MA-EVU3
Videreutdanningskurs i
matematikkens historie

DEL 2

Algebra og likningsteori, og tilbake til geometri

Ser på utviklingen av likningsteorien, gjennom arabisk og italiensk hegemoni, fram til Abels bevis for uløsbarheten av 5. gradslikninger ved rotutdragning. Knytter så sammen likningsteorien med geometri og trekker linjer fra Descartes til modellering av Volvos karosseri på en datamaskin.

Desember 2004

Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Om å løse likninger, hvordan og hvorfor

I denne delen av dette kurset dreier det meste seg om likninger og deres løsninger. Men hva er en likning? Og hva mener vi med å løse den?

For oss er en likning et matematisk uttrykk der :

1. Det skal finnes en eller flere ukjente størrelser, disse størrelsene opptrer som en potens med positiv, heltallig eksponent.
2. Uttrykket er skrevet som en likhet, dvs. vi har et likhetstegn, slik at de to sidene av likhetstegnet kreves å være like store.

Vi har lov å utføre visse algebraiske operasjoner på likningene, under meget strenge krav. Det viktigste kravet er at alle operasjoner som gjøres på den ene siden av likhetstegnet også må gjøres på den andre siden. Ganger vi høyresiden med 2, må vi samtidig gange venstresiden med 2.

Det å løse likninger betyr egentlig at vi ved å gjennomføre algebraiske operasjoner slik vi har beskrevet over, til slutt kommer fram til en likning der venstre siden av likhetstegnet er x alene, mens høyresiden kun er et tall, og ikke inneholder variable. Det er ikke alltid vi kan komme fram et slikt sluttprodukt. F.eks. hvis vi kun opererer med hele tall, så kommer vi ikke lenger enn

$$2x=1$$

siden $1/2$ ikke er et helt tall og vi kan derfor ikke dele med 2. Tilsvarende kommer vi ikke lenger enn til

$$x^2=2$$

dersom vi arbeider i et tallsystem som ikke inkluderer kvadratroten av 2, f.eks. de rasjonale tallene. På samme vis kommer vi ikke lenger enn til

$$x^2=-1$$

dersom vi ikke har inkludert den imaginære enheten. La oss derfor anta at vi søker etter løsninger i et tallsystem som i tillegg til alle de algebraiske operasjonene har alle slags røtter av alle tall. Algebraens fundamentalsats sier presis at de komplekse tallene har denne egenskapen.

Grunnlaget for å løse likninger er regnereglene for tall, det være seg rasjonale eller reelle eller komplekse. Når vi løser en likning gjennomfører vi som regel en sekvens av algebraiske operasjoner. Vi trekker fra tall på begge sider av likhetstegnet eller vi multipliserer begge sider med samme tall. Vi gjennomfører operasjonene uten å reflektere så veldig mye på hvorfor det er lov.

Bakgrunnen for våre "lovlige" operasjoner er et sett av aksiomer, eller grunnsetninger, som gjelder for mengder av tall, og de er disse aksiomene som i bunn og grunn definerer hva det er å være et tall.

Vi starter med en mengde av elementer, de som vi ønsker å kalle tall. I stedet for å liste dem opp skal vi beskrive dem gjennom deres egenskaper.

1. For det første trenger vi to regneoperasjoner, addisjon og multiplikasjon. Disse operasjonene kalles binære operasjoner siden de til ethvert par av tall produserer et nytt tall, addisjon produserer summen og multiplikasjon produserer produktet.
2. Begge operasjonene skal ha noen bestemte egenskaper, slik som

assosiativitet og kommutativitet. For addisjon ser dette ut som

Assosiativ lov:

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

Kommutativ lov:

$$x + y = y + x$$

3. Det neste er at de to operasjonene skal henge sammen, vi kaller det å være kompatible og formulerer det i den såkalte distributive loven.

Distributiv lov:

$$x(y + z) = xy + xz$$

4. Så krever vi at det finnes to helt bestemte elementer, eller tall, nemlig *0* og *1*. Vi sier at *0* er en additiv enhet siden ingen ting forandrer seg når vi legger den til, og tilsvarende er 1 en multiplikativ enhet. Den endrer ingenting ved multiplikasjon.
5. Den siste generelle egenskapen er eksistens av inverser. De additive inversene skriver vi med minus foran, mens de multiplikative skrives som brøker. Den formelle definisjonen av en (additiv) invers til et tall a er et tall b slik at $a+b=0$ mens en multiplikativ invers til et ikke-null element a er et tall b slik at $ab=1$. Dermed har vi at den additive inversen til 2 er -2, mens den multiplikative inversen til 2 er $1/2$.

Dette er de algebraiske egenskapene som må være på plass for at vi skal snakke om et tallsystem. I tillegg kan vi nå skrive opp aksiomer som passer for rasjonale tall, eller reelle tall, osv., men de tar vi ikke med her. I forhold til å løse likninger er egenskapene 1-5 over det som skal til. Da har vi lov til å gjøre de overganger vi ønsker for å forenkle likningene mest mulig.

Lineære og kvadratiske likninger i gammel tid

Eksempler på Babylonske løsninger av 2.grads likninger

Babylonerne har på sine leirtavler mange eksempler på løsning av 2.grads-likninger. Alle eksemplene er spesielle problemer, med helt konkrete koeffisienter, og gjerne med pene løsninger.

