MA-EVU3
Videreutdanningskurs i
matematikkens historie

DEL 1

Oldtidens matematikk, geometri og tallteori i skjønn forening

Tar for seg tidlig matematikk i ulike kulturer, ser på storheter som Pytagoras, Diofant og Euklid og dreier seg i hovedsak om tallteori og geometri. Dekker tiden fra -20 000 til ca. 500.

November 2004

Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Tellingen starter, Egypt og det gamle Irak

Innledning

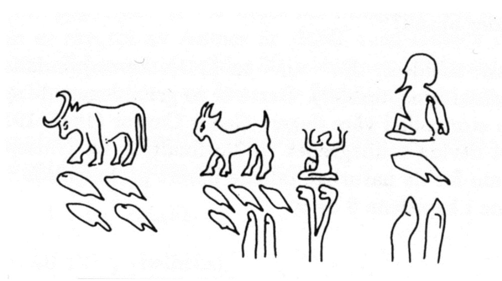
I alle de gamle kulturene hvor det finnes noen form for nedskrevne beretninger, finnes spor at matematikk eller matematiske aktiviteter. Felles for alle kulturene var at matematikk var et felt forbeholdt de få; høyt utdannede prester, spesialtrente skrivere eller myndighetspersoner hvis oppgave var å utvikle og å bruke matematikk til beste for de herskende klasser. Det var bruk for matematikk i forbindelse med skatteinnkreving, oppmåling, byggearbeider, handel, kalendere og i forbindelse med mystisme eller religiøs virksomhet.

Selv om opprinnelsen til mange matematiske begreper og tanker var deres anvendelser, så har matematikere til alle tider brukt sin nysgjerrighet og sin kreativitet til å utvikle begrepsapparatet og forståelsen langt ut over det som var praktisk anvendbart der og da. Men siden matematikk var et verktøy for eliten og mye av kunnskapen ble overbrakt muntlig fra lærer til elev, finnes det lite dokumentasjon som kan fortelle oss hva og hvordan de tenkte.

Matematikkhistorikere har jobbet mye med å rekonstruere virksomheten og tankegangen fra disse gamle sivilisasjonene, og man har kommet et stykke på vei. Alle er ikke enige om alt, men det er rimelig enighet om grunntrekkene i matematikken i det gamle Egypt, Irak, Kina og India, for å nevne de viktigste stedene. Og starten på all matematikk finner vi i menneskenes behov for å telle og for å beskrive verden, altså den spede begynnelsen til aritmetikk, tallteori og plangeometri.

Tallbegrep

Allerede i forhistorisk tid, dvs. før det skrevne ord, hadde menneskene symboler for tall, til og med svært store tall. På gravsteinene til den egyptiske kong Menes, som levde ca. år -3000, finnes følgende innskrift:

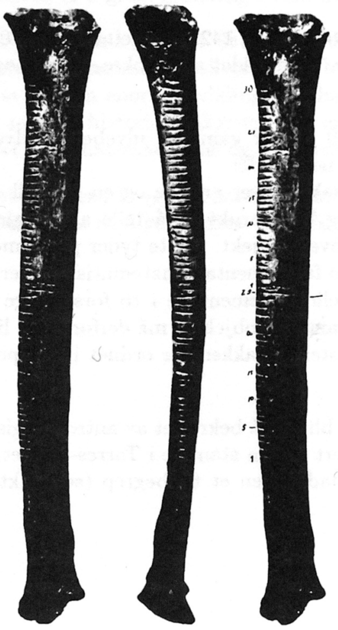


(Fra en tegning (plate 26B) i J. E. Quibell, Hierakonopolis, London 1900)

Symbolene forteller at kong Menes hadde 400 000 okser, 1 422 000 geiter og 120 000 fanger. Disse tallene kommer fram på figuren, sammen med bildet av en okse, en geit og en fange (med hendene på ryggen).

I 1937 ble det i Tsjekkoslovakia funnet et 30 000 år gammelt ulvebein. Ulvebeinet er gjengitt i forskjellige posisjoner på figuren under.

Det er i alt skåret 55 hakk i beinet, med 5 hakk i hver gruppe og en spesiell markering av de 25 første hakkene. Beinet er antakelig blitt brukt til å telle antall gjenstander, dager eller andre objekter, med ett hakk for hvert objekt. Dette tyder på at menneskene allerede for 30 000 år siden hadde oppfattet to fundamentale matematiske ideer: Den ene er prinsippet om *en-til-en-korrespondanse* mellom elementene i to forskjellige mengder: Hvert objekt



(Fra London Illustrated News, October 2, 1937)

svarer til ett hakk på beinet, og antall objekter må derfor være lik antallet hakk. Videre ser vi her ideen om et 5-tallssystem: Hakkene er ordnet i grupper på 5 og $25=5^2$.

At tallbegrepet eksisterte før det skrevne ord, blir også bekreftet av antropologiske undersøkelser. For eksempel ble det i 1889 rapportert om en stamme i Torres-stredet. På tross av at stammen ikke hadde noe skriftspråk, hadde den et tallbegrep (som riktignok var ganske enkelt):

1:	urapun
2:	okosa
3:	okosa-urapun
4:	okosa-okosa
5:	okosa-okosa-urapun
6:	okosa-okosa-okosa
>6:	ras

De to forhistoriske tallideene; En-til-en-korrespondansen (kardinal-synspunktet) og tellingen (ordinal-synspunktet) er to grunnleggende synspunkter på tallene, som også spiller en stor rolle i våre dager. Georg Cantor (1845-1914) brukte en-til-en-korrespondansen til å utvide tallbegrepet til kardinaltall og Guiseppe Peano (1858-1932) laget et aksiomsystem for de naturlige tallene basert på telleideen.

Georg Cantor skapte *mengdelæren*, og ut fra den fant han en matematisk teori for å beskrive *uendelige* tall.
Cantor spurte: Hva mener vi med at to endelige mengder består av like mange elementer? Vi kan selvfølgelig telle antallet i hver og sammenlikne sluttresultatene. Men det er ikke nødvendig å kjenne antallet i hver mengde for å avgjøre hvem som har flest elementer. Den norske lærebokforfatteren Tambs Lyche brukte eksempelet med en kinosal og en flokk mennesker. For å finne ut hva det er mest av, sitteplasser eller mennesker, kan man bare be alle sette seg og se om det til slutt blir noen personer igjen uten sitteplasser. Stikkordet er 1-1-korrespondansen:

To mengder har like mange elementer (samme kardinalitet) hvis det finnes en 1-1-korrespondanse mellom elementene i de to mengdene. Slike mengder sier vi er ekvivalente.

På denne måten får vi en ekvivalensrelasjon mellom mengder. Ekvivalensklassene blir da kardinaltallene eller bare tallene. Tallet 5, f.eks., representerer da den egenskapen som er felles for alle mengder som er ekvivalent med mengden av den ene hånds fingre. Dette kan vi så utvide til uendelige mengder.

På 1800-tallet ble det gjort anstrengelser for å skaffe matematikken et solid fundament. På hvilket grunnlag foretar man de matematiske operasjonene?

Peano laget et aksiomsystem for de naturlige tallene, basert på grunnbegrepene null og etterfølger. Vi gir aksiomene navn etter Peano, P1-P5.

- P1: Null er et naturlig tall
- P2: Hvis a er et naturlig tall, så er etterfølgeren til a et naturlig tall.
- P3: Null er ikke etterfølgeren til noe naturlig tall.
- P4: Hvis etterfølgerne til to naturlige tall er like, er de naturlige tallene selv like.
- P5: Hvis S er en mengde naturlige tall som inneholder 0 og slik at dersom a er et element i S, så er etterfølgeren til a også med i S, så er alle naturlige tall med i S (induksjonsprinsippet).

Vi gjenkjenner her telle- eller ordinalsynspunktet på de naturlige tallene. På grunnlag av disse 5 "opplagte" postulatene kan man utlede alle de kjente egenskapene ved de naturlige tallene.

Egyptisk telling

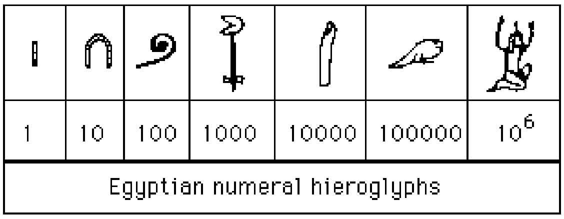
Mesteparten av vårt kjennskap til egyptisk matematikk kommer fra papyrusruller. De mest kjente kildene er Rhind-papyrusen, Moskva-papyrusen, Kahun-papyrusen, Berlin-papyrusen og lærrullen.

Rhind-papyrusen er vår beste informasjonskilde når det gjelder egyptisk aritmetikk. Den er skrevet av Ahmes år -1600, men teksten er tatt fra eldre verker fra år -1800 og -2000. Teksten inneholder 87 problemer. Noen av disse har praktisk interesse, mens andre tydeligvis er stilt - og løst - av forfatteren for moro skyld.

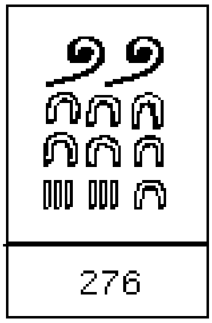
De første 6 problemene i Rhind-papyrusen går ut på dele n brød mellom 10 menn. I første problem er $n=1$, i neste $n=2$, deretter $n=6$, $n=7$, $n=8$ og $n=9$. Mao. brøkregning, og faktisk inneholder 81 av 87 problemer brøkregning.

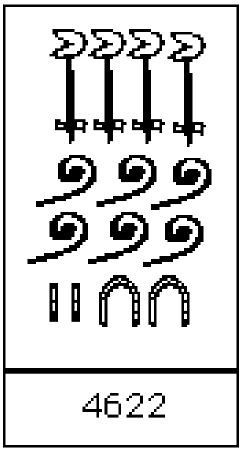
Rhind-papyrusen har fått sitt navn etter den skotske egyptologen A. Henry Rhind, som oppdaget papyrusrullen i Luxor i 1858. Rullen er 6 meter lang og ca. 30 cm bred.

Egyptiske tallsystemer var svært enkle. De brukte symboler for 1, 10, 100, ..., 1 000 000. I hieroglyfer var disse symbolene



Tallene fra 2 til 9 ble representert ved flere vertikale streker og tiere, hundretall, osv. ble notert tilsvarende. For eksempel:





Vi merker oss at egypterne ikke hadde noe symbol for 0 og videre at tallene ble skrevet med grunntall 10.

Regneoperasjoner

Addisjon gikk lett med hieroglyfer. Det var bare å føye sammen og bruke tieroverganger omtrent som vi gjør i dag.

