90

Thursday, December 4, 2014 10:18 AM

$x^2 + y^2 = 1$

$(x')^2 + (y')^2 = (z')^2$

$x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{4}{5}$ er en løsning

- $3^2 + 4^2 = 5^2 \quad | \cdot \frac{1}{5^2}$

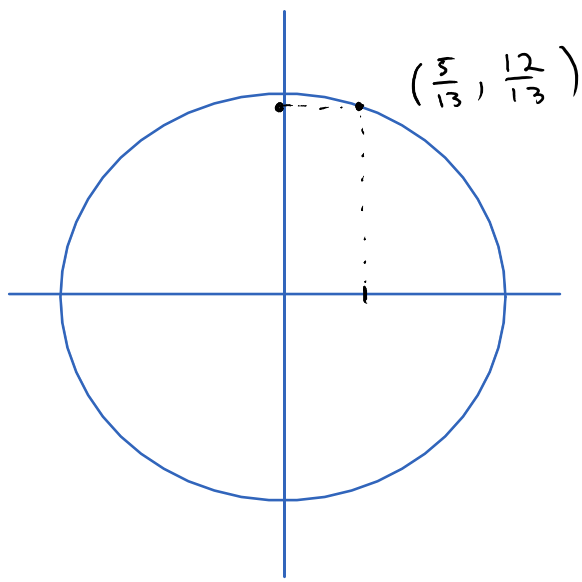
$\frac{3^2}{5^2} + \frac{4^2}{5^2} = 1$

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$

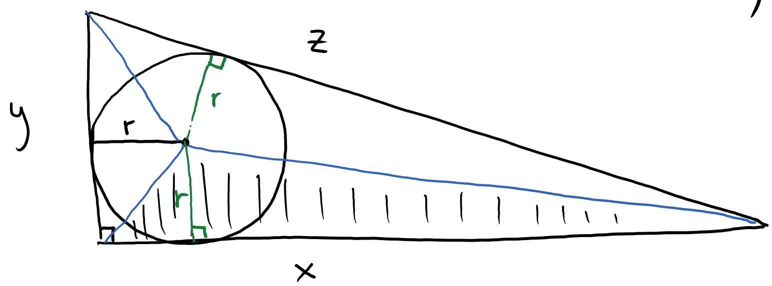
- $5^2 + 12^2 = 13^2$

$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$

$x = \frac{5}{13}$, $y = \frac{12}{13}$ er også en løsning.



1) $A = \dfrac{x \cdot y}{2}$



$x = 2kmn$
$y = k(m^2 - n^2)$
$z = k(m^2 + n^2)$

2) Forklar hvorfor $A = \dfrac{rx}{2} + \dfrac{ry}{2} + \dfrac{rz}{2}$

$$A = \frac{\cancel{2}kmn \cdot k(m^2 - n^2)}{\cancel{2}}$$

$$A = \frac{r}{2}\left(2kmn + k(m^2 - \cancel{n^2}) + k(m^2 + \cancel{n^2})\right)$$

$$\frac{r}{2}(2kmn + 2km^2) = kmn \cdot k(m^2 - n^2)$$

$$\frac{r}{\cancel{2}}(\cancel{2}km(n+m)) = kmn \cdot k(m-n)(m+n)$$

$$r = \frac{\cancel{km}n \cdot k(m-n)\cancel{(m+n)}}{\cancel{km}\cancel{(n+m)}} = n \cdot k(m-n)$$

r er et heltall siden n, k, m er heltall.

(92) Hvis $x = 5$, $y = 12$, $z = 13$, hva er r?

$$A = \frac{xy}{2}, \quad A = \frac{r}{2}(x+y+z)$$

$$xy = r(x+y+z)$$

$$r = \frac{xy}{x+y+z} = \frac{5 \cdot 12}{5+12+13} = \frac{60}{30} = \underline{\underline{2}}$$

(man får tallene $x=5, y=12, z=13$ ved å velge $k=1, m=3, n=2$. Når vi vet dette kunne vi også regnet ut slik: $r = 2 \cdot 1(3-2) = 2$)