> *"Flaten og siden har jeg addert, og 00;45 er det. Ta 01, koeffisienten. Halvdelen av 01 brekker du av. Du får 00;30 og 00;30 multipliserer du. Du føyer 00;15 til 00;45. 01 har 01 som kvadratrot. 00;30 som du multipliserte, trekker du fra 01, og 00;30 er siden."*

Dette dreier seg om å finne siden i et kvadrat, i moderne terminologi kaller vi denne for x. Flaten henspeiler på et kvadrat med side x og den første setningen sier da at

$$x^2+x=3/4$$

hvor vi altså har gjort om *00;45* til *3/4*. Dette er likningen vi skal løse. Koeffisienten foran x er *1*, eller *01* som det her står og denne skal vi halvere, altså *1/2*, for deretter å kvadrere. Så legger vi til *3/4* og får *1*, som har *1* som sin kvadratrot og trekker til slutt fra *1/2*. Da får vi

$$x=\sqrt{((1/2)^2+3/4)} - 1/2$$

i henhold til beskrivelsen. Dette er nøyaktig den positive roten vi får når vi setter inn i formelen for løsning av 2. gradslikningen over

Babylonerne bruker denne metoden i mange eksempler og tilsynelatende kjente de til en generell formel. De gjorde de naturligvis ikke, siden begrepet formel ville være totalt fremmed for dem. I denne sammenheng er formel et nokså moderne begrep. Babylonernes framstillinger var retoriske, dvs at alt var beskrevet med tekst. Men selv om de ikke hadde neon generell formel virker det sannsynlig at de hadde en generell metode som de benyttet fra eksempel til eksempel. Så på en måte kan vi si at de hadde en slags oppskrift på å løse 2.gradslikninger.

Selvfølgelig fant de bare de positive røttene, all den stund negative tall ikke var oppfunnet. Av samme grunn måtte de dele familien av 2.gradslikninger opp i underklasser, avhengig av om konstantene sto på den ene eller andre siden etc.

Babylonerne løste også likningssett med flere ukjente. Også der hadde de noen mer eller mindre generelle metoder som vi ikke skal gå inn på her.

Litt om egyptisk likningsløsning

De egyptiske likningene er i stor grad nokså enkle. I Moskva-papyrusen finnes det noen geometriske problemer som svarer til å løse 2. gradslikninger uten 1.gradsledd.

> *"Arealet av et rektangel er 12, og bredden er 1/2 og 1/4 av lengden. Hva er dimensionene?"*

Dersom vi lar lengden være x så får vi at bredden er *3/4* av x, og vi får likningen

$$3/4\, x^2=12$$

som vi lett ser har løsning $x=4$. Et annet eksempel er hentet fra Kairo-papyrusen.

> *"Et rektangel med areal 60 kvadrat-alen har en diagonal på 15 alen. Finn sidene i rektangelet."*

Her er egypternes løsning av problemet, formulert i vårt moderne matematiske språk. Problemet kan formuleres slik:

$$x^2 + y^2 = 15^2$$
$$x\,y = 60$$

Fra disse to likningene får vi

$$x^2 + 2xy + y^2 = 15^2 + 120 = 345$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = 15^2 - 120 = 105$$

eller

$$(x + y)^2 = 345$$
$$(x - y)^2 = 105$$

Dessverre er ikke hverken *345* eller *105* kvadrattall, noe som selvfølgelig hadde gjort det mye enklere å løse dette likningssystemet. Egypterne omgikk dette problemet ved å bruke tilnærminger. De tilnærmet kvadratroten av *345* med $18 + 1/2 + 1/12$ og kvadratroten av *105* med $10 + 1/4$. Begge deler er gode tilnærminger. Dermed får vi

$$2x = 28 + 1/2 + 1/4 + 1/12$$
$$= 28 + 1/2 + 1/3$$

og

$$2y = 8 + 1/4 + 1/12 = 8 + 1/3$$

eller

$$x = 14 + 1/4 + 1/6$$
$$y = 4 + 1/6$$

og vi har løst problemet.

Geometrisk algebra fra Euklids Elementene bok II

Vi har tidligere sett på Euklids verk "Elementene". Selv om dette verket i hovedsak dreier seg om geometri inneholder det samtidig mye likningsteori. Imidlertid er denne likningsteorien alltid knyttet til geometri, og løsningene er også geometriske. Årsaken er selvfølgelig at i antikkens Europa ble alle størrelser betraktet som geometriske. Et tall var ikke et tall i seg selv, men uttrykk for lengden av et linjestykke. Likevel kan vi i Elementene, bok II finne igjen mesteparten av det vi dag kjenner som egenskapene til tall, slik som distributiv lov, kvadratsetningene etc. I tillegg ligger det også implisitt i Euklids geometriske resonnementer løsnig av både lineære og kvadratiske likninger. Euklid har endog med sitt berømte bevis for at det finnes uendelig mange primtall, et bevis som i likhet med mange andre av resultatene i hans store verk, bærer bud om at Euklid så absolutt forsvarer en plass blant verdenshistoriens mest betydningsfulle matematikere.

Diofantiske likninger, likninger med heltallige løsninger

Den store tallteoretikeren i senantikken var Diofantus av Alexandria. Hans hovedverk *Arithmetica* er helt sentralt i matematikkens utvikling og ble flittig lest av bl.a. De Fermat, mer enn 1000 år senere.

> *Et eksempel på Diofantus sin symbolbruk:*
>
> $$\Delta^{Y}\gamma\zeta\iota\beta M\theta$$
>
> *som i vår moderne notasjon ville bli skrevet $3x^2+12x+9$.*
> *Vi har at Δ^{Y} betyr kvadratet til en størrelse Y (som vi har for vane å kalle x), γ står for 3, ζ betyr tall, dvs. x, $\iota\beta$ betyr 12, M (egentlig med en liten ring over) betyr enheter eller monas og θ er 9.*

Det var Diofantus som innførte symbolisme i matematiske tekster.