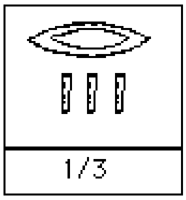
Subtraksjon. La oss se på et eksempel: Hva blir 12 - 5? Egypterne tenkte: Hva trengs i tillegg til 5 for å gi 12? Prinsippet er det samme som ofte brukes i en butikk hvis man f.eks. betaler kr. 583 med en 1000-lapp:

583+2=585,
585+5=590,
590+10=600,
600+400=1000.
Tilbake: 2+5+10+400=417.

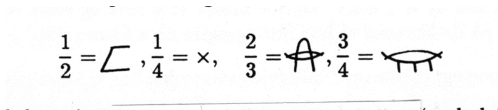
Multiplikasjon. Egypterne brukte bare to operasjoner; fordobling og halvering. Ved å kombinere kunne man så finne resultatet av f.eks. 6*8:
Egypterne regnet:
Først 2*8 =16 og 4*8 =2*2*8=2*16=32, deretter legger vi sammen, siden 6=2+4, 6*8=2*8+4*8=16+32=48. Grunnlaget for denne metoden er følgende prinsipp

> *Ethvert naturlig tall x kan skrives som en sum av potenser av 2;*
> $$x=a_0 2^0+ a_1 2^1 +a_2 2^2 +\ldots+a_n 2^n$$
> *der $a_0,\ldots, a_n$ er enten 0 eller 1.*

Brøker. Egypterne brukte bare brøker med teller 1 (*enhetsbrøker* eller *stambrøker*), bortsett fra at de dessuten hadde egne symboler 2/3 og 3/4. Brøkene ble skrevet ved å sette nevneren under symbolet for åpen munn. For eksempel ble 1/3 skrevet

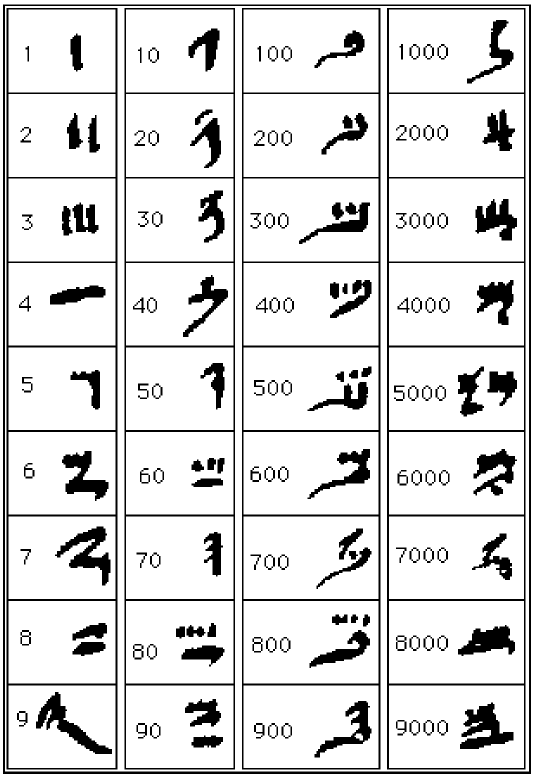


Noen brøker hadde imidlertid spesielle tegn:



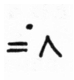
Også i vår språkbruk har visse brøker spesielle navn: 1/2 kalles "en halv" og 1/4 kalles ofte "en kvart". Andre brøker, som f.eks. 5/6, ble skrevet som en sum av brøker med egne navn, 5/6=1/2+1/3.
Hieroglyfene ble brukt til innskrifter i stein. Etter hvert som egypterne skrev mer, ble denne skriften avløst av den *hieratiske* skriften, som er enklere og mindre tidkrevende. Den hieratiske

skriften er brukt på papyrusrullene og på lærrullen. Noen av de hieratiske tegnene er følgende:



Hieratic numerals

Stambrøk betegnes med en prikk over tallet, f.eks. skriver vi for 1/18:



Et eksempel på hvilke problemer Rhind-papyrusen tar opp og løser er følgende:

En størrelse og dens sjudel gir til sammen 19. Hva er størrelsen?

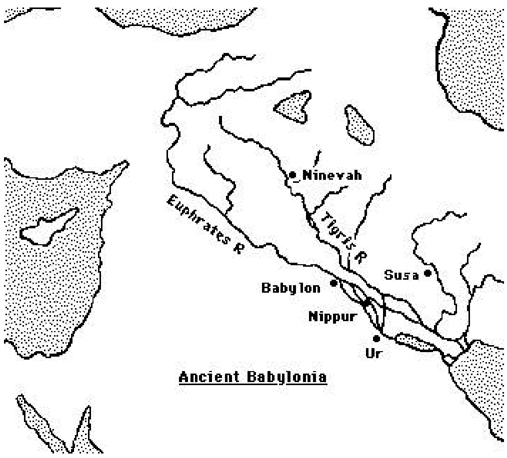
Egypterne løste dette problemet ved å bruke metoden med gal plassering eller regula falsi.

Helt til slutt i dette kapitlet tar vi med et bilde som illustrerer noe av det vi har sett på. På veggene til Harsieses ytterkiste står 20 voktere i hver sin port som leder til underverdenen. Disse er tildelt nummer 1-20 og en liten formular.

Her er nummer 12 og 13. Kista finnes på Bergen museum, Universitetet i Bergen. (Foto: Frode Storås)

Babylonsk matematikk

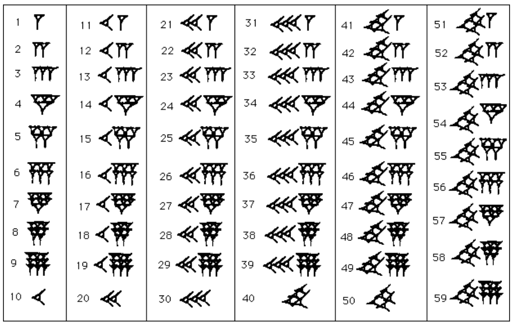
På samme måte som Nilen i Egypt, skapte Eufrat og Tigris grunnlaget for den babylonske sivilisasjonen i Mesopotamia (det nåværende Irak). Mellom år -3000 og -2000 var det sumererne som regjerte i den sørlige



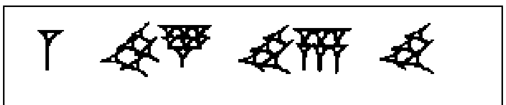
delen av Mesopotamia. Deres kultur hadde nådd et høyt nivå, og deres folk var blant de første som hadde et skriftspråk. Etter hvert ble de dominert av folk fra Akkad, lenger nord, som overtok mye av deres kultur. Omkring år -1800 kom kong Hammurabi fra byen Babel til makten, og han grunnla det første babylonske dynasti.

De eldste kjente tekstene fra Mesopotamia stammer fra år -3000, mens de eldste babylonske tekstene vi kjenner er fra perioden -1900 til -1600.

Babylonsk tallnotasjon. Babylonerne brukte et slags ufullstendig posisjonssystem med grunntall 60 (et *seksagesimalt* system). Med et fullstendig 60-talls posisjonssystem er det nødvendig med et symbol for null, den "tomme" plassen, og et symbol for hvert av de 59 tallene. Men babylonerne hadde bare to tegn, ett for enheten og ett for tier.



Fra 60 begynte de på nytt, ved å innføre en ny posisjon som skulle angi antall 60-ere osv.



1,57,46,40 = 424000

Et slikt system skaper stor tvetydighet, systemet mangler tegn for 0, komma og posisjonsklarering.

Det er verdt å merke seg at vår inndeling i minutter og sekunder stammer fra babylonerne. Via grekerne og araberne kom systemet til Vest-Europa ca. år. 1200. (Minutt = en sekstidel (av en time) = pars minuta prima (latin), sekund = en sekstidel av en sekstidel = pars minuta secunda.)

Regning hos babylonerne. Addisjon, subtraksjon og multiplikasjon foregikk som hos oss. Babylonerne trengte mutiplikasjonstabeller over alle produkt av tall mellom 1 og 59, "seksagesimal gangetabell". Divisjon foregikk slik: 47:3 ble regnet ut ved først å beregne 1/3 og deretter multiplisere med 47.

Babylonerne løste lineære og også noen ikke-lineære likningssystemer slik vi gjør det, men de brukte ikke bokstavsymboler for å representere tall. Algebraen var retorisk, altså uttrykt med ord og setninger. Likevel var de i stand til å løse f.eks. annengradslikninger.

Hvis vi sammenlikner babylonsk matematikk med egyptisk matematikk, kan vi si at egyptisk matematikk er mer direkte rettet mot praktiske anvendelser, mens babylonerne begynner å vise en teoretisk interesse for matematiske problemer. Babylonsk algebra representerer et stort framskritt, ganske kompliserte likningssystemer kan løses. En alvorlig ulempe er imidlertid dårlig og mangelfull matematisk notasjon.

Stambrøker

Stambrøker er i vår moderne terminologi brøker med teller 1, f.eks. 1⁄2, 1⁄5, 1⁄12, osv. Det er to ting som er verdt å merke seg med stambrøker:

* Enhver brøk kan skrives som en sum av stambrøker.

* Oppspaltingen av en brøk som en sum av stambrøker er ikke entydig.

Punkt 2 kan vi illustrere med brøken 7⁄24. Det er lett å se at

$$7/24 = 1/4 + 1/24 = 1/6 + 1/8$$

Når det gjelder punkt 1 så skal vi her gi en metode for å finne en stambrøk-oppspalting for en brøk. Vi illustrerer metoden på et eksempel, 13⁄32.

1. Finn den største stambrøken som er mindre enn den gitte brøken, i vårt tilfelle blir det 1⁄3, siden 1⁄2 er større enn 13⁄32. Trekk denne fra, i vårt tilfelle får vi

$$13/32 - 1/3 = 39/96 - 32/96 = 7/96$$

2. Gjenta denne prosessen med svaret på subtraksjonen, i vårt tilfelle får vi 1⁄14, siden 1⁄13 er større enn 7⁄96 og 1⁄14 er mindre. Det gir

$$7/96 - 1/14 = 49/672 - 48/672 = 1/672$$

3. Fortsett å gjenta prosessen helt til svaret blir en stambrøk, man kan vise at det alltid vil skje. I vårt tilfelle har vi allerede kommet til en stambrøk.

4. Legg sammen de stambrøkene vi har funnet og vi får vår opprinnelige brøk.

$$1/3 + 1/14 + 1/672 = 13/32$$

Prøv å regne ut og se at det stemmer!

