trekanten gjennom brennpunktet til parabelen. Vis dette.

17. Vis at dersom et punkt ligger på samme side av et kjeglesnittet som et brennpunkt til kjeglesnittet, så fins det ingen tangenter til kjeglesnittet som passerer gjennom punktet.

18. Begrunn hvorfor en ellipse kan tegnes ved å holde en snor bundet i løkke stram rundt to faste stifter og en bevegelig blyant. Ved å bevege blyanten tegner den en ellipse med brennpunkt i de to faste stiftene. Bruk denne tegnemåten til å vise speilingsegenskapen til ellipsen ved å tenke deg at figuren holdes loddrett med blyanten erstattet med et lodd slik at ellipsen tangerer en vannrett bordplate.

19. I et rektangel, kall midtpunktene på de lengste sidene for X og Y. Del halve kortsidene i et like antall like store deler, og del hver halvdel av midtnormalen til XY i like mange like store deler. Vis at linjene gjennom X og delingspunktene på midtnormalen og linjene gjennom Y gjennom tilsvarende delingspunkter på kortsidene skjærer hverandre på en ellipse hvis akser er midtnormalene i rektangelet.

20. * Start med en sirkulært papir med et gitt fast punkt inne i sirkelen. Fold papiret slik at den brettede periferien passerer gjennom det faste punktet. Gjenta brettingen fra flere kanter. Vis at de brettede kantene vil være tangenter til en ellipse.

21. Klipp ut en trekant $\triangle ABC$. Tegn to linjer som skjærer hverandre. Beveg nå trekanten mens et hjørne ligger på den ene linja og et annet ligger på den andre linja. Vis at det tredje hjørnet vil tegne en ellipse. (Denne metoden ble oppdaget av Leonardo da Vinci).

22. Fest to stifter og en blyant på en linjal. La linjalen bevege seg mens stiftene følger hver sin rette linje som står normalt på hverandre. Vis at blyanten vil tegne en ellipse.

23. Hold den ene enden av en linjal fast, og fest en snor i den andre enden av linjalen og i et annet fast punkt i planet. Hold snoren stram rundt en blyant som kan bevege seg langs linjalen. Vis at ved å rotere linjalen vil blyanten tegne en del av en hyperbel med et brennpunkt i det faste punktet utenfor linjalen.

24. * Tegn en sirkel og et punkt F utenfor sirkelen. Trekk linjer gjenom F som skjærer sirkelen. Tegn normalene til disse linjene gjennom skjæringspunktene med sirkelen. Vis at disse vil tangere en hyperbel med brennpunkt i F.

25. * Tegn to linjer som skjærer hverandre. Merk av like mange punkter på hver linje fra skjæringspunktet og utover, slik intervallene mellom punktene alle er like store. Nummerer punktene i omvendt rekkefølge på de to linjene og trekk linjene mellom punkter med samme nummer. Vis at disse linjene vil tangere en parabel.

26. * Klipp ut en rettvinklet likebent trekant. Merk av et fast punkt og ei fast linje i planet. La hypotenusen til trekanten passere gjennom det faste punktet og la det motsatte hjørnet ligge på den faste linja. Vis at katetene vil være tangenter til en parabel med brennpunkt i det faste punktet og styrelinje langs den faste linja.

27. *I en trekant kalles skjæringspunktet mellom høydene for ortosenteret. Vis at en rettvinklet hyperbel som passerer gjennom hjørnene til trekanten og ortosenteret har sentrum på nipunktsirkelen til trekanten.

6 Kjeglesnitt som snitt av kjegler

I dette siste avsnittet viser vi hvordan kjeglesnittene som vi har definert i planet framkommer som snitt mellom plan og en kjegle i rommet, og for å gi et enkelt bevis av Pascals setning.

Punktene (x, y, z) i rommet som oppfyller ligningen $x^2 + y^2 = z^2$ danner en kjegle med toppunkt i $O = (0, 0, 0)$. Den har akse langs z-aksen og generatriser som danner en vinkel på $\frac{\pi}{4}$ med xy-planet. Ved å skjære denne kjeglen med ulike plan som ikke går gjennom O, får en i disse planene kjeglesnitt slik vi har definert dem i tidligere forelesninger. Et plan som danner mindre enn $\frac{\pi}{4}$ med xy-planet vil skjære kjeglen i en ellipse, hvis vinkelen er større enn $\frac{\pi}{4}$ blir skjæringskurven en hyperbel, og hvis vinkelen er lik $\frac{\pi}{4}$ så blir skjæringskurven en parabel. For å vise dette ser vi på plan gjennom linja