Tidligere hadde all matematikk vært retorisk, med de problemene det førte med seg. Diofantus innførte symbolske forkortelser for de ulike størrelsene, som f.eks. Δ^{Y} for kvadratet av størrelsen Y. Dessuten opererte han med høyere potenser enn 3, noe som i seg selv var nokså revolusjonerende. Tross alt oppfattet de alle tall som lengder, noe som gir alt opp til kubikker en geometrisk betydning. Fjerdepotenser har i denne sammenheng kun en teoretisk betydning. Igjen har vi en av de tunge konseptuelle oppdagelsene, der vårt bilde av matematikk plutselig får en utvidelse med et enormt potensiale.

Diofantus regnet også med minus-tegn. Ikke i form av negative tall, som ikke hadde noen mening på den tiden, men som en del av sine likninger. Han kjente til regneregelen som sier at "minus ganger minus er pluss".

Hans beskrivelser av løsning av likninger dreier seg mye om løsning av flere likninger med flere ukjente. Dersom vi har flere ukjente enn vi har likninger vil slike problemer ofte føre til at vi får uendelig mange løsninger. Diofantus plukker da stort sett ut en bestemt løsning og presenterer løsningsmetoden for akkurat denne løsningen. Siden hans valg er generisk, i den forstand at løsningen kun reflekterer egenskaper til likningen, og ikke spesielle egenskaper til den valgte løsningen, har vi de facto en generell løsning. Et eksempel:

> *Å dele et gitt tall i to tall med en gitt differanse.*

I moderne språkdrakt ville dette bli skrevet, dersom vi setter summen til å være A og differansen til å være B:

$$x+y=A$$
$$x-y=B$$

Diofantus løser problemet for $A=100$ og $B=40$. Han får likningen $2x+40=100$, vi ville sagt ved å legge sammen de to likningene. Nå trekker han fra 40 på begge sider, nøyktig slik vi ville gjort, og deler til slutt på 2. Her ser vi at selv om vi har valgt ut to tall 100 og 40, så er det ingen spesielle egenskaper ved akkurat de to tallene som påvirker løsningsmetoden, og vi kunne egentlig putte inn hvilke tall som helst.

Diofantus løser både lineære og kvadratiske likninger og han beskriver også likninger av høyere grad. Men han gir ikke noen generell metode for å løse disse. Han lister opp noen spesialtilfeller hvor han kan finne en løsning, men generelle formler for slike løsninger lå mye lenger fram i tid.

Kineserne og løsninger av kongruenser

I Kina dukket det opp en anderledes problemstilling som også har med løsning av likninger å gjøre. I de kinesiske kalendrene var det av praktiske og av og til av mer mytologiske grunner, mange fenomener som var naturlig beskrevet med ulike former for sykler. Fullmåne skjer ca. hver 28. dag, solvervene en gang i året, men samtidig hadde de forskjellige sykler på hvilke dyr årene var dedikert til osv. For å beregne alle disse begivenhetene trengte de det som vi i dag ville kalle kongruensregning.

Kongruensregning kan beskrives som regning langs en sirkel, heller en regning på en tallinje. Vi velger oss en grunntall, f.eks. 12. Vi plasserer tallene fra 0 til 11 jevnt fordelt rundt en sirkel og så gjennomfører vi regneoperasjonene ved å telle oss rundt, modulo 12, som vi ville kalle det. For addisjoner som f.eks. 3+4 blir svaret som vanlig 7. Men 7+8 blir ikke lenger 15, siden dette tallet ikke finnes i tallsystemet. Starter vi på 7 og teller 8 videre rundt sirkelen, passerer vi 12 (eller 0) og kommer til 3, siden 8+8=15=12+3. Multiplikasjon foregår på samme måte, 5-gangen vil da se ut som 5, 10, 3, 8, 1, 6, 11, 4, 9, 2, 7, 0, og så begynner vi på nytt. Vi bruker omtrent samme metode når vi legger sammen med tier-overganger, bortsett fra at vi ignorerer tierne og bare ser på hva som skjer på enerplassen.

Kineserne rendyrket denne form for regning og formulerte også mange problemer, både av praktisk, men også av rent teoretisk art.

Her er et eksempel på en problemstilling innen kongruensregning slik kineserne formulerte det:

"Vi har en mengde hvor vi ikke kjenner antallet. Hvis vi teller dem i grupper på 3 får vi 2 til rest, hvis vi teller dem i grupper på 5 får vi 3 til rest og hvis vi teller dem i grupper på 7, får vi 2 til rest. Hvor mange har vi?"

I moderne notasjon ser problemet ut som følger: Vi kaller antalle elementer i mengden for N. Dette tallet må simultant tilfredsstille likningene

$$N=3x+2$$
$$N=5y+3$$
$$N=7z+2$$

for hele tall x, y, z. Den kinesiske matematikeren Sun gir oss svaret *23*, i tillegg til løsningsmetoden: Han observerer at *70* gir oss rest *1* når vi deler på *3*, men er delelig med *5* og *7*. Tilsvarende er *21* delelig med *3* og *7* og har rest *1* når vi deler med *5*, mens *15* har tilsvarende egenskap for *7*, vs. *3* og *5*. Han tar så *70* og ganger med resten *2* fra divisjonen med *3*, *21* og ganger med resten *3* fra divisjonen med *5* og *15* som han ganger med *2* som var resten fra den siste divisjonen. Disse tallene legger han sammen og trekker så fra *105* som er produktet av de tre tallene *3, 5* og *7*. Dersom svaret er større enn *105*, trekker han fra *105* en gang til og det fortsetter han med helt til han kommer under *105*. I vårt til felle blir summen *233*, trekker vi fra *105* to ganger får vi da *23*, som er svaret. Vi lar det være en oppgave å vise at dette faktisk stemmer.