Regula Falsi

Denne metoden for å løse likninger var utbredt i oldtiden. Vi skal illustrere den ved å løse problemet

> *En størrelse og dens sjudel gir til sammen 19. Hva er størrelsen?*

1. Velg et tilfeldig tall som skyggeløsning
Dvs. vi velger ikke tallet helt tilfeldig. I dette tilfellet, hvor vi skal regne med sjudeler, er det hensiktsmessig å velge et tall som er delelig med 7, f.eks. 7 selv. Så vi velger 7.

2. Beregn svaret for det valgte tallet
Det første vi gjør er å beregne det svaret vi får med det valgte tallet. I vårt eksempel blir det 7 pluss 7⁄7, altså 8.

3. Finn forholdet mellom vårt svar og det svaret vi skal ha
Vårt svar ble altså 8, mens vi skulle ha 19. Altså må vi gange vårt svar med 2 + 1⁄4 + 1⁄8, for å holde oss til stambrøk-terminologien. (2*8=16, 1⁄4*8=2 og 1⁄8*8=1, til sammen 19).

4. Juster det valgte tallet med samme faktor
Det valgte tallet var 7, som vi dermed må gange med 2 + 1⁄4 + 1⁄8. Det gir:

$2 * 7 = 14$
$1/4 * 7 = 1/4 * 4 + 1/4 * 2 + 1/4 * 1 = 1 + 1/2 + 1/4$
$1/8 * 7 = 1/8 * 4 + 1/8 * 2 + 1/8 * 1 = 1/2 + 1/4 + 1/8$

Legger vi sammen disse tre uttrykkene og endrer rekkefølgen, får vi

$$14 + (1 + 1/2 + 1/4) + (1/2 + 1/4 + 1/8) = 14 + 1 + (1/2 + 1/2) + (1/4 + 1/4) + 1/8 = 16 + 1/2 + 1/8$$

som er det korrekte svaret (vi ville vel heller kalt det 16 + 5⁄8). Hvis vi prøver å ta 16 + 5⁄8 og legge til en sjudel av dette tallet får vi ganske riktig 19.

Den første matematiske læresetning, Pytagoras setning.

Innledning

Babylonerne i det gamle Irak var i likhet med de gamle egypterne opptatt av det vi i dag kaller kvadratrøtter. Ett av babylonernes kvadratrotproblemer hadde å gjøre med relasjonen mellom sidekanten og diagonalen i et kvadrat. Resultatet er et spesialtilfelle av det som i dag er kjent under navnet pytagoras setning. I en rettvinklet trekant er summen av kvadratene av katetene lik kvadratet av hypotenusen. Denne setningen, som har sitt navn etter den greske filosof og matematiker Pytagoras er uten tvil den mest berømte og kanskje den aller viktigste elementære læresetning som finnes innefor matematikk. Anvendelsene av setningen og dens generaliseringer har betydd svært mye for menneskeheten de siste 2-3000 år.

Pytagoras setning er også den eldste læresetning vi kjenner til innen matematikk, og den har så vidt man nå har kunnet erfare, vært kjent innen de aller fleste av de høyt utviklede sivilisasjoner i oldtiden. Det finnes faktisk bevis for at setningen var kjent så mye som 1000 år før Pytagoras levde. Det har vært hevdet at de nesten 5000 år gamle steintemplene i England ble bygget på bakgrunn av kjennskap til Pytagoras setning. Men dette er det vanskelig å få bekreftet. Imidlertid er det nokså klare bevis, i form av skrevne leirtavle, at babylonerne kjente til læresetningen ca. 1700 f. Kr.

Pytagoras

Pytagoras ble født på øya Samos, nær kysten av Lilleasia, 569 år før vår tidsregning. Han var sønn av Mnesarchus og Pythia. Mnesarchus var kjøpmann og kom opprinnelig fra Tyre, mens moren var født på Samos. Det sies at Mnesarchus brakte korn til Samos i en krisetid og at han fikk borgerskap på øya som takk.

Som barn fikk Pytagoras være med faren på handlesreiser og mye tyder på at han både kom til Syria og Italia mens han enda var en ung gutt. På reisene fikk han undervisning av lærde menn og han kunne både spille lyre og resitere sin Homer.

Da han var rundt 18-20 år møtte Pytagoras Thales, en av de virkelig store greske matematiske filosofene. Dette møtet fikk stor betydning for Pytagoras utvikling som matematiker og var foranledningen til at han dro til Egypt for å studere matematikk og astronomi.

Pytagoras ble værende lenge i Egypt, men det var en urolig tid med flere kriger og Pytagoras ble til slutt tatt som krigsfange av babylonerne og fraktet til Mesopotamia. Der benyttet han tiden til å perfeksjonere seg i aritmetikk og musikk. Etter hvert roet krigerne seg ned og Pytagoras kunne reise hjem til Samos.

Noen år senere dro han igjen ut, denne gangen til Sør-Italia, til byen Crotone. Her grunnla han sin egen skole, med seg selv som lærer og leder. Det var både menn og kvinner ved skolen og de som tilhørte den indre sirkelen, bodde der fast, omtrent som i et kloster, med streng disiplin og fornektelse av jordisk gods og uten å spise kjøtt. Pytagoras formulerte det ideologiske grunnlaget for skolen: Pytagoreerne trodde (eller måtte tro):

- -at på det dypeste nivå så er virkeligheten matematisk av natur,
- -at filosofi kan brukes til åndelig renselse,
- -at sjelen kan forenes med det guddommelige
- -at bestemte symboler har my(s)tisk betydning
- -at alle brødre må være lojale mot ordenen og holde på dens hemmeligheter

Pytagoras drev skolen sin i mange år, han ble faktisk nærmere 100 år gammel. En del stridigheter var det nok, og innimellom noen kriger, men hans elever spredte seg rundt i Middelhavsområdet og grunnla nye skoler andre steder. Dermed befestet Pytagoras sin posisjon som en av de virkelig store personligheter i matematikkhistorien.

Pytagoreerne og deres småstein

Pytagoras var født og bodde en stor del av sitt liv på øya Samos utenfor kysten av Lilleasia, men tilbrakte mye tid både i Egypt og i Babylonia. Etter hvert endte han opp i Crotone, en gresk by i det sørlige Italia. Der samlet han en gruppe studenter rundt seg, de såkalte pytagoreerne, i en blanding av en slags religiøs orden og en filosofiskole. Fra de mange bevarte biografiene, som riktignok alle er skrevet flere hundre år etter Pytagoras død, kan man lese at mannen var mer en mystiker enn en rasjonell tenker. Og matematikken hans bar også preg av det.

En av pytagoreernes grunnleggende matematiske doktriner var at "alt er laget av tall", dvs at de naturlige tall på alle måter danner grunnlaget for alt som finnes i universet. F.eks. ville en bestemt konstellasjon på himmelen bli beskrevet av stjerner og planeter, sammen med deres innbyrdes posisjon, dvs. geometrien til stjerneformasjonen. Og denne geometrien ville pytagoreerne igjen beskrive med et tall. Planetbaner beskrev de ved forholdstall, og det samme gjaldt musikk. Som kjent er forholdet mellom to strenger med en oktav mellom gitt ved 2:1 og en kvint beskrives av forholdet 3:2. I prinsippet kan man danne hele 12-toneskalaen ved hjelp av disse to forholdene.

Med dette forholdet til at tallene ligger til grunn for alt, er det ikke rart at pytagoreerne utviklet kunnskaper om elementær tallteori.

Pytagtoreernes startpunkt var dikotomien mellom oddetall og partall. Pytagoreerne representerte tall ved småstein og et partall var da en samling småstein som kunne deles i to like store deler, mens oddetall ikke har denne egenskapen. Ved å resonnere med småstein kan man da vise resultater som at summen av to partall er et partall eller at summen av to oddetall er et partall, osv.

Et annet elementært resultat som kunne vises på denne måten var kvadratet av et oddetall er et oddetall og kvadratet av et partall er et partall. Pytagoreerne tenkte sannsynligvis på kvadrattall som en samling småstein lagt ut i et kvadratisk mønster.

o	o	o	o
o	o	o	o
o	o	o	o
o	o	o	o

Det er klart at fra et 1 x 1-kvadrat må man føye til 3 småstein for å lage et 2 x 2-kvadrat og deretter 5 til for å lage et 3 x 3-kvadrat. Dette kan vi se fra følgende figur:

```
        o

     x     x
     o     x

  x     x     x
  o     o     x
  o     o     x
```

Her har vi indikert med kryss de småsteinene vi må legge til det forrige kvadratet for å få det neste. Pytagoreerne formulerte dette i en generell sats, nemlig det som i dag ville se ut som

> *For alle naturlige tall N så har vi*
> $N^2=1+3+5+\ldots+(2N-1)$

Et annet eksempel på tall som framkommer fra bestemte geometriske former er de såkalte trekanttallene. Vi starter med 1 stein, legger deretter til 2, så 3, osv. Pytagoreernes figurer kunne da se ut som:

```
        o


        o
     o     o


        o
     o     o
  o     o     o
```

Det er enkelt å se at ved å legge to påfølgende trekanttall mot hverandre slik vi har gjort på neste figur, og hvor det ene trekanttallet er markert med x og det andre med o, så ser vi at vi får et kvadrattall

```
x  x  x  x  x  o
x  x  x  x  o  o
x  x  x  o  o  o
x  x  o  o  o  o
x  o  o  o  o  o
o  o  o  o  o  o
```

Her har vi illustrert
$(1+2+3+4+5)+(1+2+3+4+5+6)=72$.
Igjen kan vi formulere dette i en generell setning, som pytagoreerne kjente til, om enn i en litt annen språkdrakt:

> *For alle naturlige tall N så har vi*
> $(1+2+3+\ldots+N)$
> $+(1+2+3+\ldots+(N-1))$
> $= N^2$
> *eller*
> $2*(1+2+3+\ldots+N)$
> $=N^2+N=(N+1)*N$

Et annet problem som opptok pytagoreerne var spørsmålet om hvilke kvadrater som kan skrives som en sum av to andre kvadrater. Et talltrippel (av hele, positive tall) (p,q,r) som oppfyller

$$p^2+q^2=r^2$$

kalles et pytagoreisk trippel. Det finnes dokumentasjon på at pytagoreerne visste, og kunne bevise, at for et oddetall N så er

$$(N,(N^2-1)/2,(N^2+1)/2)$$

et pytagoreisk trippel, og tilsvarende med

$$(M,(M/2)^2-1,(M/2)^2+1)$$

for et partall M. Setter vi inn $N=3$ i det første uttrykket får vi $(3,4,5)$ og det samme får vi ved å sette $M=4$ i det andre uttrykket. Beviset for disse to formlene er presis det vi har sett over, nemlig at ethvert oddetall er differansen mellom to påfølgende kvadrattall.

