Oppgave 76 I en eske ligger det fire lapper som har numrene 1, 2, 3 og 4. Du trekker tilfeldig to lapper uten tilbakelegging.

a) Skriv opp alle utfallene for dette forsøket.
Hva er sannsynligheten for hvert av utfallene?

b) La X være det høyeste tallet du får på en av lappene.
Hvilke verdier kan denne tilfeldige variabelen få?
Skriv opp de utfallene som gir hver av disse verdiene.

c) Bestem sannsynlighetsfordelingen til X.

a) Det er seks mulige utfall (uordnede):
1 og 2, 1 og 3, 1 og 4, 2 og 3, 2 og 4, 3 og 4
Hvert av utfallene har sannsynlighet 1/6

b) X kan få verdiene 2, 3 og 4
$X=2$: 1 og 2, $X=3$: 1 og 3, 2 og 3, $X=4$: 1 og 4, 2 og 4, 3 og 4

c)

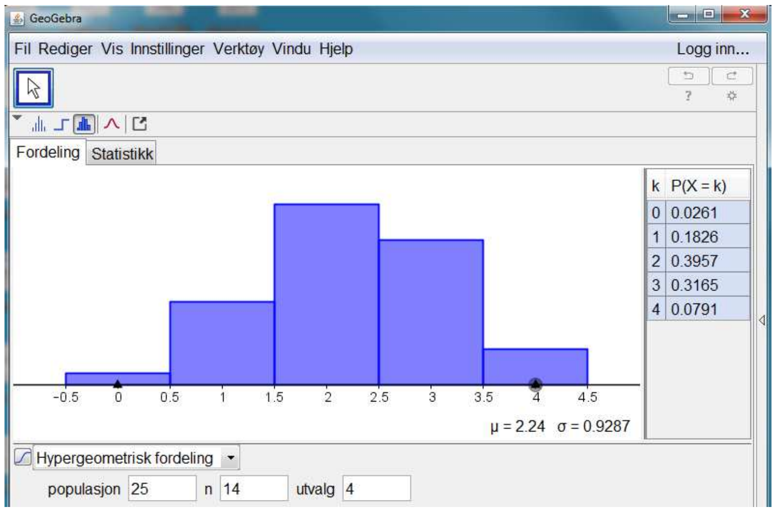
k	2	3	4
$P(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

Eksempel 6.12. I en klasse er det 11 jenter og 14 gutter. De skal arrangere en klassefest og vil oppnevne en komité med fire medlemmer til å forberede festen. Siden alle elevene gjerne vil være med i komiteen, blir de enig om å trekke lodd.

Oppgave 78 Se på eksempel 6.12. La X stå for antall gutter i festkomiteen. Skriv opp en formel for sannsynlighetsfordelingen til X.

Sannsynlighetsfordeling:

$$P(X=k)=\frac{\binom{14}{k}\cdot\binom{11}{4-k}}{\binom{25}{4}} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$$



Oppgave 80 Per trekker tilfeldig tre bokstaver fra alfabetet. La X være antall konsonanter han får.

a) Skriv opp en formel for sannsynlighetsfordelingen til X.

b) Bruk formelen til å finne sannsynligheten for at Per vil få
(i) bare konsonanter
(ii) to konsonanter og én vokal
(iii) én konsonant og to vokaler
(iv) bare vokaler

a) Det er 20 konsonanter og 9 vokaler i alfabetet.

Sannsynlighetsfordeling:

$$P(X=k)=\frac{\binom{20}{k}\cdot\binom{9}{3-k}}{\binom{29}{3}} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

b.i)

$$P(\text{bare konsonanter}) = P(X=3)$$

$$= \frac{\binom{20}{3}\cdot\binom{9}{0}}{\binom{29}{3}} = \frac{1140\cdot 1}{3654} = 0.312$$

b.ii)

$$P(\text{to konsonanter og én vokal}) = P(X=2)$$

$$= \frac{\binom{20}{2}\cdot\binom{9}{1}}{\binom{29}{3}} = \frac{190\cdot 9}{3654} = 0.486$$

b.iii)