Denne metoden kan skrives ut i stor generalitet og går i dag under betegnelsen "Det kinesiske restteoremet".

Kineserne drev mye med matematikk i den perioden som vi i Europa kaller middelalderen. I tillegg til oppfinnelsen av kongruensregning løste de likninger av høyere grad. Men i likhet med sine arabiske kolleger kom de aldri fram til noen generelle formler for løsning av 3. og 4. gradslikninger. Det var mest spesialtilfeller og i noen tilfeller algoritmer eller regneregler for hvordan man kunne forenkle likningene. Gjennombruddet lot også her vente på seg.

Arabisk hegemoni

Sosio-kulturell bakgrunn

Første halvdel av det sjuende århudrede skjedde det store omveltninger i Arabia, med vidtrekkende konsekvenser. Inspirert av profeten Muhammed og grunnleggelsen av den islamske religion spredde det seg en islamittisk bølge ut over den arabiske verden. Som så ofte i verdenshistorien foregikk spredning av religion parallelt med erobring av nytt land med våpenmakt. I vest kom islamistene helt til Spania, men etterhvert stoppet felttogene opp, delvis fordi motstanden vokste, men også fordi kalifenes rike ble for stort og uhåndterlig. Størrelsen var nok også en viktig grunn til at makten i det store islamistiske riket ble oppdelt, de enkelte kalifene fikk sine områder hvor de hadde herredømme, uten at det fantes noen kraftig sentralmakt, hverken i Damaskus eller senere i Bagdad.

Etter at Bagdad ble etablert som kalifens hovedsete, vokste byen raskt som et knutepunkt, både for handel og for intellektuell virksomhet. Til og begynne med var kalifens rike strengt religiøst, men ganske snart ble den ortodokse religiøsiteten fortrengt av mer verdslige verdier. Rundt år 800 ble det bygd et stort bibliotek og ivrige lærde tok fatt på å samle sammen trykte bøker fra hele den arabiske verden. En god del av denne litteraturen var greske skrifter fra antikken og et stort program for å oversette alt til arabisk ble startet opp. Det ble opprettet et forskningsinstitutt som fikk oppgaven med å drive arbeidet framover og dette instituttet tiltrakk seg flinke folk fra omegnen.

Men instituttet drev ikke bare oversettelsesarbeid. Det ble også drevet matematisk forskning og mye av den gamle greske matematikken ble satt inn i nye kontekster. Islamistiske matematikere utviklet på denne tiden det desimale plasssverdisystemet til også å omfattte desimalbrøker, de systematiserte studiet av algebra og begynte å jobbe med sammenhengen mellom algebra og geometri. Inspirert av arbeidene til Euklid, Arkimedes og Apollonius gjorde de store framskritt innen plan og sfærisk trigonometri.

En liten, men viktig kommentar i forhold til islamistisk matematikk er islamistenes forhold til hellig kontra verdslig kunnskap. Islamistisk kultur så ikke noen motsetning mellom disse to, snarere ble den verdslige kunnskapen sett på som et nødvendig redskap på veien mot hellig kunnskap.

Vi skal se litt nærmere på arbeidene til et par av de islamistiske matematikerne fra denne tiden, Al-Khwarizmi og Al-Khayyami. Disse var begge to innflytelsesrike i sin samtid, men har også satt spor etter seg i matematikkhistorien.

al-Khwarizmi (780-850)

Vi vet lite om livet til Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi, men han levde og arbeidet i Bagdad, hovedstaden i det store islamske riket. Dette riket strakte seg fra Middelhavet til India og ble styrt av en kalif.

Harun al-Rashid ble den 14. september 786, utropt til den femte kalifen i Abbasid, omtrent samtidig med at al-Khwarizmi ble født. Kalif Harun hadde to sønner, den eldste var al-Amin mens den yngste var al-Mamun. Harun døde i 809 og det kom til væpnet konflikt mellom brødrene.

Al-Mamun vant og al-Amin og ble drept i 813. Etter dette ble al-Mamum kalif og hersket over riket. Han stiftet et akademi som ble kalt Visdomens Hus hvor greske filosofiske og vitenskaplige arbeider ble oversatt. Al-Khwarizmi og kollegaene hans, Banu Musa, var lærde i Visdommens Hus i Baghdad. al-Khwarizmi arbeidet med støtte fra al-Mamun, og han tilegnet to av tekstene sine til kalifen. Disse var avhandlingene hans om henholdsvis algebra og astronomi. Algebra *avhandlingen "Hisab al-jabr w'al-muqabala*" var den mest berømte og viktige av alle al-Khwarizmis arbeider. Det er tittelen i denne teksten som gir oss ordet "algebra".

I den første delen av boka er hovedtemaet løsningen av lineære og kvadratiske ligninger skrevet helt og holdent med ord uten bruk av noen symboler. Den andre delen av al-Khwarizmis algebra består av anvendelser og utarbeidede eksempler. Han fortsetter med å se på regler for å finne arealet av figurer slik som sirkelen, og også å finne volumet av legemer slik som kula, kjeglen og pyramiden. Denne delen har mer til felles med hinduistiske og hebraiske tekster enn med noe gresk arbeide. Den siste delen av boken tar for seg kompliserte islamske regler for arv, men krever lite fra den tidligere algebraen annet enn å løse lineære ligninger.

Al-Khwarizmi skrev også betydningsfulle arbeider innen geografi, tidsregning og politisk historie.