Det geometriske resultatet som de pytagoreiske triplene er en variant av, er det som i dag kalles for pytagoras læresetning. Som kjent sier den at i en rettvinklet trekant er kvadratet av hypotenusen lik med summen av kvadratene på katetene. Sannsynligvis var denne setningen kjent allerede lenge før pytagoreerne. Bl.a. er det mye som tyder på at de som bygde Stonehenge-tempelet i England rundt år -3000 hadde denne kunnskapen.

Pytagoreerne var altså mye mer tallteoretikere enn geometere, i det minste til å begynne med. Men tallteoriversjonen av pytagoras teorem kalles Diofants teorem, siden han var den første til å gi en komplett beskrivelse av løsningen. Men strengt tatt burde det være denne versjonen av pytagoras teorem som burde hete pytagoras teorem og ikke den mer generelle geometriske versjonen, selv om pytagoreerne også var opptatt av geometri.

Pytagoreerne knyttet all sin tallteori til telling, og de trengte derfor å angi en enhet, en stein. Tallet 3 ble da tolket som en sammensetning av enheter, dvs. 3 steiner. Som en logisk konsekvens av dette betraktet de ikke 1 som et tall, men som angivelse av enheten, og 2 ble oppfattet som det minste tallet.

En annen, og filosofisk sett meget viktig svakhet ved pytagoreernes tenking var oppfattelsen av at alt i naturen er sammenlignbart ved hjelp av hele tall. Med dette forstår vi at hver gang vi velger oss to lengder så er forholdet mellom dem et rasjonalt tall, eller med dagens terminologi, det finnes ingen irrasjonale tall. Dette vet vi jo at er galt, men for pytagoreerne var dette et mysterium som de helst ikke ville snakke om. Men før eller siden måtte erkjennelsen om at det finnes andre tall enn de rasjonale komme, og denne er i ettertid tidfestet til -430. Da ble det endelig klart at lengden av hypotenusen i en rettvinklet, likebeint trekant med katet 1 ikke er noe rasjonalt tall, altså at kvadratroten av 2 er det vi i dag kaller et irrasjonalt tall. På mange måter er denne erkjennelsen en av de aller største landevinningene i matematikkhistorien.

For å få et inntrykk av hvilken kunnskap og forståelse pytagoreerne hadde for matematikk kan vi gjengi en liste av resultater som pytagoreerne vanligvis gis kredit for (Heath [7]):

(1) Summen av vinklene i en trekant er lik med to rette vinkler. Pytagoreerne kjente også til generaliseringen som sier at et polygon med n sider har vinkelsum (indre vinkler) $2n-4$ rette vinkler og at den ytre vinkelsummen er fire rette.

(2) Pytagoras setning; i en rettvinklet trekant er summen av kvadratene av

katetene lik med kvadratet av hypotenusen. Merk at for pytagoreerne var denne setningen en ren geometrisk setning, de omtalte kvadratene må betraktes som geometriske objekter og ikke som en abstrakt størrelse. Teoremet sier da at det er mulig å kutte opp kvadratet på hypotenusen, flytte litt rundt på bitene og pakke dem sammen til de to katet-kvadratene.

(3) Konstruksjon av løsninger til algebraiske likninger med geometriske metoder. F.eks. kunne de løse likningen $a(a-x)=x^2$ geometrisk.

(4) Oppdagelsen av irrasjonale tall, som beskrevet over.

(5) De fem platonske legemene. Pytagoras kunne sannsynligvis konstruere de tre første, men ikke de to siste.

(6) Pytagoras hadde også kunnskaper i astronomi, ikke alle like riktige. Han hevdet at jorda var en kule i senteret av universet og at Venus som morgenstjerne var den samme som Venus som aftenstjerne.

Plangeometrien settes i system

Innledning

Verdenshistoriens aller mest betydningsfull matematiske tekst ble skrevet for 2300 år siden. Euklids Elementene har kommet ut i flere opplag enn noen annen bok, med unntak av Bibelen. Den er oversatt til nesten alle skriftspråk som finnes og har blitt lest av et ufattelig antall millioner mennesker, på tross av at boka for oss moderne mennesker framstår som ganske tørr og kjedelig. Den inneholder ingen eksempler, ikke noe som motiverer for stoffet, ingen beregninger og heller ingen morsomme kommentarer. Boka, eller snarere bøkene, for det er en serie av bøker, inneholder kun definisjoner, aksiomer, læresetninger og bevis. Likevel finnes det utallige matematikere opp gjennom historien som har latt seg inspirere av boka og for mange av dem har det vært nettopp denne boka som ga støtet til at de ble bitt av matematikkbasillen. Den stringente oppbygningen, der sten legges på sten, uten noe form for utenomsnakk og der det matematiske byggverket presenteres som det er, rent, vakkert og logisk konsistent.

Euklid skrev sitt verk for rundt 2300 år siden. Det finnes imidlertid ingen kjente versjoner av hans opprinnelige skrift. Den eldste versjonen av hele verket stammer fra rundt år 900, selv om det finnes fragmenter av teksten som er eldre, ja noen småbiter er funnet på skrifter fra før vår tidsregning.

I Elementene får vi en innføring i plangeometri som på mange måter står seg i dag. Riktignok er språket og måten å presentere matematikk nokså annerledes enn hvordan det gjøres i vår tid, men definisjonene er for en stor del relevante, læresetningene er helt klart aktuelle, og ikke minst, bevisene i boka er formelt riktige og vi kan følge den logiske tankegangen gjennom dem den dag i dag. Og det er jo det som er hovedgrunnen til at vi fortsatt har mye å lære av å lese dette første store matematikkverket.

Euklid

Euklid av Alexandria er den mest prominente matematikeren fra antikken, spesielt berømt for sitt hovedverk "Elementene". I disse bøkene la Euklid et solid grunnlag for geometri og aritmetikk, ja faktisk så solid at bøkene er blitt brukt som lærebøker i geometri helt fram til 1800-tallet. Euklid forsvarer greit en plass blant de ti mest innflytelsesrike matematikere gjennom alle tider, noen vil kanskje plassere han helt på topp. Likevel er lite kjent om Euklids liv unntatt at han underviste i Alexandria i Egypt.

Bokverket "Elementene" er delt i 13 bøker og starter med en rekke definisjoner og fem aksiomer. Bok I til VI tar for seg plangeometri, som trekanter, parallellogrammer og sirkler. Bok VII til IX ser på tallteori. Euklids algoritme for å finne største felles divisor mellom to tall, er for eksempel beskrevet i bok VII. Bok X ser på teorien rundt irrasjonale tall mens bok XI til XIII ser på tredimensjonal geometri. I den siste boka diskuterer Euklid egenskapene til de fem regulære polyedre, og gir et bevis for at det er akkurat fem.

Euklids "Elementene" er bemerkelsesverdig klar i måten teoremene blir formulert og bevist. Den rigorøse standarden har vært en norm for matematikere i de mer enn 2000 årene som har gått siden bøkene kom ut første gang.

Gjennom tidene er det kommet ut mer enn 1000 utgaver av "Elementene", på alle verdens språk, og nest etter Bibelen er det den boka som har kommet i flest opplag.

Apollonius

Apollonius ble født i Perge, en by i det sørlige Lilleasia, men veldig lite er kjent om hans liv. Det lille som er kjent kommer fra forordet til hans store og viktige verk "Kjegler". Her antydes det at han i sin ungdom dro til Alexandria for å studere hos etterfølgerne til Euklid og at han sannsynligvis ble værende der mesteparten av sitt liv. Han brukte sin tid til å studere, undervise og skrive. Etter hvert ble han en berømt mann, i første rekke for sine arbeider innen astronomi, senere også for sine matematiske arbeider.

Apollonius sitt opus magnum, "Kjegler", er et imponerende verk, særlig når vi tar i betraktning at han ikke hadde noen algebraisk språk å formulere seg i, og Apollonius forsvarer lett en plass blant antikkens aller største matematikere.

Euklids bok "Elementene"

Euklids bok "Elementene", skrevet for 2300 år siden består av 13 bøker og er ikke egentlig å betrakte som ett verk, men mer som et kompendium, delvis en samling av ting som allerede fantes. Euklid satt alle delene inn i en sammenheng på en måte som vitner om stor matematisk innsikt.

De første 6 bøkene tar for seg plan geometri og gir en nokså komplett framstilling av feltet, mens de tre neste bøkene dreier seg om tallteori. Bok 10 gir sammenhengen mellom de to emnene, slik datiden så på den. I bok 11 og 12 er temaet tredimensjonal geometri og den siste boka gir konstruksjonen av de 5 regulære legemene.

I tråd med Aristoteles lære Euklid bygger opp sin teori på basis av definisjoner og aksiomer (grunnsetninger eller premisser som ikke trenger å bevises).

Noen definisjoner fra Elementene, bok I

1. Et *punkt* er det som ikke har noen del.
2. En *linje* er en lengde uten bredde.
4. En *rett linje* ligger jevnt utstrakt mellom sine endepunkter.
5. En *flate* er det som kun har lengde og bredde.
8. En *plan vinkel* er åpningen mellom to linjer som møtes i et plan, men som ikke faller sammen.
15. En *sirkel* er en plan figur innesluttet av en linje (kurve) på en slik måte at alle rette linjer fra et av punktene inne i figuren til linja er like store.
16. Og dette punktet kalles sirkelens *sentrum*.
17. En *diameter* til en sirkel er hvilken som helst rett linje gjennom sentrum og med endepunkter i begge retninger på

omkretsen av sirkelen. Slike rette linjer deler sirkelen i to.

23. *Parallelle* linjer er rette linjer som ligger i samme plan, og om de forlenges ubegrenset i begge retninger, så møtes de ikke i noen retning.

Euklid baserer seg i sine definisjoner på en del *udefinerte begreper*, begreper som man tar for gitt. Eksempler på slike er lengde og bredde i definisjon 2, begreper som brukes til å definere linje. I dag ville vi latt linje være et slikt udefinert begrep og dermed unngått definisjon 2.

