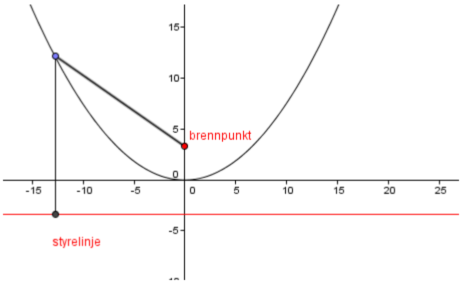
Kollokvium 26. februar.

Parabler

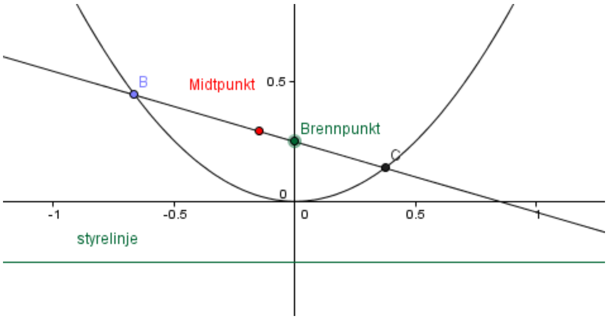
4. Finn brennpunkt og styrelinje til parabelen $y = x^2$. Finn det geometriske stedet for midtpunktet til kordene til parabelen som går gjennom brennpunktet.

Definisjon 3.2. (Parabel - brennpunkt og styrelinje-definisjon) En **parabel** er det geometriske stedet for punkter som ligger like langt fra et gitt fast punkt og ei gitt fast linje som ikke inneholder punktet (se figur 18).



4. Finn brennpunkt og styrelinje til parabelen $y = x^2$. Finn det geometriske stedet for midtpunktet til kordene til parabelen som går gjennom brennpunktet.

En parabel på formen $y = 4cx^2$ har brennpunkt $(0, c)$ og styrelinje $y = -c$.



Forklar hvorfor parabelen i oppgaven har

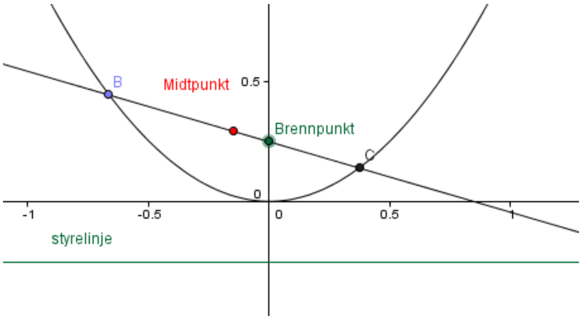
Brennpunkt: $\left(0, \frac{1}{4}\right)$

Styrelinje: $y = -\frac{1}{4}$

4. Finn brennpunkt og styrelinje til parabelen $y = x^2$. Finn det geometriske stedet for midtpunktet til kordene til parabelen som går gjennom brennpunktet.

Strategi

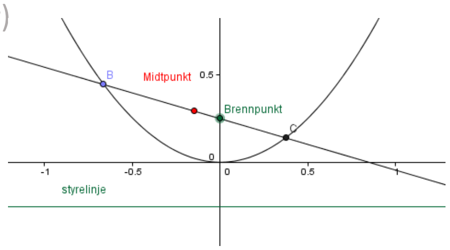
1. Finne generell linje gjennom brennpunktet
2. Finne skjæringspunktene $B = (x_B, y_B),\ C = (x_C, y_C)$.
3. Regne ut midtpunktet $P = (x_P, y_P) = \left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right)$.



Steg 2

I. $y = ax + \frac{1}{4}$ (fra steg 1 – som vi har hoppet over)

II. $y = x^2$



$$x^2 = ax + \frac{1}{4}$$

$$x^2 - ax - \frac{1}{4} = 0$$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2+1}}{2}$$

$$x_B = \frac{a - \sqrt{a^2+1}}{2}$$

$$x_C = \frac{a + \sqrt{a^2+1}}{2}$$

$$y_B = x_B^2 = \left(\frac{a - \sqrt{a^2+1}}{2}\right)^2$$

$$\mathrm{y_B} = \frac{1}{4}\left(2a^2 - 2a\sqrt{a^2+1} + 1\right)$$

$$y_C = x_C^2 = \left(\frac{a + \sqrt{a^2+1}}{2}\right)^2$$

$$\mathrm{y_C} = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2a\sqrt{a^2+1} + 1\right)$$

Steg 3

$$x_p = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{\mathrm{a}}{2}$$

$$y_p = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2(2\mathrm{a}^2 + 1)$$
$$= \frac{a^2}{2} + \frac{1}{4}$$

Til slutt finner vi stedet $P = (x_P, y_P)$ uttryt ved en ligning_

$$a = 2x_P$$

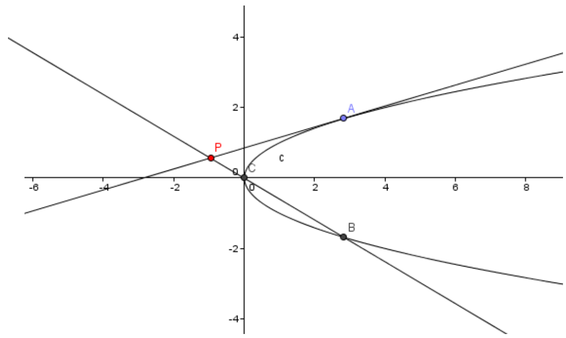
$$y_p = \frac{(2x_P)^2}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{y_P = 2x_P^2 + \frac{1}{4}}$$

5. La A være et punkt på parabelen $x = y^2$, og la B være det andre punktet på parabelen som har samme x-koordinat som A. La P være skjæringspunktet mellom tangentlinja til parabelen i A og linja gjennom origo og B. Finn ligningen til det geometriske stedet for P når A gjennomløper parabelen.