Arabiske ord i matematisk språk

Al-Khwarizmis tekster er høyst sannsynlig opphavet til minst tre vanlige ord i matematisk språk. En av de latinske oversettelsene begynner med ordene "*Dixit Algorismi*" eller oversatt "*Al-Khwarizmi sier*". Ordet algorismi ble snart tatt i bruk for ulike aritmetiske operasjoner. Selv om dette egentlig bygget på en misforståelse ble ordet stående og er det direkte opphavet til vårt begrep algoritme.

Et tidlig verk av Al-Khwarizmi bærer den klingende tittelen "*Al-kitab al-muhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala*" som betyr noe slikt som "*Den sammenskrevne tekst om kalkulasjoner ved al-Jabr og al-Muqabala*". Ordet al-Jabr kan oversettes med gjenoppbygging og al-Muqabala med sammenlikning. Det første henspeiler på det å trekke fra noe på den ene siden av likhetstegnet og legge det til på den andre siden. Med det andre menes å trekke fra samme størrelse på

begge sider av likhetstegnet. Å komme fra $3x+2=4-2x$ til $5x+2=4$ er en al-Jabr, mens skrittet videre til $5x=2$ er en al-Muqabala. I latinske tekster fortsatte man å bruke al-Jabr, og det har siden blitt til vårt ord algebra.

Det tredje ordet vi har lånt fra arabisk er ordet siffer. Opprinnelsen er i sanskrit, der "*sunya*" betyr tom. I arabisk oversettelse ble ordet til "*sifr*" som igjen ble opphav til det latinske ordet "*zephirum*". Dette ordet ble igjen stamfar til både det engelske zero, men også til vårt ord siffer.

al-Khayyami (1048-1131)

Al-Khayyami ble født i Nishapur i Iran i 1048, like etter at dette området ble erobret av Seljuk-tyrkerne. Godt støttet av Seljuk-lederne kunne han til bringe mesteparten av sitt liv ved observatoriet i Isfahan, der han jobbet med å reformere kalenderen. Selv under skiftende lederskap klarte han å holde sin posisjon og det sikret han muligheten til drive med intellektuelle sysler, slik som matematikk, astronomi, poesi og filosofi. Hans hovedverk innen matematikk er hans arbeid med 3.grads likninger. Han klarte aldri å finne en generell løsning på problemet, men han skrev optimistisk at "*kanskje andre som kommer etter oss vil klare å fylle dette hullet*".

Mellomspill: Komplekse tall

For å forstå den algebraiske likningsteorien er det nødvendig å introdusere komplekse tall.

For å løse lineære likninger med heltallige koeffisienter dukker de rasjonale tall opp på en naturlig måte. Likningen $2x=3$ har ingen løsninger blant de hele tallene, men jobber vi med rasjonale tall finner vi en løsning, nemlig $x=3/2$. Tilsvarende vil ikke generelle 2.gradslikninger ha noen løsninger blant de rasjonale tall, slik tilfellet er med likingen $x^2=2$. Her trenger vi å innføre flere algebraiske tall, i dette tilfelle kvadratroten av 2.

Imidlertid ser vi raskt at dette ikke er nok, det er ingen slike reelle algebraiske tall som løser likningen $x^2+1=0$. Men igjen kan vi utvide tallsystemet vårt med noen nye tall, slik at vi kan produsere en løsning. Det nye tallet vi trenger å definere er kvadratroten av -1, også kalt i, eller den imaginære enhet. Dette tallet kan vi ikke på noen naturlig måte plassere på den reelle tallinjen. Derimot viser det seg at dersom vi, slik det ble introdusert av nordmannen Caspar Wessel i 1797, plasserer alle tallene i planet, der den reelle tallinjen utgjør den ene aksen og den imaginære enheten utspenner den andre aksen, så har vi en hendig geometrisk framstilling av de komplekse tallene. Formelt har vi da definisjonen av komplekse tall gitt ved alle tall $a+ib$ der a og b er reelle tall og i er den imaginære enheten. Addisjon og multiplikasjon går som vanlig, bare husk på at $i^2=-1$.

I dette bildet får multiplikasjon en helt bestemt geometrisk tolkning. I stedet for å skrive det komplekse tallet z på formen $z=a+ib$ kan vi angi z i såkalte polarkoordinater. Dette innebærer at vi beskriver punktet z i det komplekse planet med et annet tallpar (r,v), hvor r er avstanden fra origo, målt med pytagoras, slik at

$$r^2= a^2+ b^2$$

og v er vinkelen med x-aksen. Et geometrisk argument gir da at

$$sin(v)=b/r \quad \text{og} \quad cos(v)=a/r$$

Multiplikasjon av to komplekse tall gjøres nå ved å multiplisere sammen de to positive reelle tallene r_1 og r_2 og legge sammen de to vinklene.

Italiensk konkurranse om å løse 3.grads likningen

Tiden fra Romerrikets fall fram mot renessansen

Med Romerrikets fall i år 476 gikk Europa inn i en intellektuell døtid. Dette var føydalstatenes tid og politisk markerte det starten på dannelsen av de europeiske nasjonalstatene. Veldig få av småkongene og landlordene kunne lese og skrive, enda mindre hadde de kjennskap til matematikk. Ikke hadde de noe særlig bruk for det heller, godsene var selvforsynt med det meste og det var liten handel.

Men på tross av lav matematisk aktivitet, så hadde middelalderen arvet begrepet *kvadrivium* fra antikken. Kvadrivium, eller aritmetikk, geometri, musikk og astronomi, var nødvendig kunnskap for utdannede menn, selv innenfor den katolske kirken. Og det var her den intellektuelle aktiviteten ble holdt i hevd. De skolene som fantes var koblet til den katolske kirken, og den kanskje viktigste matematiske aktiviteten som foregikk var kalendriske beregninger, og da spesielt fastsettelse av datoen for Påsken.