Neste skritt i oppbygningen av plangeometrien er 5 aksiomer, eller postulater som Euklid kaller dem. Aksiomer er altså grunnleggende påstander som vi tar for gitt og hverken prøver å bevise eller motbevise. I en matematisk modell vil dette være de premissene vi legger til grunn, for så å bygge hele teorien vår på dem. Aksiomer for plangeometri danner således egentlig premissene for en modell for plangeometri. For at dette skal være en god modell må aksiomene passe med det vi oppfatter som plangeometri, og ikke bare det, det må være nok aksiomer slik at vi ikke kan utlede setninger som ikke passer med vår oppfatning av hva plangeometri er. Vi skal komme litt tilbake til dette etter at vi har sett på Euklids 5 aksiomer for plangeometri.

De 5 aksiomene for plangeometrien

1. Fra et vilkårlig punkt til et vilkårlig annet punkt kan man trekke en rett linje.
2. Et rett linjestykke kan forlenges ubegrenset i en rett linje.
3. Man kan tegne en sirkel med vilkårlig sentrum og vilkårlig radius.
4. Alle rette vinkler er like store.
5. Dersom en rett linje skjærer to rette linjer og de innvendige vinklene på samme side av den kryssende linja er mindre enn to rette vinkler, så vil de to rette linjene møtes om de forlenges ubegrenset til denne siden.

De tre første aksiomene er nokså enkle å forstå, problemene begynner først ved det 4. aksiomet. Det er ikke noe tvil om at aksiomet er korrekt, spørsmålet er mer hvorfor aksiomet er der. Svaret er at Euklid trengte en standard for vinkler og til det brukte han begrepet rett vinkel. Aksiomet sier at dette begrepet er konsistent (og universelt).

Det 5. aksiomet, også kalt "parallellaksiomet", er det mest finurlige av hans aksiomer. Det var lenge et åpent spørsmål om aksiomet i det hele tatt var nødvendig, kanskje kunne aksiomet utledes fra de definisjonene og de andre fire aksiomene. I dag vet vi at det ikke er tilfelle, men beviset kom ikke før tidlig på 1800-tallet, altså mer enn 2000 år etter at Euklid formulerte sine arbeider. Det viser kanskje mer enn noe annet hvilken innsikt Euklid hadde.

Beviset for at parallellaksiomet er uavhengig av de andre kom egentlig som en konsekvens av en mye dypere matematisk erkjennelse, forestillingen om matematiske modeller som noe annet enn virkeligheten, heller som en beskrivelse av virkeligheten. På 17-1800-tallet ble denne forskjellen mer og mer tydelig for mange matematikere, og konsekvensen av dette var at man begynte å filosofere over muligheten av å lage andre typer geometrier, f.eks. geometri på en kuleflate, såkalt elliptisk geometri, eller det som i dag kalles hyperbolsk geometri. Det var gjennom slike konstruksjoner man oppdaget at det finnes geometrier der parallellaksiomet ikke er sant, men hvor de andre fire aksiomene fortsatt gjelder. Konsekvensen av denne erkjennelsen er at parallellaksiomet nødvendigvis ikke kan utledes fra de andre fire.

Tilbake til Euklid og "Elementene". Videre utover i første bok formulerer Euklid en hel del plangeometriske setninger som i dag er velkjente. Noen eksempler:

Setning 15. Når to rette linjer skjærer hverandre, er toppvinklene like store.

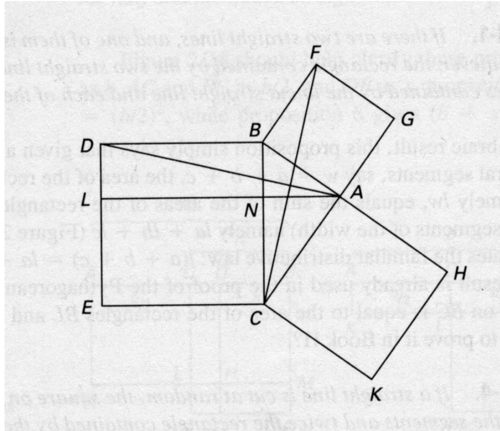
Setning 30. Rette linjer som er parallelle med samme rette linje, er innbyrdes parallelle.

Setning 32. ... Vinklene i en trekant er til sammen lik to rette vinkler. (dvs 180 grader)

Denne setningen er faktisk ikke sann i elliptisk geometri. Vi kan trekke tre rette linjer på en sfære, visualisert på jordkloden. En linje følger ekvator, og de to andre linjene er storsirkler gjennom polpunktet, medianer. Vinklene mellom medianene og ekvator er rette, det er to av dem, til sammen to rette vinkler. Men i tillegg finnes det i trekanten en vinkel mellom medianene oppe på polpunktet. Så vinkelsummen blir større enn to rette.

Setning 47. I en rettvinklet trekant er kvadratet på den siden som ligger overfor den rette vinkelen, lik summen av kvadratene på de sidene som inneslutter den rette vinkelen.

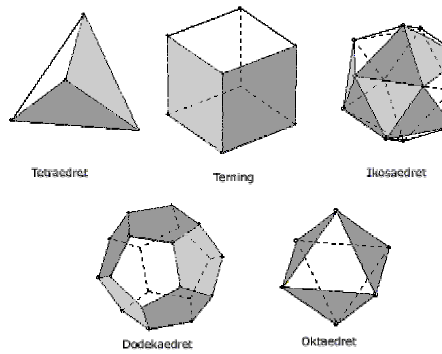
Denne setningen kjenner vi igjen som pytagoras teorem, en setning som naturligvis har en sentral plass i en utførlig beskrivelse av plangeometrien. Euklid har et elegant bevis.



I figuren har vi brukt den rettvinklede trekanten ABC som utgangspunkt og tegnet inn de tre kvadratene ABFG, BCED og ACKH. Samtidig har vi nedfelt en normal fra punktet A til linja DE, skjærer DE i L, og trukket linjer mellom C og F og mellom A og D. Siden BFC er en trekant med grunnlinje BF og høyde BA, vil arealet være halvparten av arealet til kvadratet ABFG. Men dette arealet er det samme som arealet av ABD, siden de to trekantene er like, og som igjen er halvparten av arealet av rektangelet BDLN. Altså er arealet av kvadratet ABFG lik arealet av rektangelet BDLN. Nå gjør vi nøyaktig det samme på den andre siden av linja AL, og pytagoras teorem følger.

Vi hopper elegant bukk over bok II-XII og går rett til bok XIII. Et studium av disse bøkene er i seg selv interessant, men går selvfølgelig milevidt ut over det målet vi har med denne framstillingen.

Den trettende boka tar for seg konstruksjonen av de fem regulære polyedrene, de som ofte kalles de Platonske legemene.



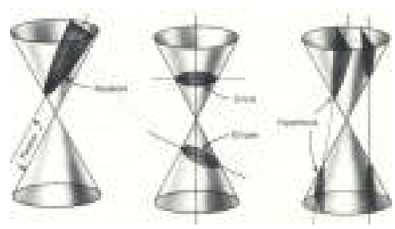
Studiet av de fem regulære polyedrene, kuben, tetraederet, oktaederet, dodekaederet og ikosaederet, og beviset for at dette er de eneste av sitt slag, ble gjort av Theaeteus (417-369). De første tre legemene var kjent i før-gresk tid, og det finnes arkeologiske spor av bronsedodekaedere så langt tilbake som til rundt -6500. Ikosaederet, derimot, har man klare indikasjoner på at ble først studert av Theaetetus. Det var også han som kom til erkjennelsen av at det kun finnes disse fem regulære polyedrene og at egenskaper ved regulære polyedre i det hele tatt var verdt et studium. Så kanskje legemene burde ha hett Theaetetus legemer og ikke Platonske legemer, selv om sikkert Platon hadde stor innflytelse på den 12 år yngre Theaeteteus i den perioden han studerte ved Platons akademi. Uansett så skrev Euklid alt sammen ned og mere til i sin bok XIII.

Apollonius og kjeglesnittene

Hvis fra et gitt punkt en rett linje er trukket til omkretsen av en sirkel som ikke ligger i samme plan som punktet, og linja er forlenget i begge retninger, og hvis, med det samme punktet bevart, den rette linja er rotert rundt omkretsen av sirkelen..., da er den genererte flaten, bestående av to flater som ligger diametralt motsatt av hverandre ..., en ***kjegleflate****. Det utvalgte punktet kalles* ***toppunktet*** *og den rette linja trukket fra toppunktet til sentrum av sirkelen kalles kjegleflatens* ***akse****. … Sirkelen kalles* ***basis*** *for kjeglen.*

Slik beskriver Apollonius en kjegle i sin bok av samme navn. Han fortsetter med å kutte kjeglen med forskjellige plan og får sirkler, ellipser, parabelen og hyperbler. Dette var det første systematiske studiet av kjeglesnittene.

Dette verket har i likhet med noen få andre bøker fra oldtiden blitt stående igjen som monumenter over en tid der både skaperevnen og den logiske tenkingen sto i høysetet. Apollonius hadde for så vidt ikke som mål å utvikle en generell teori for kvadratiske kurver som en problemstilling i seg selv. Hans mål var å bruke kunnskapen om kjeglesnitt til å løse andre geometriske problemer som var uløste i hans samtid, slik som vinkelens tredeling og kubens fordobling.



På veien utvikler han altså hele teorien for kjeglesnitt, med styrelinjer, eksentrisitet og brennpunkter, en framstilling som den dag i dag er gjengs for geometrikurs på universitetsnivå.

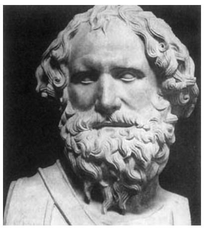
Anvendt matematikk, astronomi i gamle tider

Innledning

Det finnes mange anekdoter om Arkimedes og hans arbeid. Den mest kjente er den gang han etter sigende skulle ha oppdaget det som siden er blitt kjent som Arkimedes lov. Da skulle han ta seg et bad og i det han gikk opp i badekaret skjønte han at den vannmengden som skvalpet ut når han trådde oppi måtte være like voluminøs som hans kroppsdeler som erstattet vannet. I pur glede løp han ut på gata og ropte "Eureka!" - jeg har funnet det!. Om det er sant vites ikke, men en god historie er det uansett.

Arkimedes var kanskje verdens første anvendte matematiker. Han arbeidet som militæringeniør i den romerske hæren og hans arbeid ble også hans bane. Da han ble tilkalt av hærføreren nektet han å komme før han var ferdig med et bevis... Soldaten som hentet han ble så forarget over denne form for akademisk frihet at han stakk sverdet gjennom Arkimedes.

Arkimedes



Arkimedes var født i Syracuse på Sicilia og han levde også hele sitt liv der. Det er svært sannsynlig at Arkimedes i sin ungdom studerte hos etterfølgerne av Euklid i Alexandria. Han var godt kjent med matematikken som ble utviklet der, men det som i enda større grad underbygger antagelsen er at han kjente matematikerne som jobbet der personlig, og sendte sine egne resultater til Alexandria med personlige budbringere.