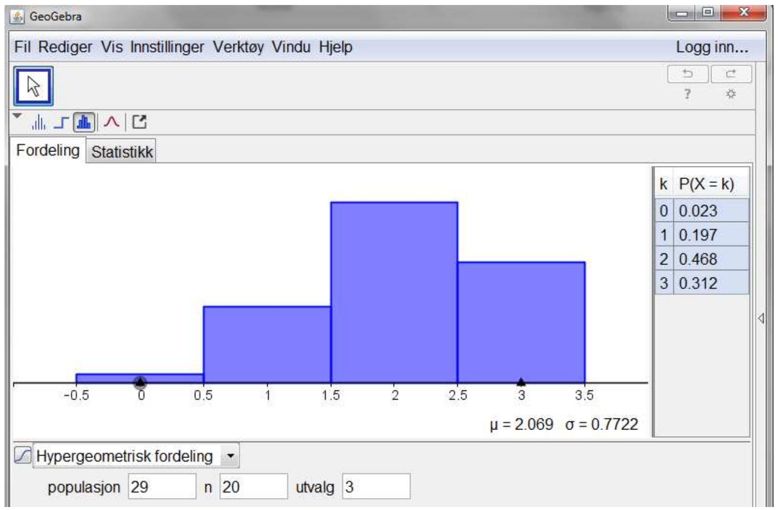
$$P(\text{én konsonanter og to vokaler}) = P(X=1)$$

$$= \frac{\binom{20}{1}\cdot\binom{9}{2}}{\binom{29}{3}} = \frac{20\cdot 36}{3654} = 0.197$$

b.iv)

$$P(\text{bare vokaler}) = P(X=0)$$

$$= \frac{\binom{20}{0}\cdot\binom{9}{3}}{\binom{29}{3}} = \frac{1\cdot 84}{3654} = 0.023$$



Oppgave 83 I en klasse holdes en flervalgsprøve med 10 spørsmål. Prøven gjennomføres ved at elevene krysser av ved ett av tre alternativ (hvorav ett er riktig) for hvert spørsmål. Læreren bestemmer seg for å gi karakteren 6 hvis alle spørsmålene er riktig besvart og karakteren 5 hvis 8 eller 9 spørsmål er riktig besvart. Per har ikke lest på leksene og krysser helt tilfeldig av for hvert spørsmål.

a) La X være antall riktige svar Per får.
Forklar hvorfor X er binomisk fordelt med $n = 10$ og $p = 1/3$.

b) Hva er sannsynligheten for at Per får karakteren 6?

c) Hva er sannsynligheten for at Per får karakteren 5?

a) Vi har at:

- Per svarer på *n* = 10 spørsmål
- For hvert spørsmål kan han svare riktig eller galt
- Sannsynligheten for riktig svar er *p* =1/3 for hvert spørsmål
- Siden Per krysser av tilfeldig, er svareneriktige eller gale uavhengig av hverandre

Punktene ovenfor er de som karakteriserer en binomisk situasjon. Derfor er *X* binomisk fordelt

b) $P(\text{Per får karakteren 6}) = P(X = 10)$

$$= \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{0} = \left(\frac{1}{3}\right)^{10} = 0.0000169$$

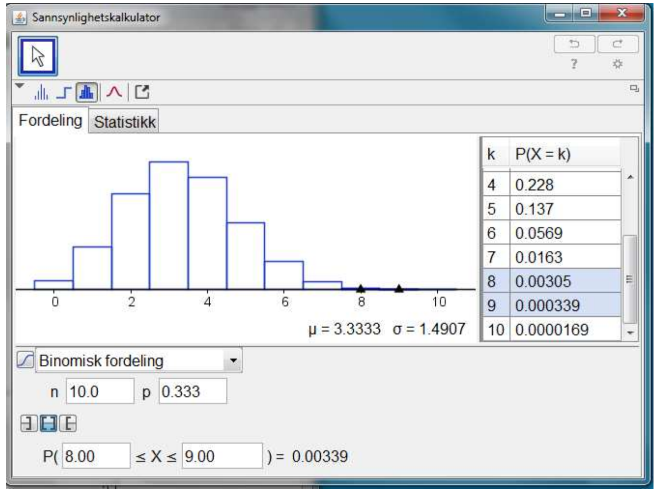
c)

$P(\text{Per får karakteren 5})$

$$= P(8 \leq X \leq 9) = P(X = 8) + P(X = 9)$$

$$= \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2} + \binom{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{1}$$

$$= 0.00305 + 0.00034 = 0.00339$$



Oppgave 85 I en urne er det tre røde kuler og to hvite kuler. To kuler trekkes tilfeldig ut, henholdsvis uten og med tilbakelegging. La X angi antall røde kuler vi trekker.

a) Hva gir binomisk fordeling for X, trekking med eller uten tilbakelegging?

b) Beregn $P(X = x)$ for $x = 0, 1, 2$ både for trekning med og uten tilbakelegging.