Rundt år 1000 dukket det opp noen paver med interesse for matematikk, noe som selvfølgelig skulle vise seg å være heldig, sett fra en matematikers ståsted. Spesielt gjaldt dette Pave Sylvester II, med fødenavnet Gerbert d`Aurillac. Han hadde studert i Spania og trolig lært en del matematikk av muslimene. Gerbert reorganiserte Katedralskolen i Rheims og introduserte matematikk som fag. Han introduserte det hindu-arabiske tallsystemet med de *9* sifrene. Tallet *0* var fortsatt fraværende og ble representert med en tom plass. Ingenting tyder på at Gerbert hadde den store forståelsen av muslimenes tallsystem, men han gjorde en hederlig innsats for å bringe matematikken i Europa opp mot fordums storhet.

På denne tiden, ca. 1000-1200, begynte igjen matematiske verker å bli lest i Europa. Ingenting var bevart av europeerne, men via arabiske oversettelser ble de gamle storverkene oversatt, først til spansk og derfra til latin, bl.a. ble Euklids *Elementene* oversatt på begynnelsen av 1100-tallet, likseå al-Khvarizmis verker. Mot slutten av det tolvte århundrede var de fleste av de antikke verkene, og noen av de nyere arabiske, oversatt og sirkulerte blant Europas lærde menn. Så smått begynte den matematiske aktiviteten å ta seg opp, nærmere 700 år etter at det stoppet opp med Romerrikets fall.

En person er det umulig å styre utenom i denne perioden av europeisk matematisk historie. Leonardo fra Pisa, i dag bedre kjent som Fibonacci, reiste mye i sin ungdom i den muslimske verden, og alle steder han var gjorde han alt han kunne for å plukke opp matematisk kunnskap. Resultatet ble en rekke bøker, hvorav *Liber Abbaci* (1202, 1228), *Practica geometriae* (1220) og *Liber quadratorum* (1225) er de mest kjente. Samlet behandlet disse bøkene de som var kjent innen matematikk i den arabiske verden på denne tiden, og de ble en uvurderlig kilde til kunnskap i den europeiske kultursfæren.

Det var også på denne tiden at de første europeiske universitetene ble grunnlagt. En eksakt tidfesting av begivenheten er vanskelig, universitetene ble til, litt etter litt, gjerne drevet fram av studenter som etterspurte en organisert form for undervisning eller som spin-off fra de katolske katedralskolene. De første universitetene ble etablert i Paris, Oxford og i Bologna, og på tross av at universitetenes viktigste oppgaver var å undervise i jus, medisin og teologi, fikk også studentene en innføring i de antikke fagene, triviumet bestående av logikk, grammatikk og retorikk og kvadriumet som altså besto av aritmetikk, geometri, musikk og astronomi. Blant lærebøkene i geometri var Euklids Elementene faktisk den store favoritten, og tilsvarende for Ptolemais Almagest innenfor astronomi.

Også i Norge ble det etablert katedralskoler på 11-tallet, men det førte ikke til noen organisering av noen universitet, det tok over 600 år før det skjedde. Dessverre, får vi kanskje si.

Leonardo fra Pisa (1170-1240)

Leonardo Fibonacci var født i Pisa i Nord-Italia rundt 1170. Han vokste opp i Bejaia i Algerie, der faren ledet et stort handelshus. Han hadde arabiske lærere som ikke bare lærte ham arabisk, men som også ga ham bred innsikt i islamsk kultur og vitenskap. Senere utvidet Leonardo sine kunnskaper på handelsreiser i Nord-Afrika, Midt-Østen og Sør-Europa.

Leonardo forstod tidlig at det indiske tallsystemet som araberne hadde adoptert og videreutviklet, var romertallene overlegent. I "*Liber Abaci*" (1202) gir han en systematisk innføring i de nye regneteknikkene, men til tross for hans overbevisende argumentasjon, skulle det ennå gå flere hundre år før de indisk-arabiske tallene slo igjennom for alvor. Historisk sett er Liber Abaci Leonardos viktigste verk. Det er vanlig å regne Fibonacci som den fremste europeiske matematikeren i middelalderen.

I 1224 ble Leonardo invitert til keiser Fredrik II's hoff i Palermo for å delta i en matematisk turnering. Han vant, og fikk på denne måten innpass i et av tidens mest interessante miljøer. Fredrik II (1194-1250) var tysk keiser, men hans egentlige arverike var "de to Sicilier" som i tillegg til øya Sicilia omfattet det italienske fastlandet fra sørenden til omtrent midt mellom Napoli og Roma. Sicilia hadde opplevd en kulturell oppblomstring etter arabernes erobring på 900-tallet, og i Fredriks tid var riket et møtested for europeisk og arabisk kultur. Leonardo Fibonacci var en av de fremste representantene for det fruktbare møte mellom europeiske og arabiske tradisjoner ved Fredriks hoff.

Leonardo hadde sikkert blitt overrasket hvis han hadde fått vite at han en dag hovedsakelig ville bli husket for *Fibonacci-tallene*; for ham var dette bare ett av de mange eksemplene i Liber Abaci.

Løsning av 3.gradslikning

Mesteparten av historien rundt generelle løsninger av 3. gradslikninger er beskrevet i biografiene til Cardano og Tartagli. Men vi skal likevel knytte noen flere kommentarer til problemet.