I tillegg til mange matematiske oppdagelser, er Arkimedes kjent for en sine mekaniske oppfinnelser. Syracuse var inne i en langtrukken krig mot romerne, og var ofte avhengig av sine finurlige krigsmaskiner, oppfunnet av Arkimedes, for å holde stand mot fienden. Andre, og mer fredsommelige oppfinnelser, er Arkimedes skrue, en smart vannpumpe, og den sammensatte trinsa som fortsatt brukes til å dra båter på land med.

Arkimedes var mest opptatt av matematiske problemer, og fant gode metoder for å regne ut volum, overflate og tyngdepunkt av ulike legemer. Det var for eksempel Arkimedes som viste at overflaten til ei kule er fire ganger så stor som overflaten til en sirkulær skive med samme radius.

Arkimedes ble drept i 212 f.kr. under romernes erobring av Syracuse under den andre puniske krigen, etter at maskinene han hadde konstruert ikke lenger klarte å holde romerne ute.

Ptolemais

Ptolemais er regnet som sin samtids kanskje mest innflytelsesrike astronom og geograf. Hans geosentriske verdensbilde ble stående i 1400 år før renessanse-astronomene begynte å plukke det fra hverandre.

Som tilfelle er med flere av de gamle greske vitenskapsmennene, så vet vi ikke så mye om deres liv. Det som er kjent om Ptolemais er at han drev astronomiske observasjoner fra Alexandria i Egypt i perioden 127-141. Hans navn, Claudius Ptolemy, tyder på at han hadde romersk bakgrunn.

Ptolemais store skrevne arbeid, "Almagest" finnes i en overlevert versjon. Det er hans første arbeid og det gir i detalj en matematisk beskrivelse av bevegelsene av Sola, Månen og planetene.

Ptolemais hadde også visse poetiske evner, noe som kommer fram i et epigram i Almagest, like etter innholdsfortegnelsen. Vi gjengir her den engelske oversettelsen:

Well do I know that I am mortal, a creature of one day.
But if my mind follows the winding paths of the stars
Then my feet no longer rest on earth, but standing by
Zeus himself I take my fill of ambrosia, the divine dish.

Gresk astronomi

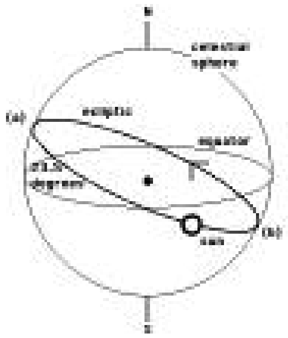
Alle de store kulturene i oldtiden var opptatt av astronomi. Himmellegemenes gang ble observert og deres regelmessigheter ble lagt til grunn for forutsigelser av kommende hendelser. Således kunne f.eks. babylonerne skrive opp tabeller for soloppgang og -nedgang, og de visste når måneformørkelser kom til å skje. Men det var først i Hellas rundt -400 at det ble utviklet en modell for bevegelsene på himmelen. Før det var beregningene ren aritmetikk, basert på observerte periodisiteter.

Denne første astronomiske modellen baserte seg på to konsentriske sfærer, den innerste var jordas sfære og den ytterste inneholdt stjernene og planetene. Grekerne var overbevist om at jorda var rund, det hadde de mange indikasjoner på; båter som forsvant under horisonten hvor mastetoppen var synlig mye lenger enn selve båten, jordskyggen ved måneformørkelser og ikke minst den estetiske begrunnelsen, at jorda måtte ha den mest perfekte form, nemlig kulas.

Grekerne var overbevist om at jorda sto stille i sentrum av himmelsfæren. Argumentet var til dels svært praktisk; dersom den roterte vill vi f.eks. kunne observere det på skyenes bevegelser, noe som ikke var tilfelle. For å forklare stjernenes bevegelser la grekerne til grunn at den ytre sfæren, himmelsfæren, roterte med flere ulike perioder, som døgn og år. Men stjernenes innbyrdes plassering var fast, og grekerne tenkte seg dem festet på himmelsfæren.

Problemet med denne modellen var selvfølgelig de "sju vandrerne", Sola, Månen, Merkur, Venus, Mars, Jupiter og Saturn. Riktignok fulgte de himmelsfæren i store trekk, men i tillegg hadde de sine egne baner som over litt tid avvek fra fixstjernenes bevegelser. Astronomene, og matematikerne, dette var stort sett de samme personene, jobbet hardt for å finne geometriske beskrivelser av vandrernes bevegelser. Men i motsetning til astronomene i renessansen, som Galilei, Kepler og Newton var de ikke så opptatt av å finne fysiske modeller for bevegelsene, eller enda bedre hvorfor planetene beveget seg slik de gjorde. Oldtidens observatører var mer opptatt av å finne vakre, sirkulære beskrivelser av planetbanene, beskrivelser som ikke bare passet med observasjonene, men som også tilfredsstilte grekernes trang til symmetri og estetikk.

Siden himmelbevegelsene var antatt å foregå på en sfærisk overflate var det nødvendig med et inngående studium av sfærer. Euklid behandlet ikke, kanskje litt overraskende, geometri på sfærer i sitt hovedverk "Elementene", men i et annet arbeide tar han opp dette temaet. Av begrepene han innfører er såkalte storsirkler og poler. En storsirkel er en maksimal sirkel på en kuleflate, f.eks. ekvator. Alle storsirkler er like lange og man kan vise at den korteste veien mellom to punkter på en kuleflate følger en storsirkel. Det fantes flere viktige storsirkler, og den mest prominente var solas ferd over himmelsfæren, den såkalte ekliptikken.

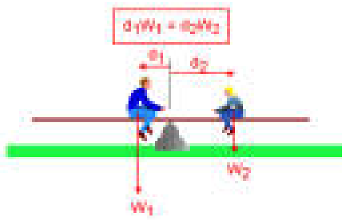


En storsirkel er bestemt av et ekvatorialt plan som presis kutter ut denne sirkelen på kuleflaten. Dette planet bestemmer entydig to punkter på kuleflaten, de to polene, som de to punktene på flaten som er lengst fra planet. Trekker vi en diameter gjennom jordas to poler, syd- og nord-, og forlenger denne linja ut til himmelhvelven, kommer vi til de to punktene om hvilke den daglige rotasjonen av himmelsfæren finner sted. Storsirkelen knyttet til disse himmelpolene kalte grekerne for himlens ekvator. I tillegg til disse to storsirkelene var det enda to, horisonten og den lokale meridianen, storsirkelen som passerer gjennom himmelens nord- og sydpol og i tillegg rett over det punktet på jorda vi befinner oss.

Vinkelen mellom ekliptikken og himmel-ekvator ble på Euklids tid målt til 24 grader, mens Ptolemais anga verdien 23,51,20 i datidens 60-tallssystem, mao 23 grader 51 minutter og 20 sekunder. I dag er denne vinkelen 23 og en halv grad og den avtar jamt, så presisjonen i målingene i oldtiden var det ingenting å utsette på.

Arkimedes og de første matematiske modeller for fysikk

Oldtidens matematikere kjente godt til vektstangprinsippet, nemlig at to vekter kan balansere hverandre selv om de ikke er like store, ved at avstandene til vippepunktet justeres i det omvendte forholdet mellom vektenes størrelse.



Men så vidt vi vet hadde ingen laget en matematisk modell for dette før Arkimedes entret scenen. Problemet med å lage en matematisk modell for fysikken i en vektstang er at den fort blir veldig komplisert. Vi må ta høyde for at selve vektarmen har masse, at den kan bøyes osv. Det geniale Arkimedes gjorde var å ignorere alt dette. Han sa enkelt og greit at vektarmen er fullstendig stiv, men uten egen masse og at vektene og deres plassering var punktformet og med hele sin masse plassert i dette tyngdepunktet. Dermed kunne han enkelt eliminere alle uvesentligheter og stå igjen med en matematisk modell som beskrev matematikken i en idealisert vektstang og faktisk bevise vektstangsprinsippet. I sin store avhandling om likevekt starter Arkimedes opp med sju aksiomer han ønsker å legge til grunn. Disse aksiomene danner premissene for den matematiske modellen og passer veldig godt med den fysiske erkjennelsen vi til daglig gjør. Av de sju aksiomene gjengir vi her fire:

E1: Like store vekter i samme avstand (fra vippepunktet) er i likevekt, mens like store vekter i ulik avstand er ikke i likevekt; de vipper mot den siden med størst avstand.

E2: Hvis vi legger noe til den ene siden når vi allerede har en likevekt, vil vi ikke lenger ha likevekt og vekta vipper mot den siden hvor vi legger til ekstra vekt.

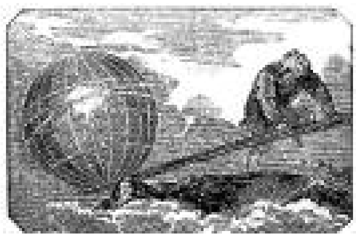
E3: Tilsvarende, hvis noe tas vekk fra den ene siden av en likevekt, vil vekta vippe mot den siden hvor vi ikke har tatt bort noe.

E6: Hvis to vekter i bestemte avstander er i likevekt, så vil andre vekter av samme størrelse og i samme avstand også være i likevekt.

På bakgrunn av disse aksiomene klarer Arkimedes å bevise vektstangsloven

To vekter balanserer dersom forholdet mellom avstandene er det omvendte av forholdene mellom størrelsene på vektene.

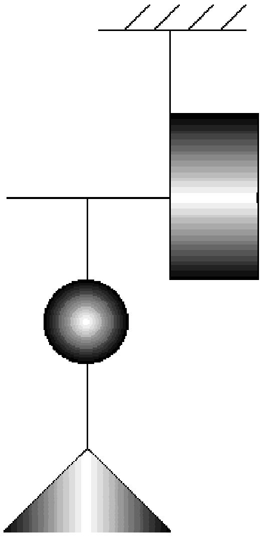
Denne setningen er bare en av mange tilsvarende setninger formulert og bevist av Arkimedes. Hans kanskje mest kjente resultat finnes i verket "Om flytende legemer". Her viser han det som i dag er kjent som Arkimedes lov, nemlig at et legeme som nedsenkes i vann fortrenger en væskemengde som er lik volumet av det nedsenkede legemet. Det var dette resultatet han i følge legenden fant mens han badet, og hvor han skal ha løpt ut i gaten uten klær på og ropt "Eureka, eureka", eller "jeg har funnet det!". Hvorvidt det er sant vil man aldri få vite, men det er jo egentlig heller ikke så vesentlig.