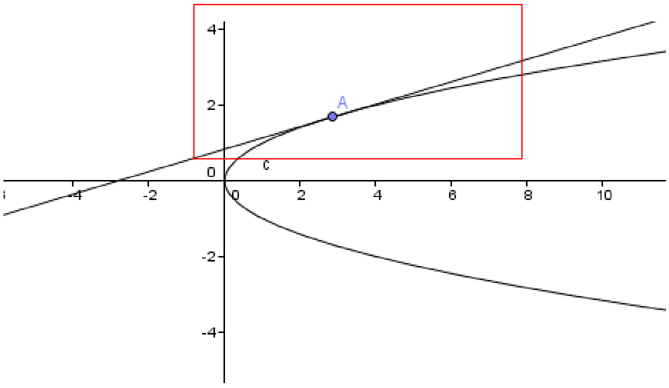
Strategi

1. Finne tangenten gjennom A
2. Finne linja BC.
3. (x_P, y_P) er skjæringspunktet mellom linja BC og tangenten gjennom A.



Vi kaller $A = (a^2, a)$, $B = (a^2, -a)$

Tangent til parabelen $x - y^2 = 0$



$$x - y(x)^2 = 0$$

Derivér på begge sider

$$1 - 2\,yy' = 0$$

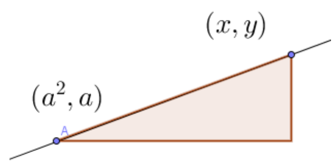
$$y' = \frac{1}{2y}$$

(når $y \neq 0$)

Stigningstallet til tangenten i punktet $\mathrm{A} = (a^2, a)$er dermed gitt ved: $\frac{1}{2a}$

Steg 1

Tangenten i punktet A er linja gjennom punktet= (a^2, a) som har stigningstall $\frac{1}{2a}$.



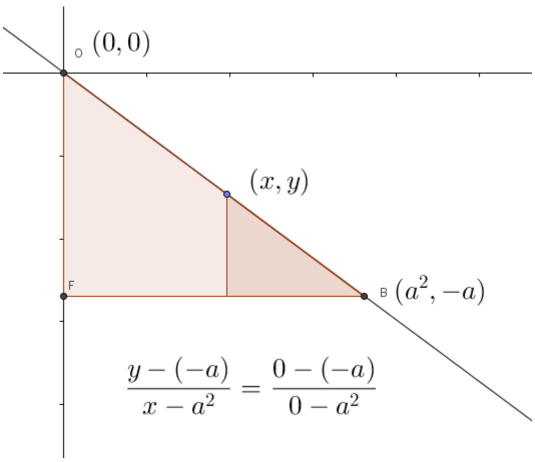
$$\frac{y-a}{x-a^2} = \frac{1}{2a}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2a}(x - a^2) + a}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{x}{2a} + \frac{a}{2}}$$

Steg 2

Linja $B0$ finner vi ved 2-punktsformelen.



$$\frac{y-(-a)}{x-a^2} = \frac{0-(-a)}{0-a^2}$$

$$\frac{y+a}{x-a^2} = -\frac{1}{a}$$

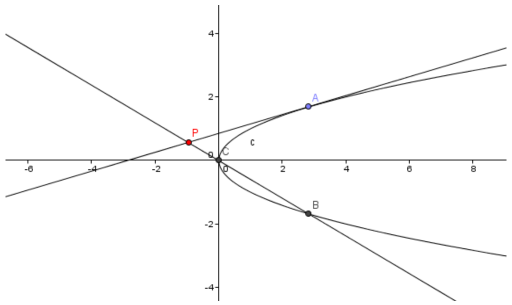
$$y = -\frac{1}{a}(x - a^2) - a$$

$$y = -\frac{x}{a}$$

Steg 3 Alternativ 1

$$I. \quad y = \frac{x}{2a} + \frac{a}{2}$$

$$II. \quad y = \frac{-x}{a}$$



Finne ligningen for det geometriske stedet P
- **uttrykk a vha II,**
- **sett inn I**

$$a = -\frac{x}{y}$$

$$y = \frac{x}{2\left(-\frac{x}{y}\right)} + \frac{-\frac{x}{y}}{2}$$

$$y = -\frac{y}{2} - \frac{x}{2y}$$

$$\left(\frac{3}{2}y\right) = -\frac{x}{2y}$$

$$\boldsymbol{3y^2 = -x}$$

Steg 3 Alternativ 2

$$I. \quad y = \frac{x}{2a} + \frac{a}{2}$$

$$II. \quad y = \frac{-x}{a}$$

Finne ligningen for det geometriske stedet P
- **Løs lignings-settet I og II, uttrykk løsningene vha a.**
- **Uttrykk a vha uttrykket for y_P.**
- **Sett inn uttrykket for a i uttrykket for x_P.**

$$\frac{x_P}{2a} + \frac{a}{2} = -\frac{x_P}{a}$$

$$x_P\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{a}\right) = \frac{-a}{2}$$

$$x_P\frac{1+2}{2a} = \frac{-\mathrm{a}}{2}$$

$$x_P = -\frac{1}{3}a^2$$

$$y_P = \left(-\frac{1}{a}\right)\left(-\frac{1}{3}a^2\right) = \frac{1}{3}a$$

$$a = 3y_P$$

$$x_P = -\frac{1}{3}(3y_P)^2$$

$$\boldsymbol{x_P = -3y_P^2}$$