Den første som klarte å finne løsningen av en generell 3. gradslikning var Scipione del Ferro (1465-1526). Han var professor ved universitetet i Bologna og hans løsning skriver seg fra tiden mellom 1500 og 1515. På denne tiden fantes det, i mangel på negative tall, 13 forskjellige 3. gradslikninger, avhengig av plasseringen til de ulike leddene, dvs. om koeffisientene var positive eller negative. del Ferro kjente til løsningen av en av disse 13.

del Ferro publiserte aldri sin løsning, og grunnen var sett med datidens øyne helt naturlig. En professorstilling ved et universitet var ikke noen permanent posisjon. Professorene måtte med jevne mellomrom fornye sin tillit hos universitetsledelsen. Slike prossesser foregikk ved at den sittende professoren måtte komkurrere med mulige nye kandidater. Konkurransen gikk ut på at kombattantene stilte opp et sett av oppgaver for hverandre og den som klarte å løse den andres oppgaver, og samtidig visste løsningen på sine egne, hadde vunnet. Dermed var det et stort poeng for del Ferro å holde sin løsning hemmelig, den kunne jo brukes til å sikre hans posisjon i framtidige konkurranser.

Men dermed var jo også trykket fra andre, og særlig yngre matematikere stort for å få utesket hans kunnskap. På slutten av karrieren røpet del Ferro sin oppdagelse for sine to studenter Fiore og della Nave, som da selvfølgelig fikk et klart fortrinn i en hver konkurranse. Men samtidig jobbet Tartaglia også med det samme problemet og i 1535 fant han, uavhengig av del Ferros etterfølgere, løsningen på problemet. Og ikke bare på del Ferros variant av de 13 mulighetene, men på alle 13. Dermed var han kongen på haugen og kunne lett danke ut alle opponenter. Tartaglia var ikke så flink til å holde på hemmeligheter som del Ferro og beruset av sin matematiske fortreffelighet røpet han løsningen til Cardano. Det var kanskje hans livs tabbe, men for den videre utviklingen av likningsteorien var det en gave. Cardano, som sannsynligvis var en mer komplett matematiker enn Tartaglia jobbet videre med løsningene og det er han som i dag bærer navnet til formelen som gir den generelle løsningen, den såkalte Cardanos formel.

Vi kan skrive opp denne formelen. Starter vi med en generell 3. gradslikning kan vi på enkelt vis redusere likningen slik at vi ikke har noe kvadratisk ledd, dvs. likningen vi skal løse kan skrives på formen

$$x^3+px=q$$

Cardanos formel:
Løsningene til likningen

$$x^3+px=q$$

er gitt ved formelen

$$x=a-b$$

hvor

$$a^3=c+q/2 \text{ og } b^3=c-q/2$$

og

$$c^2=(p/3)^3+(q/2)^2$$

Girolamo Cardano (1501-1576)

Det er tre matematikere som får uforholdsmessig stor plass i dette kompendiet. Den første av dem er Cardano. Hans bidrag til matematikken kvalifiserer han absolutt til en plass på lista, men i tillegg er hans liv er som hentet ut fra en roman og kan i seg selv være fornøyelig lesning, Så her kommer *"Historien om Cardano, et liv i kamp!"*

Girolamo eller **Hieronimo Cardano**s var uekte barn av Fazio Cardano og Chiara Micheria. Faren var sakfører i Milano, men han var samtidig en dyktig matematiker, faktisk så dyktig at Leonardo da Vinci brukte han som rådgiver når han hadde geometriske problemstillinger. I tillegg til sakfører-praksisien underviste Fazio i geometri, både på Universitetet i Pavia og på Piatti-stiftelsen i Milano. Godt oppe i femtiårene møtte Fazio Chiara Micheria, en ung enke med tre barn og med store problemer med å få endene til å møtes.

Chiara ble raskt gravid, men før hun skulle føde kom pesten til Milano og hun ble nødt til å forlate byen og finne et tryggere sted. Valget falt på Pavia, hvor hun fant husrom hos noen av Fazios velstående venner. Så Cardano ble født i Pavia. Dog ble gleden hos hans mor forstyrret av sorgen over meldingen om at de tre eldste barna var døde i pesten.

Cardano vokste opp og hans første jobb var som sin fars assistant. Han var imidlertid et sykelig barn og det var ikke så mye hjelp i han. På tross av det hadde han store ambisjoner, å være assistant var ikke noe for den unge Cardano. Han hadde lært litt matematikk hjemme og etter hvert fikk han overtalt sin far til å la han studere ved universitetet i Pavia. Helst ville faren at han skulle studere jus, men Cardano fikk nok en gang viljen sin, og begynte på medisin.

Noen år senere døde faren, men det hadde ikke Cardano tid til å tenke så mye på, han var for sterkt opptatt med å drive valgkamp for seg selv, for å bli valgt til rektor ved universitetet. Han var en kverulant av dimensjoner, ikke så godt likt, men også utadvendt og intellegent og klarte å bli valgt med en stemmes margin. Han beskriver seg selv slik:

Selv oppfatter jeg det slik, at den verste av mine feil, er vanen med alltid å si ting som jeg vet at mine tilhørere misliker. Dette er jeg fullt klar over, likevel fortsetter jeg med det, med fullt overlegg, og med bevisst kunnskap om at det skaffer meg mange fiender.

Som alle andre trengte Cardano penger til å leve for. Med sine gode kunnskaper i sannsynlighetsteori og sin generelt utadvendte livsstil passet det godt å slå seg på gambling. Han spilte kort, terningspill og sjakk og stort sett vant han nok til å underholde seg selv.

Gambling var imidlertid da som nå en noe utrygg virksomhet og Cardano bar da også kniv, for påkomne tilfelle. Minst en gang brukte han den også, på en motstander han mente hadde jukset. Men spillingen ble etter hvert en lidenskap for Cardano og det opptok mye av tiden hans.