Arkimedes beregning av kulas volum

Arkimedes beregnet på en finurlig måte volumet av en kule. Her gjengir vi hans argument. Vi antar at vi kjenner volumet av en sylinder og volumet av en kjegle.

Hans argument har med likevekt å gjøre. Vi henger opp en sylinder, en kule og en kjegle slik figuren viser. Sylinderen har radius og høyde lik R og det samme for kjeglen, mens kula har diameter R, dvs. radius $R/2$. Avstanden ut fra sylinderen til det punktet der opphenget til kula og kjeglen er plassert er også R. Alle legemene har for enkelthet skyld egenvekt 1.

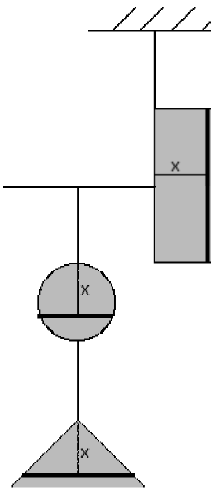


Arkimedes argument er todelt, den ene delen går ut på å vise at figuren balanserer, mens den andre delen beregner volumet av kula når vi antar at vi har vist at systemet balanserer.

Vi begynner med det siste. Volumet av kula setter vi til V, volumet av kjeglen til K og volumet av sylinderen S. Vi vet at $S=\pi R^2 * R$ og at $K=(1/3)\pi R^2 * R$. Siden systemet er i likevekt og må momentet (kraft ganger arm) til kula og kjeglen, gitt ved $(V+K)*R$ være det samme som momentet til sylinderen. Vi kan regne som om hele volumet til sylinderen er plassert i tyngdepunktet, altså blir momentet $S*(R/2)$. Setter vi disse to uttrykkene til å være like får vi

$$V=(1/6)\pi R^3 = (4/3)\pi (R/2)^3$$

dvs. volumet av en kule med radius R/2.



For å vise at systemet er i likevekt trenger vi en mer skjematisk figur.

Vi har kuttet ut tynne skiver av de tre legemene, i avstand x fra toppen for kulen og kjeglen, og i samme avstand x fra balansesenteret for sylinderen. Vi lar alle de tynne skivene ha tykkelse s og antar at vi kan betrakte dem som sylindriske skiver, med høyde s. Skivene er markert på figuren med svarte bånd.

Volumet av skivene finner vi som følger: Siden høyden og radien i kjeglen er like, er toppvinkelen rett. Det betyr at radius i sirkelen som ligger x under toppen selv er x, og volumet av den tynne skiva er $\pi x^2 s$. På kula bruker vi pytagoras på trekanten med grunnlinje langs det svarte båndet og det tredje hjørnet i origo. Hypotenusen er x, den vertikale kateten er $x\text{-}R/2$ og vi får at radius i den aktuelle sirkelskiva er

$$\pi((R/2)^2-(x-(R/2))^2) = \pi(-x^2+xR)$$

Det gir volum av sirkelskiva $\pi(-x^2+xR)s$. For skiva på sylinderen har vi volumet gitt ved $\pi R^2 s$. Dette gir balanselikningen

Høyre Side: $x\pi R^2 s$
Venstre Side: $R(\pi x^2 s+\pi(-x^2+xR)s)$

En enkel utregning viser at HS er lik VS og vi har balanse i figuren.

Diofantus og tallteoriens tidlige utvikling, slutten på gresk matematikk

Innledning

"Blant tallene finnes

kvadrater som er laget ved at et tall ganges med seg selv, tallet selv kalles siden i kvadratet,

kubikker, som dannes ved å gange et kvadrat med sin side,

kvadrat-kvadrater, som lages ved at kvadrater ganges med seg selv,

kvadrat-kubikker, som er laget ved at kvadrater ganges med kubikker med samme side som dem selv,

kubikk-kubikker, som er laget ved at kubikker ganges med seg selv;

og det er fra addisjon, subtraksjon, multiplikasjon eller divisjon av slike tall de fleste aritmetiske problemer dukker opp, og ved å bruke denne metoden vil du bli i stand til å løse problemene..."

Slik skriver Diofant i sin berømte bok *Aritmetika*. Diofant var den første moderne tallteoretiker. Hans språk og symbolbruk er litt fremmed fra hvordan vi gjør det i dag, men det er ikke vanskelig å forstå sammenhengen. Kvadrat-kubikker ville vi i dag kalle 5. potenser, men vi forstår jo hva han mener. Og resultatene hans innen tallteori står seg fortsatt godt, mest berømt er det som i dag bærer hans navn, nemlig Diofants teorem. Denne læresetningen gir alle tripler av hele tall som passer inn i pytagoras formel

$$x^2+ y^2=z^2$$

Så det er kanskje ikke noen tilfeldighet at det var nettopp i margen på en side i hans utgave av Diofants "Aritmetika" at Fermat formulerte sin berømte setning om at plassen var for liten til å skrive ut beviset for at det ikke hinnes hele positive tall x, y og z som passer i formelen

$$x^n+y^n=z^n$$

når n er større enn eller lik 3.

Diofantus

Diofantus, ofte kjent som "algebraens far", er best kjent for sin "Arithmetica", et arbeid om løsningen av algebraiske ligninger og tallteori. Det er uklart nøyaktig når han levde, men i en gresk antologi fortelles det at hans barndom varte 1/6 av hans liv, at han giftet seg etter enda 1/7 av sitt liv. Han lot skjegget vokse 1/12 av sit liv etter at han giftet seg, og at hans sønn ble født 5 år senere. Sønnen ble halvparten så gammel som faren og døde 4 år før ham. Av dette kan vi slutte at han giftet seg da han var 26 år, hadde en sønn som døde 42 år gammel, fire år før Diofantus selv døde 84 år gammel.

"Arithmetica" er en samling av 130 problemer som gir numeriske løsninger av ligninger og systemer av ligninger. Ligningene er oftest lineære eller kvadratiske, men høyere grad forekommer også. Diofantus hadde ikke noe begrep om null eller negative tall, men brukte positive rasjonale tall. Derfor var han bare opptatt av løsninger som var positive hele tall og brøker.

Diofantus ser også ut til å ha kjent til at hvert eneste tall kan skrives som summen av fire kvadrattall. Hvis han virkelig kjente til dette resultatet ville det vært bemerkelsesverdig selv for Fermat som levde nesten 1900 år senere. Fermat formulerte resultatet, men klarte ikke å vise at det er riktig. Det var det først Lagrange som gjorde ved å bruke av resultater fra Euler.

Diofants teorem

Kanskje er det skolematematikkens mest berømte resultat. Pytagoras læresetning har laget problemer for ungdommer i hundrevis av år. Samtidig har det hjulpet snekkere i sine konstruksjoner i tusenvis av år.

Pytagoras setning sier at i en rettvinklet trekant er kvadratsummen av katetene lik kvadratet av hypotenusen, ofte skrevet som

$$x^2+y^2=z^2$$

Vi skal se på tallteoriens pytagoreisk teorem. Vårt problem er: Finnes det hele tall x,y,z slik at

$$x^2+y^2=z^2$$

og hvis det finnes, kan vi finne alle slike tripler?

Svaret på dette er kjent som Diofants teorem. Diofant var en egyptisk matematiker som hadde stor betydning for utviklingen av tallteorien.

Noen tripler er kjent for de store masser, mest berømt er nok 3,4,5:

$$3^2+4^2=5^2$$

Litt mindre berømt, men fortsatt med kjendisstatus

$$5^2+12^2=13^2$$

og da er vi vel over i kunnskap for de spesielt interesserte

$$8^2+15^2=17^2$$

eller

$$20^2+21^2=29^2$$

Diofants teorem finner alle disse løsningene og flere til. Ja teoremet finner faktisk alle primitive tripler, dvs. tripler uten felles faktor ut over 1. Siden vårt utgangspunkt er at vi skal finne alle pytagoreiske tripler er det greit å skille mellom primitive og ikke-primitive tripler. De primitive er som nevnt over de triplene som ikke har felles faktor, de er en slags prim-tripler. For hvert eneste primitive trippel finnes det et trippel for hvert eneste hele tall, bare ved å gange de tre tallene i det primitive triplet med samme tall. Det betyr at problemet i Diofants teorem er løst ved å finne alle primitive tripler. Første steg i dette arbeidet er en nokså elementær observasjon om partall og oddetall, og denne observasjonen er nokså typisk for tankegangen i tallteoriarbeid. La (x,y,z) være et primitivt pytagoreisk trippel. Siden primitivt betyr at de ikke har felles faktor, så kan heller ikke de tre tallene alle være partall. Da ville de jo hatt 2 som felles faktor. Det betyr at minst ett av tallene må være oddetall. Det betyr imidlertid at nøyaktig to av tallene må være oddetall. Dette kan vi se ved å regne modulo 2, oddetall er da 1 og partall er 0. Mulige regnestykker er da 0+0=0, 0+1=1, 1+0=1 og 1+1=0. Den første av disse svarer til at de tre tallene har 2 som felles faktor, mens de tre andre har nøyaktig to oddetall. Dermed har vi fastslått at i et primitivt trippel så er ett av tallene partall og de to andre oddetall, men vi vet ikke hvilke som er odde og hvilke som er par. Nå er det slik at ethvert kvadrattall er lik med 1 eller 0 modulo 4. Dette kommer av at kvadratet av et partall $(2n)^2=4n^2$ er delelig med 4 og kvadratet av et oddetall $(2n+1)^2=4n^2+4n+1$ er 1 modulo 4. Summen av to kvadratiske oddetall må da nødvendigvis være 2 modulo 4, (1+1). Denne summen kan ikke være et kvadrattall siden disse er 0 eller 1 modulo 4. De andre mulighetene 0+1=1 og 1+0=1 er begge mulige i forhold til den analysen vi akkurat har gjort. Konsekvensen er at den ene kateten er et oddetall, mens den andre er et partall. Hypotenusen er alltid et oddetall.