$$z = y - 1 = 0.$$

La vinkelen som dette planet danner med xy-planet være α, da kan vi bruke koordinater (u, v) i dette planet slik at

$$x = u, \quad y = v\cos\alpha + 1 \quad \text{og} \quad z = v\sin\alpha.$$

Ved innsetting i ligningen for kjeglen, får vi

$$u^2 + (v\cos\alpha + 1)^2 = v^2\sin^2\alpha$$

som vi kan skrive på formen

$$u^2 + v^2\cos 2\alpha + 2v\cos\alpha + 1 = 0.$$

Dersom $\cos 2\alpha = 0$, det vil si $\alpha = \frac{\pi}{4}$, så blir snittet med kjeglen en parabel, gitt ved ligningen

$$u^2 = -v\sqrt{2} - 1.$$

Når $\cos 2\alpha \neq 0$ kan vi skrive ligningen på formen

$$\frac{u^2}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}} + \frac{(v + \frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha})^2}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2 2\alpha}} = 1,$$

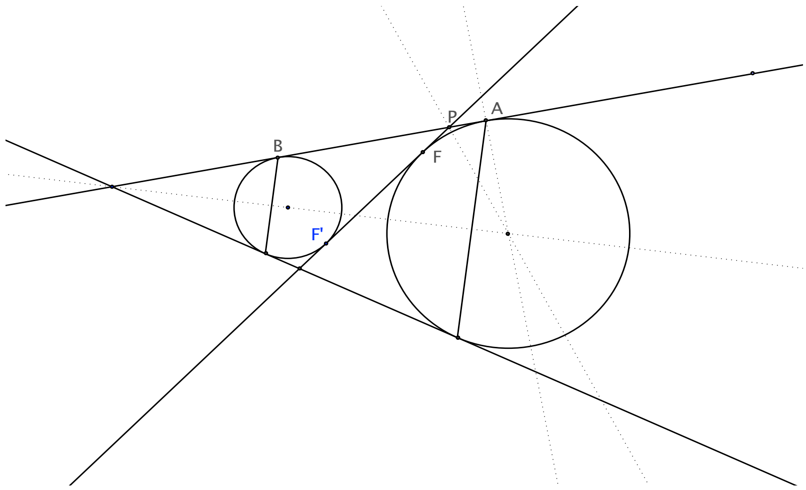
Siden

$$\cos 2\alpha > 0 \quad \text{hvis} \quad \alpha < \frac{\pi}{4}$$

så definerer ligningen i dette tilfellet en ellipse. Og siden

$$\cos 2\alpha < 0 \quad \text{hvis} \quad \alpha > \frac{\pi}{4},$$

så definerer ligningen i dette tilfellet en hyperbel.



Figur 32: Plant snitt av et kjeglesnitt med dandelinske kuler

Dette kan også vises geometrisk med såkalte dandelinske kuler (Dandelin). Vi glemmer da koordinatene og konsentrerer oss om kjeglen og planet som snitter kjeglen langs en kurve.

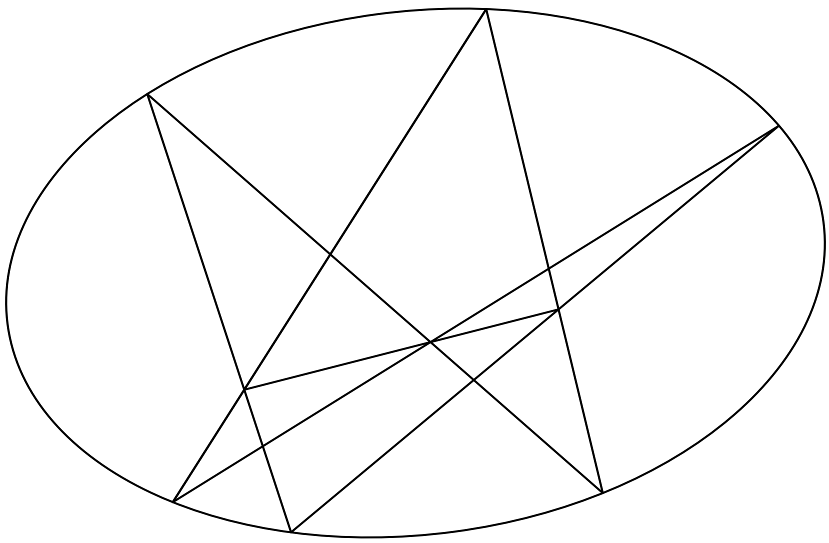
Ei **dandelinsk kule** er ei kule som ligger inne i kjeglen og som berører denne langs en sirkel (tenk på ei iskremkule i kjeks med form som en kjegle). Anta først at planet bare skjærer den ene halvdelen av kjeglen. Da fins det to dandelinske kuler som berører planet. En ligger mellom planet og toppunktet til kjeglen, og en ligger på den andre siden av kjeglen. For et punkt P på kjeglesnittet er nå avstanden PF til berøringspunktet til en dandelinsk kule med planet lik avstanden PA langs kjeglen til berøringssirkelen mellom denne dandelinske kula og kjeglen. Tilsvarende gjelder for avstandene PF' og PB til berøringspunkter på den andre dandelinske kula. Summen $PF+PF'$ er presis lengden AB målt langs linja på kjeglen som går gjennom punktet på kjeglesnittet mellom berøringssirklene til de to dandelinske kulene. Men denne avstanden er uavhengig av hvilket punkt vi tar på kjeglesnittet, så dette er en ellipse.

