60

Thursday, November 20, 2014 10:24 AM

$T(383) = 14 \equiv 5$

$T(29) = 11 \equiv 2$

$T(383) \cdot T(29) = 10 \equiv 1 \ (9)$

$T(6387) = 24 \equiv 6 \ (9)$

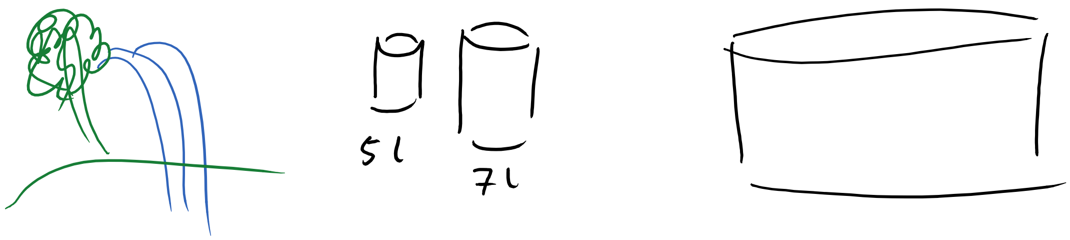
$T(383) \cdot T(29) \not\equiv T(6387)$

$\Rightarrow 383 \cdot 29 \neq 6387$

elevens svar er galt!

79

Thursday, November 20, 2014 10:29 AM



$$5x+7y=1$$

$SFF(5,7)=1 \mid 1$ så ligningen har løsninger!

$$7 = 5\cdot 1 + 2 \qquad 2 = 7 - 5\cdot 1$$
$$5 = 2\cdot 2 + 1 \qquad 1 = 5 - 2\cdot 2$$

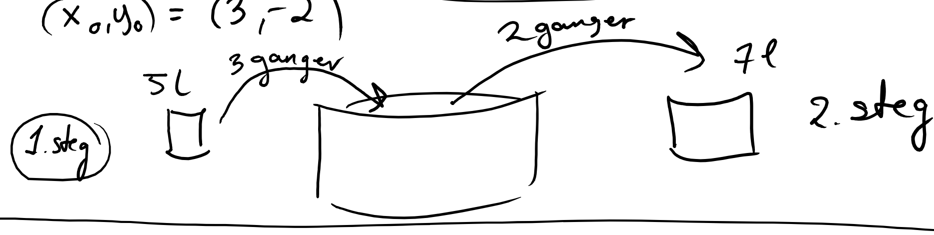
$$1 = 5 - 2\cdot 2$$
$$= 5 - (7 - 5\cdot 1)\cdot 2 = \underset{x}{\underline{3}}\cdot 5 - \underset{y}{\underline{2}}\cdot 7$$

(kan dobbeltsjekke at dette stemmer!)

$x=3$ og $y=-2$ er en løsning

$$1 = 3\cdot 5 - 2\cdot 7 = 3\cdot 5 + 5\cdot 7\cdot t - 2\cdot 7 - 5\cdot 7\cdot t \qquad t\in\mathbb{Z}$$
$$= 5\underbrace{(3+7t)}_{x_t} + 7\underbrace{(-2-5t)}_{y_t}$$

$(x_0, y_0) = (3, -2)$



$(x_{-1}, y_{-1}) = (-4, 3)$

76

Thursday, November 20, 2014 10:49 AM

a) $12x \equiv 21 \pmod 5$

$4x \equiv 7 \pmod 5$

$4x \equiv 2 \pmod 5$

setn. 30 s 243

trekke fra $5 \equiv 0$ på HS.

$4 \cdot 3 = 12 \equiv 2 \pmod 5$ så $\underline{\underline{x \equiv 3}}$

c) $33x \equiv 12 \pmod{39}$

$11x \equiv 4 \pmod{13}$

har samme løsning som

$-2x \equiv 4 \pmod{13}$

$\underline{\underline{x \equiv -2 \equiv 11 \pmod{13}}}$

(a $a \neq 0$: generelt for $ax = b \pmod n$ gjelder

- Hvis x og y er to løsningen så er $a(x-y) \equiv 0 \pmod n$
- setn 25 Hvis $SFF(a, n) = 1$, så er ikke a en nulldivisor og dermed må $x - y \equiv 0 \pmod n$

83 a

Thursday, November 20, 2014 11:14 AM

SFF$(277,38)=1 \mid 1$ så ligningen har løsninger

a) $277x + 38y = 1$

$$\text{SFF}(277,38) = \text{SFF}(38,11) = \text{SFF}(11,5) = 1$$

$277 = 38\cdot 7 + 11$

$38 = 11\cdot 3 + 5$

$11 = 5\cdot 2 + 1$

$11 = 277 - 38\cdot 7$

$5 = 38 - 11\cdot 3$

$1 = 11 - 5\cdot 2$

$$\begin{aligned} 1 &= 11 - 5\cdot 2 \\ &= 11 - (38 - 11\cdot 3)\cdot 2 = 11\cdot 7 - 38\cdot 2 \\ &= (277 - 38\cdot 7)\cdot 7 - 38\cdot 2 = 277\cdot \underbrace{7}_{x} + 38\underbrace{(-51)}_{y} \end{aligned}$$

$x = 7$ og $y = -51$ er en løsning.