1: $x=3$ $y=4$ $z=5$

hvis $x = 3,\ y = 4,\ z = 5$

$$r = \frac{3 \cdot 4}{3+4+5} = \frac{12}{12} = \underline{\underline{1}}$$

93

Thursday, December 4, 2014 10:55 AM

skriv 1029 som produkt av primtallspotensene

1029	3
343	7
49	7
7	7
1	

$$\underline{\underline{1029 = 3 \cdot 7^3}}$$

106

Thursday, December 4, 2014 11:13 AM

a) la $p=5$, $q=11$, $n = p \cdot q = \underline{55}$

b) velger $e=3$ (vi trenger $SFF(3, 5-1) = 1$
$SFF(3, 11-1) = 1$)

c) Regn ut $\phi(n)$

Eulers totient-funksjon

$\phi(n) = (p-1)(q-1)$ når $n = p \cdot q$

$\phi(n) = 4 \cdot 10 = \underline{\underline{40}}$

Løs ligningen $e \cdot d \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$

$3d \equiv 1 \pmod{40}$

Ved å bruke Euklids algoritme ser vi at

$40 = 13 \cdot 3 + 1$

$1 = 40 + 3(-13) \equiv 3(-13) \pmod{40}$

$d \equiv -13 \equiv 27 \pmod{40}$ $\underline{\underline{d \equiv 27 \ (40)}}$

offentlig nøkkel $\underline{\underline{e=3, n=55}}$

privat nøkkel $\underline{\underline{d=27, n=55}}$

- krypter tallet 12 vha den offentlige nøkkelen

$$\boxed{\text{encrypt}(12) = 12^{\text{"offentlig nøkkel e"}} \pmod{n}}$$

$= 12^3 \pmod{55}$

$12^2 = 144 = 2 \cdot 55 + 34 \equiv 34 \ (55)$

$12^3 = 12^2 \cdot 12 \equiv 34 \cdot 12 = 408 = 55 \cdot 7 + 23$ (55)

$\equiv 23 \ (55)$

$\text{encrypt}(12) = 23$

$\text{encrypt}(12) = 23$

- dekrypter tallet 23 vha. den private nøkkelen

$$\boxed{\text{decrypt}(23) = 23^{\text{"privat nøkkel } d\text{"}} \pmod n}$$

$$= 23^{27} \pmod{55}$$

$$23^2 = 529 = 9 \cdot 55 + 34 \equiv 34 \quad (55)$$

$$23^4 = (23^2)^2 \equiv (34)^2 \quad (55)$$

$$= 55 \cdot 21 + 1 \equiv 1 \quad (55)$$

$$23^{27} = (23^4)^6 \cdot 23^3 \equiv 23^3 \quad (55)$$

$$= 23^2 \cdot 23 \equiv 34 \cdot 23 \quad (55)$$

$$= 782 = 55 \cdot 14 + 12 \quad (55)$$

$$\equiv 12 \quad (55$$

$$\underline{\underline{\text{decryp}(23) = 12}}$$

Oblig 2 Oppgave 2

Thursday, December 4, 2014 11:42 AM

$2 = 5 \cdot 10 - 2 \cdot 24$

Finn alle løsninger av ligningen

$2 = x \cdot 10 + y \cdot 24$

$$\left.\begin{array}{l} x_t = x_0 + \frac{24}{2} t \\ y_t = y_0 - \frac{10}{2} t \end{array}\right\} t \in \mathbb{Z}$$

$4 = x \cdot 10 + y 24$

<u>Alt1</u> $24 = 10 \cdot 2 + 4$ | $\underline{4 = 24 - 10 \cdot 2}$

$x_0 = -2$

$y_0 = 1$

$$\left.\begin{array}{l} x_t = -2 + 12t \\ y_t = 1 - 5t \end{array}\right\} t \in \mathbb{Z}$$

<u>Alt 2</u>

vet at $2 = 5 \cdot 10 - 24 \cdot 2 \quad | \cdot 2$

$4 = 5 \cdot 2 \cdot 10 - 24 \cdot 2 \cdot 2$

$= 10 \cdot 10 - 24 \cdot 4$

$x_0' = 10$

$y_0' = -4$

$(x_1', y_1') = (-2, 1)$

$x_s' = 10 + 12s$ $\quad s \in \mathbb{Z}$

$y_s' = -4 - 5s$

Oblig oppgave 1 f

Tuesday, December 2, 2014 8:46 PM

Sjekke om modellen $p(t) = \left(\frac{kt + C}{2}\right)^2$ passet for befolknings-veksten i en norsk by

Tettsteder med minst 10 000 innbyggere. Folkemengde og areal (SÅ 54)

Tettsted [1]	1.11.1960	1.11.1970 [2]	1.11.1980 [3]	3.11.1990	1.1.2013 [4]
Oslo [5]	581 179	645 413	642 954	685 530	925 228
Bergen [6]	152 121	182 265	180 959	187 382	247 731
Stavanger/Sandnes [7]	.	.	.	.	203 771
Stavanger [7]	70 100	79 330	90 825	94 159	.
Sandnes [7]	14 917	21 792	26 591	32 616	.
Trondheim	92 614	112 102	127 624	130 522	169 972
Drammen [8]	50 169	56 521	56 863	58 717	110 503
Fredrikstad/Sarpsborg [7]	.	.	.	.	106 758
Fredrikstad [7]	45 228	51 141	51 284	50 179	.
Sarpsborg [7]	31 888	36 449	39 889	39 772	.
Porsgrunn/Skien [7]	.	.	.	.	90 621
Porsgrunn [7]	25 257	32 613	35 304	35 172	.
Skien [7]	27 807	29 592	28 151	29 328	.
Kristiansand [9]	37 390	48 250	50 703	54 267	58 662