Nå er vi faktisk godt inne i beviset for Diofants teorem og da er det kanskje på tide å formulere selve teoremet. Diofants teorem sier følgende:

Anta at (x,y,z) er et primitivt pytagoreisk trippel hvor x er den odde og y den like kateten. Da finnes det naturlige innbyrdes primiske tall p,q slik at

$$x=p^2-q^2,\ y=2pq,\ z=p^2+q^2.$$

Tidligere anga vi noen mer eller mindre kjente primitive pytagoreiske tripler. Disse kan vi nå identifisere ved hjelp av Diofants teorem. Triplet (3,4,5) er gitt av p=1, q=2, (5,12,13) er gitt ved p=2, q=3, (8,15,17) er gitt ved p=1, q=4, mens (20,21,29) er gitt ved p=2, q=5. I tillegg kan vi produsere nye tripler, f.eks. med p=3, q=4 som gir triplet

$$x=4^2-3^2=7,\ y=2*3*4=24,\ z=4^2+3^2=25$$

Diofants teorem gir en komplett beskrivelse av alle pytagoreiske tripler. Dette er et sterkt resultat fordi det ikke bare sier noe om eksistens, men faktisk gir oss et konstruktivt og komplett resultat. Dette er ikke helt vanlig i matematisk teori og setter Diofant i et gunstig lys.

Slutten på gresk (antikk) matematikk

På 3-400-tallet e. Kr. er det svært påfallende at den greske storhetstiden i matematikkhistorien brått tar slutt. Etter mer enn 1000 år med blomstringstid for intellektuell virksomhet av alle slag, inkludert matematikk, tar det omtrent helt slutt med det omstridte mordet på Hypatia i 415 (se f.eks. [2]). Og et naturlig, og på mange måter tidsaktuelt

spørsmål er hvorfor?
Blant mange ulike årsaker er kanskje den viktigste endringene i de sosiopolitisk forhold i Middelhavsregionen.

Et studium av utviklingen av matematikk i de forskjellige oldtidskulturene viser at alle har vært drevet framover av en intellektuell nysgjerrighet, og at denne drivkraften har vært sterkere enn behovet for å utvikle matematikk som et verktøy til å løse praktiske problemer. Men for at den intellektuelle nysgjerrigheten skal få blomstre trengs et politisk klima som gir muligheter og også stimulerer denne type aktivitet.

For babylonerne var matematikk og matematisk tenking en viktig del av utdanningen av samfunnets elite. I det gamle greske samfunnet stakk den intellektuelle nysgjerrigheten enda dypere. Der oppfordret det sosiopolitisk systemet til å drive med matematikk og filosofi og dette klimaet videreførte Ptolemais i Egypt i tiden etter -300.

Men selv i det greske samfunnet var det faktiske antallet mennesker som forsto teoretisk matematikk svært lavt. Naturlig nok var det et fåtall mennesker som hadde evner og anledning til å bruke hele livet sitt til å studere matematikk eller astronomi, ikke minst fordi de trengte noen til å finansiere virksomheten. De beste matematikerne skrev tekster som ble studert rundt omkring i de matematikkskolene som fantes, men behovet for muntlig overlevering av kunnskap var stort. Det var få forunt å lære seg Euklids "Elementene" eller Apollonius "Kjegler" bare ved å lese dem. Dermed ble kontinuitet i virksomheten overmåte viktig, siden et brudd krevde store anstrengelser for å komme opp på nivå igjen.

Ledelsen i det romerske imperiet hadde liten interesse av matematikk og matematisk forskning. De brydde seg lite om å skaffe gode greske matematikklærere til undervisningen av sin egen elite og snart var det ingen igjen i den romerske overklassen som forsto de gamle matematiske tekstene og langt mindre kunne bidra til en matematisk utvikling. Den greske tradisjonen ble til en viss grad videreført i Athen og ved museet i Alexandria, tekstene fantes og ble lest, men færre og færre hadde den nødvendige kunnskap og matematiske innsikt til å bringe dette vårt store intellektuelle byggverk noe særlig videre. Med ødeleggelsen av det store biblioteket mot slutten av det fjerde århundre gikk mulighetene for å bringe kunnskapen fra tidligere slekter videre til nye generasjoner mer eller indre tapt. Dermed ble det slutt på en lang og fruktbar tradisjon, og det skulle ta nesten 1000 år før Europa igjen begynte å røre på seg i forhold til matematikk. I mellomtiden ble arenaen overlatt til de asiatiske sivilisasjonene, i første rekke Kina og India. Men kanskje enda viktigere var virksomheten innen den arabiske kultursfæren, en virksomhet som faktisk er fundamentet for mange ting vi tar som selvfølgeligheter i dag.

Kilder:

[1] Victor J. Katz: A History of Mathematics, HarperCollins, 1993

[2] Audun Holme: Matematikkens historie, Fagbokforlaget, 2001

[3] Bernt Øksendal: Tall og tallsystem, Gyldendal/NMF 1991

[4] http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics.html

(5) Torgeir Onstad: Fra Babel til Abel, NKS-forlaget, 1994

[6] Audun Holme: Matematikkens historie, Fagbokforlaget, 2001

[7] T.L. Heath: A history of Greek mathematics 1, Oxford, 1931

[8] http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html

[9] www.andrews.edu/~calkins/math/webtexts/numb19.htm

[10] MA-EVU1: Videreutdanningskurs i tallteori, UiO

Oppgaver

Hjemmeeksamen

Velg ut en av disse fem oppgavene. Leveres senest neste samling, dvs. fredag 3. desember. Kan også sendes elektronisk før denne datoen. Besvarelsenes lengde kan med fordel ligge mellom 2000 og 3000 ord. Det er også mulig å gjøre to av oppgavene i noe forkortet versjon.

1. Ta for deg tallsystemene i flere kulturer i oldtiden, sammenlign dem og beskriv dem. Momenter som du kan se på er f.eks.:

-Matematisk beskrivelse av systemene
-Tallsystemene i et kulturelt/språklig/tekstlig perspektiv
-Systemenes sterke og svake sider, addisjon, multiplikasjon etc.
-Sammenlikning med de tallsystemene vi bruker i dag

Beskriv også hvordan dette kan trekkes inn i egen undervisning, legg særlig vekt på hvordan dette kan brukes til å øke elevenes matematiske forståelse.

2. Beskriv et undervisningsopplegg knyttet til Euklids bok Elementene. Ta med både litt historikk, litt om strukturen, spesielt i den første boken, og plukk ut minst tre definisjoner/aksiomer/setninger som skal forklares for elevene, matematisk og matematikkhistorisk.

3. Lag et undervisningsopplegg knyttet til Pytagoras og pytagoreerne. Plasser dem i en historisk sammenheng og forklar matematikken i deres konstruksjoner av trekanttall, kvadrater osv. Gi eksempler på flere slike konstruksjoner av tall som elevene selv kan eksperimentere med.

4. Beskriv Pytagoras setning, både geometrisk og tallteoretisk (Diofants teorem), fra et matematisk og et matematikkhistorisk synspunkt. Presenter et bevis for den geometriske setningen på en pedagogisk måte, rettet inn mot en bestemt elevgruppe.

5. Presenter Arkimedes i et biografisk perspektiv og i et matematisk perspektiv. Plukk ut noe fra hans matematikk eller oppfinnelser og presenter dette på en pedagogisk måte.

Oppgaver

1. En interessant metode egypterne brukte var deres måte å løse likninger på, med en "prøve og tilpasse" metode som kalles *Regula Falsi*. dersom vi står overfor en likning med en ukjent kan vi først prøve å sette inn et tall for x som gir pene tall på venstre side. Sammenhold resultatet fra venstre side med det tallet du har på høyre side, og se om de står i forhold til hverandre. er resultatet på venstre side f.eks. en faktor i tallet på høyre side?
Et eksempel på Regula Falsi finner vi i denne oppgaven fra indisk matematikk, gitt av Bhaskara:

> *Et halsbånd gikk i stykker under en kjærlighetsstrid. En tredel av perlene falt ned, en femdel ble liggende på løybenken, en seksdel fant piken og en tidel samlet elskeren sammen. Seks perler ble igjen på snoren. Hvor mange perler hadde det opprinnelig vært på snoren?*

Løs oppgaven ved å bruke Regula Falsi.

2. To oppgaver fra Moskva-papyrusen:
a) Arealet av et rektangel er 12 og bredden 3/4 av lengden. Hva er dimensjonene?
b) En katet i en rettvinklet trekant er 2,5 ganger den andre og arealet er 20. Hva er dimensjonene?

3. Du har en vanlig skålvekt og fem lodd. Når du veier plasserer du det som skal veies på den ene skåla og loddene på den andre. Hvilken vekt må de fem loddene ha for at du skal kunne veie alle vekter på et helt antall gram fra 1g - 31g?Hva slags tallsystem benytter vi? Hvor få lodd kan du klare deg med, og hvilken vekt må hvert lodd ha dersom du skal kunne veie vekter på et helt antall gram fra 1g til 240g? dersom det er lovlig å bruke lodd på begge sider, også den skåla som legemet som skal veies ligger på. Hvor få lodd kan du nå greie deg med for å veie alle hele gram fra 1g til 240g?

4. Fingertall ble brukt mye i mange århundrer, og fra denne bruken framkom metoder for å utføre enkle beregninger. F.eks. for å multiplisere to tall mellom 5 og 10 hadde man en enkel teknikk. Skal vi multiplisere 7 med 9, løft 7-5=2 fingre på venstre hånd, og løft 9.5=4 fingre på høyre hånd. Adder de løftede fingre, 2+4=6 og vi får 10-er-sifferet i produktet. Multipliser nå de lukkede fingre, 3*1=3 som gir enerne i produktet og svaret blir 63. Hvorfor gir metoden alltid riktig svar?

5. Setning 2 i Bok II i Euklids Elementene lyder slik:

> *Når en rett linje er delt vilkårlig, er summen av de rektanglene som innesluttes av hele linja og hvert av stykkene, lik kvadratet på hele linja.*

Illustrer denne setningen med en figur. Kall lengdene av de to stykkene *a* og *b* og tolk setningen algebraisk.

6. Studer de mest sentrale matematikerne i oldtiden og vurder hvordan de har influert på hverandre.

7. Les teksten om Eratostenes fra Kyrene og sett deg inn i hans metode for å beregne jordas omkrets.

8. Forklar tegneseriebeviset for Pytagoras setning.

9. Bevis at kvadratroten til 2 er et irrasjonalt tall.

10. Drøft fordeler og ulemper ved en geometrisk tilnærming kontra en algebraisk tilnærming når man underviser om kvadratiske likninger.

11. Vis hvordan man kan gi et geometrisk bevis for 1., 2. og 3. kvadratsetning.

12. Vis hvordan vi med å snitte en kjegle med et plan kan få de vanlige formlene for kjeglesnittene.

13. I disse dager er det fullmåne. Se på hvordan tidspunktet for når månen går opp og ned forandrer seg fra dag til dag. Forklar.

14. Regn ut hvor gammel Diofantus ble.

15. Argumenter for hvorfor aksiomene E1, E2, E3 og E6 er nødvendige for å vise vektstangprinsippet.

16. Skriv opp 10 primitive pytagoreiske tripler.