Husk og sette prøve!

Finne generelle løsninger: legg til og trekk fra $\frac{277\cdot 38}{\text{SFF}(277,38)}t$, $t\in\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} 1 = 277\cdot 7 + 38(-51) &= 277\cdot 7 + 277\cdot 38t + 38(-51) - 277\cdot 38t \\ &= 277\underbrace{(7 + 38t)}_{``x_t"} + 38\underbrace{(-51 - 277t)}_{``y_t"} \end{aligned}$$

$x_t = 7 + 38t$, $y_t = -51 - 277t$, $t\in\mathbb{Z}$

$P_0 = (x_0, y_0) = (7, -51)$

$P_1 = (x_1, y_1) = (45, -328)$

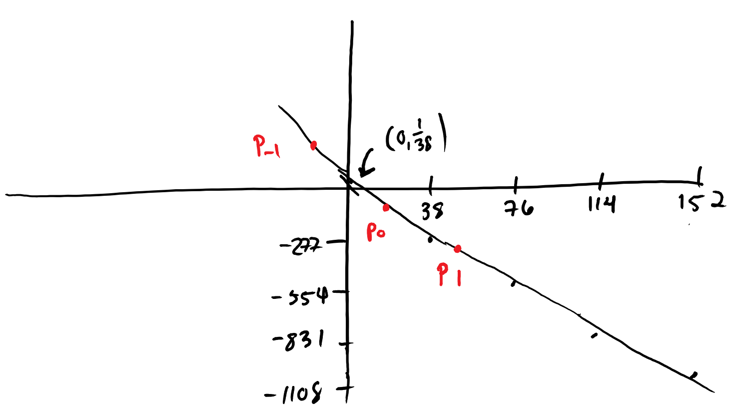
$P_{-1} = (x_{-1}, y_{-1}) = (-31, 226)$

$t = \frac{x_t - 7}{38}$

$y_t = -51 - 277\left(\frac{x_t - 7}{38}\right)$

$\vdots$

$y = \frac{-277}{38}x + \frac{1}{38}$



Ingen positive løsninger.

Huskeregel for å finne generelle løsninger

Anta at x_0, y_0 er en løsning av ligningen

$$ax+by=c.$$

Hvis vi legger til og trekker fra $\frac{ab}{SFF(a,b)}$ på venstre side, kan vi finne de generelle løsningene slik:

$$c = ax_0 + \frac{ab}{SFF(a,b)}t + by_0 - \frac{ab}{SFF(a,b)}t$$

$$= a\underbrace{\left(x_0 + \frac{b}{SFF(a,b)}t\right)}_{x_t} + b\underbrace{\left(y_0 - \frac{a}{SFF(a,b)}t\right)}_{y_t}$$

83 c

Thursday, November 20, 2014 11:36 AM

$$1304x - 117y = 2$$

$$SFF(1304, 117) = SFF(117, 17) = SFF(17, 15) = 1$$

vi har løsning!

$$1304 = 117 \cdot 11 + 17$$
$$117 = 17 \cdot 6 + 15$$
$$17 = 15 \cdot 1 + 2$$

$$17 = 1304 - 117 \cdot 11$$
$$15 = 117 - 17 \cdot 6$$
$$2 = 17 - 15$$

Vi kan begynne utregningen under så fort vi får en rest som deler høyre side av ligningen

$$\begin{aligned} 2 &= 17 - 15 \\ &= 17 - (117 - 17 \cdot 6) = 17 \cdot 7 - 117 \\ &= (1304 - 117 \cdot 11) \cdot 7 - 117 = 1304 \cdot \underbrace{7}_{x} - 117 \underbrace{(78)}_{y} \end{aligned}$$

$x = 7$ og $y = 78$ er en løsning

legger til og trekker fra $\dfrac{1304 \cdot 117}{SFF(1304, 117)} t$ på høyresiden for å finne generell løsning:

$$\begin{aligned} 2 &= 1304 \cdot 7 + 1304 \cdot 117t - 117(78) - 1304 \cdot 117t \\ &= 1304 \underbrace{(7 + 117t)}_{x_t} - 117 \underbrace{(78 + 1304t)}_{y_t} \end{aligned}$$

$x_t = 7 + 117t$, $y_t = 78 + 1304t$, $t \in \mathbb{Z}$ er generell løsning