Tilfellene for parabel og hyperbel er helt analoge.

I alle tilfellene er altså brennpunktene til kjeglesnittet berøringspunktene til dandelinske kuler.

Tolkningen av kjeglesnitt som snitt av kjegler kombinert med perspektivitet gir oss mulighet til å vise generelle setninger for kjeglesnitt ved hjelp av spesialtilfeller. Vi skal avslutte med et slikt eksempel.

Setning 6.1. (Pascal) *Hvis punktene A, B, C, D, E, F ligger på et kjeglesnitt så er skjæringspunktene mellom linjene gjennom AB og DE, BC og EF, FA og CD kollineære.*



Figur 33: Pascals setning for ellipse

Bevis. På kjeglen over kjeglesnittet bestemmer de seks punktene 6 linjer gjennom toppunktet. Disse vil igjen snitte en sirkel som danner skjæringen mellom et plan normalt på aksen i kjeglen og kjeglen. For de 6 punktene på sirkelen gjelder Pascals setning slik vi så det i kapittel 2. De tre kollineære skjæringspunktene definerer nå et plan gjennom toppunktet i kjeglen. Dette planet skjærer det opprinnelige planet i ei linje gjennom de tre skjæringspunktene, og setningen er bevist. □

6.1 Oppgaver

1. Gjennomfør beviset med dandelinske kuler for at snittet mellom et plan som er parallelt med en generatrise og kjeglen er en parabel.

2. Gjennomfør beviset med dandelinske kuler for at snittet mellom et plan som skjærer begge delene til kjeglen og kjeglen er en hyperbel.

Litteratur

- Alfsen og Alfsen: Analytisk plangeometri. Aschehoug, 1955.
- Euklid: Elementer I-IV. Forlaget Trip, Vejle, 1985.
- Eves, Howard: Fundamentals of Modern Elementary Geometry. Jones and Bartlett Publishers, Boston, 1997.
- Greenberg, Marvin Jay: Euclidean and Non-Euclidean Geometries. 3rd edition. W. H. Freeman and Co, New York, 1993.
- Iden, Oddvar: Geometrien blir til mens du glor: Kompendium til emnet M131-Elementær geometri, Matematisk Institutt, Univ. i Bergen, 1997.
- Jennings George A.: Modern Geometry with Applications. Springer Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1994.
- Lang, Serge: Geometry: A High School Course. Springer Verlag.
- Maxwell, E. A.: Elementary Coordinate Geometry. 2. edition. Clarendon Press, Oxford, 1958.
- Pottage, John: Geometrical Investigations. Addison-Wesley Publishing Co, Reading, 1983.
- Salmon, George: A Treatise on Conic Sections. London, 1869.
- Sogn, Harald: Oppgavene i matematikk til realartium. Søkbart fra www.sundaune.no/nb
- Søgaard A. og Tambs Lyche R.: Matematikk for den høgre skolen III, Gyldendal, Oslo 1942
- Thompson, Jan: Matematiken i historien. Studentlitteratur, Lund, 1996.
- Wells, David: The Penguin dictionary of curious and interesting geometry. Penguin Books, London, 1991.

Adresse:
Matematisk Institutt, P.b. 1053 Blindern, 0316 Oslo
e-post: ranestad@math.uio.no