Anta så at det er 300 røde kuler og 200 hvite kuler i urnen. Vi lar fortsatt X angi antall røde kuler i to trekninger.

c) Beregn også nå $P(X = x)$ for $x = 0, 1, 2$ for trekning med og uten tilbakelegging. Sammenlign med det du fant i punkt a.

Resultatet i punkt c illustrerer at hvis vi trekker et (relativt sett) lite utvalg fra en (relativt sett) stor populasjon, så er det ubetydelig forskjell på trekning med og uten tilbakelegging.

Ved en meningsmåling om holdningen til norsk EU-medlemskap trekkes det tilfeldig (og uten tilbakelegging) et utvalg på 1000 av befolkningen over 18 år. La X være antallet i utvalget som er mot norsk EU-medlemskap.

d) Hvorfor er det rimelig å anta at X er binomisk fordelt med $n = 1000$ og p lik (den ukjente) andelen av den voksne befolkningen som er mot norsk EU-medlemskap?

a) Trekning med tilbakelegging gir binomisk fordeling

b)

Uten tilbakelegging:

$$P(X = k) = \frac{\binom{3}{k} \cdot \binom{2}{2-k}}{\binom{5}{2}} \qquad k = 0, 1, 2$$

Med tilbakelegging:

$$P(X = k) = \binom{2}{k} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{k} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2-k} \qquad k = 0, 1, 2$$

k	0	1	2
Uten tilbakelegging: $P(X=k)$	0.10	0.60	0.30
Med tilbakelegging: $P(X=k)$	0.16	0.48	0.36

c) Uten tilbakelegging:

$$P(X=k) = \frac{\binom{300}{k}\cdot\binom{200}{2-k}}{\binom{500}{2}} \qquad k = 0, 1, 2$$

Med tilbakelegging er som i spørsmål b

	k	0	1	2
Uten:	$P(X=k)$	0.1595	0.4810	0.3595

Det er nå liten forskjell på med og uten tilbakelegging

d) Vi trekker tilfeldig 1000 personer blant alle med stemmerett. Strengt tatt har vi da tilfeldig trekning uten tilbakelegging, slik at X er hypergeometrisk fordelt. Men siden vi trekker et lite antall personer i forhold til størrelsen av hele befolkningen er det liten forskjell på trekning uten og med tilbakelegging. Derfor kan vi regne som om X er binomisk fordelt.

Oppgave 86 Et politisk parti har ved et bestemt tidspunkt støtte av 25% av befolkningen. Tjue personer blir trukket ut tilfeldig. La X angi hvor mange av de uttrukne som støtter partiet.

a) Forklar hvorfor vi kan regne som om X er binomisk fordelt med $n = 20$ og $p = 0.25$.

b) Skriv opp en formel for sannsynlighetsfordelingen til X.

c) Bruk formelen til å finne sannsynligheten for at
 (i) akkurat 3 støtter partiet
 (ii) akkurat 4 støtter partiet
 (iii) akkurat 5 støtter partiet.

a) Vi trekker tilfeldig 20 personer blant alle med stemmerett. Strengt tatt har vi tilfeldig trekning uten tilbakelegging, slik at X er hypergeometrisk fordelt. Men siden vi trekker et lite antall personer i forhold til størrelsen av hele befolkningen er det liten forskjell på trekning uten og med tilbakelegging (jf oppgave 85). Derfor kan vi regne som om X er binomisk fordelt.

b) Sannsynlighetsfordeling:

$$P(X=k) = \binom{20}{k}\cdot 0.25^k \cdot 0.75^{20-k}$$

c.i)

$$\begin{aligned} P(3 \text{ støtter partiet}) &= P(X=3) \\ &= \binom{20}{3}\cdot 0.25^3 \cdot 0.75^{17} \\ &= 1140 \cdot 0.25^3 \cdot 0.75^{17} \\ &= 0.134 \end{aligned}$$

c.ii)

$$P(4 \text{ støtter partiet}) = P(X = 4)$$
$$= \binom{20}{4} \cdot 0.25^4 \cdot 0.75^{16}$$
$$= 4845 \cdot 0.25^4 \cdot 0.75^{16}$$
$$= 0.190$$

c.iii)

$$P(5 \text{ støtter partiet}) = P(X = 5)$$
$$= \binom{20}{5} \cdot 0.25^5 \cdot 0.75^{15}$$
$$= 15504 \cdot 0.25^5 \cdot 0.75^{15}$$
$$= 0.202$$