[1] Tettsted: Tettbygd område med minst 200 bosatte der avstanden mellom husene som regel ikke overstiger 50 meter. Tettsted avgrenses uavhengig av administrative grenser.
[2] I kommuner der andelen personer bosatt i tettsteder overstiger 50 prosent av kommunens folkemengde, er personer uten opplysning om bostedsstrøk (tett-/spredtbygd) lagt til det største tettstedet i kommunen.
[3] Ved å fordele personer uten opplysning om bostedsstrøk på samme måte som i 1970, ville folkemengden i de største tettstedene vært: Oslo 649 031, Bergen 181 919, Trondheim 128 159 og Stavanger 91 129.
[4] Ny avgrensningsmetode som kan påvirke sammenlignbarheten med tidligere tall.
[5] Tettstedene Lommedalen, Heggelia og Nærnes er skilt ut fra Oslo tettsted. Det bodde i alt 16 700 personer i de utskilte områdene.
[6] Tettstedene Hylkje og Fanahammeren er slått sammen med Bergen tettsted. Det bodde i alt 6 000 personer i de sammenslåtte tettstedene.
[7] Fra og med 1. januar 1999 er sammenvokste tettsteder blitt regnet som ett tettsted.
[8] Tettstedet Lierbyen slått sammen med Drammen tettsted.
[9] Nytt tettsted Korsvik utskilt fra Kristiansand tettsted.
[10] Tettstedet Ålesund/Spjelkavik ble per 1. januar 2002 slått sammen med Langevåg tettsted til Ålesund tettsted.
[11] Tettstedet Moss ble per 1. januar 2007 slått sammen med Son/Store Brevik tettsted til Moss tettsted.
[12] Tettstedene Fevik og Kongshamn slått sammen med Arendal tettsted.
[13] Tettstedene Avaldsnes og Vormedal er utskilt fra Haugesund tettsted.
[14] Tettstedene Hamna, Tromsdalen og Kvaløysletta er utskilt fra Tromsø tettsted.
[15] Tettstedet Bekkelaget i Stange kommune er utskilt fra Hamar tettsted.
[16] Tettstedene Ytre Arna, Indre Arna og Espeland slått sammen til tettstedet Arna.

Vi bruker statistikk fra 1980 og 1990 for å se om modellen passer for Oslo i årene fra 1980.

(1980) år 0:

$$p(0) = 642\,954$$
$$\left(\frac{C}{2}\right)^2 = 642\,954$$
$$C = \sqrt{642954} \cdot 2$$
$$\approx 1604$$

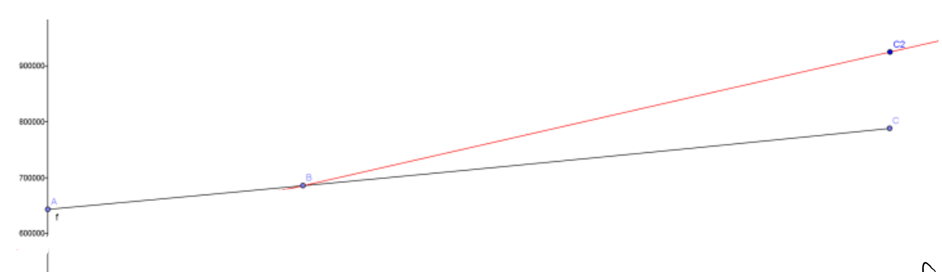
$$\boxed{p(t) = \left(\frac{kt + 1604}{2}\right)^2}$$

(1990) år 10:

$$p(10) = 685\,530$$
$$\left(\frac{k \cdot 10 + 1604}{2}\right)^2 = 685\,530$$
$$\frac{k \cdot 10 + 1604}{2} = \sqrt{685\,530}$$
$$k = \frac{\sqrt{685\,530} \cdot 2 - 1604}{10}$$
$$\approx 5{,}1935$$

$$p(t) = \left(\frac{5.2 \cdot t + 1604}{2}\right)^2$$

Hvordan stemmer modellen for utviklingen frem til 2013?



bra for Oslo

Modellen stemmer ikke bra for Oslo
i arene fra 1990 – 2013