I 1525 disputerte Cardano for den medisinske doktorgraden og han sendt inn en søknad om opptak i medisiner-lauget i Milano. Lauget ville egentlig ikke akseptere hans søknad, på tross av hans faglige brillians. Til det var ryktene om at han var en ukonvensjonell, kompromissløs og aggressiv kverulant alt for overveldende. Det at han var et uektefødt barn gjorde ikke saken hans noe bedre.

Cardano tok derfor heller turen til Sacco, en liten landsby 15 km fra Padua og startet en legepraksis der. Til å begynne med uten noen særlig sukssess. Han giftet seg med Lucia, datter av en kaptein i den lokale militisiaen og nabo til Cardano. Dermed ble det flere munner å mette og praksisen ble litt for liten Cardano dro videre til Gallarate, litt nærmere Milano. Igjen søkte han om medlemskap i medesiner-lauget i Milano, og på ny fikk han avslag. Dermed var veien kort tilbake til gamblingen. Nå gikk det ikke så bra og for å skaffe penger måtte Cardano pantsette sin kones juveler og en del av møblene. Det fortsatte å gå nedover og ikke lenge etter havnet ekteparet på fattighuset i Milano.

Men så ble Fazios gamle stilling som geometrilærer ved universitetet ledig og Cardano ble engasjert. Dette ga han en del ledig tid og den benyttet han til å behandle noen pasienter, på tross av at han ikke hadde løyve. Et par av disse pasientene ble som ved mirakler helt friske og igjen steg Cardanos omdømme blant folk. Det at disss mirakelpasientene i tillegg var velstående og innflytelsesrike mennesker var jo ingen ulempe, og Cardano benyttet anledningen til å bygge seg opp et nettverk av støttespillere blant samfunnets topper.

Beruset av framgangen og fortsatt rasende over å ikke bli tatt opp i lauget skrev han i 1536:

"Det som gir en mann mest berømmelse blant leger nå til dags er hans manerer, hans tjenerskap, klær og utseende, alt sammen eksponert på en kunstig og overfladisk måte."

Dette var jo ikke akkurat taktisk klokt og på ny ble hans søknad om medlemskap i lauget avslått. Men Cardano fortsatte å styrke sitt nettverk, han ble stadig mektigere og to år senere turde ikke lauget noe annet enn å velge han inn, etter å ha modifisert reglen som nektet uektefødte barn adgang.

På denne tiden ble også Cardanos to første matematiske bøker publisert, bøker som bar tegn på at større ting var underveis, og som markerte starten på et forfatterskap som skulle omfatte verker innen medisin, filosofi, astronomi og teologi i tillegg til matematikk.

Nå begynte det å gå rykter om at Tartaglia hadde funnet en generell formel for løsning av 3. gradslikninger. Cardano tok kontakt og presset på for å få del i kunnskapen. Av taktiske grunner holdt Tartagli denne hemmelig, men Cardano lykkedes i å få innsikt under forutsetning av at han lovet å holde på hemmeligheten, inntil Tartaglia selv valgte å offentliggjøre sin løsning. Cardano sverget ed på dette:

"Jeg sverger til deg, ved Guds hellige apostler, og som en mann av sann ære, ikke bare at jeg aldri skal publisere oppdagelsene, dersom du lærer meg dem, men jeg lover deg som en sann kristen at dersom jeg skriver dem ned skal det være i kode, slik at etter min død vil ingen være i stand til å forstå hva jeg har skrevet."

Etter å ha fått løsningen jobbet Cardano videre med 3. og 4. gradslikninger i mange år. Ett av de problemene som dukket opp var det at løsningene av og til inneholdt det vi dag kjenner som komplekse tall. Cardano hadde ikke noe matematisk verktøy til å takle dette problemet og han skrev til Tartaglia og ba om hjelp. I sitt brev beskrev Cardano ganske nøyaktig et imaginært tall, selvfølgelig uten at han visste det selv.

Tartaglia svarte tilbake på en hånlig måte og lot som om han viste svaret, noe han definitivt ikke gjorde, men stillingskrigen var i gang.

I 1540 sluttet Cardano i sin lærerjobb ved Piatti-stiftelsen og han ble etterfulgt av sin assistent Ferrari. Ferrari var mannen som på en brilliant måte løste problemet med 4.gradslikningen.

De neste årene tok Cardano igjen opp sin spille-lidenskap, han spilte sjakk hele dagen, men ble etter hvert lei og gikk tilbake til en lærerjobb, denne gang innen medisin.

I denne perioden drev han stadig og skrev vitenskapelig litteratur og i 1545 publiserte han sitt store matematiske verk *Ars Magna*. I dette verket presenterte han løsningene av 3. og 4. gradslikningene og brøt med det sitt løfte til Tartaglia.

Han følte imidlertid at han hadde sitt på det tørre siden han i 1543 hadde fått høre at det ikke var Tartaglia som var opphavsmannen til løsningen, men at han faktisk hadde den fra en annen matematiker, del Ferro. Men på tross av alle "lån" og tjuvtriks, en stor oppdagelse står igjen etter Cardano, nemlig det at han var den første som beskrev komplekse tall, selv om han ikke sa dette i direkte ordelag, indirekte finnes beskrivelsen i *Ars Magna*.

Året etter *Ars Magna* døde Cardanos kone Lucia, uten at dette ser ut til å gå nevneverdig inn på den nå berømte matematikeren. Han var nå for oppslukt av sin egen sukssess. Han ble rektor i det medisiner-lauget han så mange ganger var blitt nektet adgang til og han nøt aktelse som den beste medisineren i verden! Dette førte til at han ble budsendt av alle prominenser i hele Europa, men han takket høflig nei hver gang. Den eneste gangen han tok på seg en slik legejobb var for Erkebiskoben i Skottland. På veien fra Milano til Skottland ble han behandlet med den aller største respekt av alle de vitenskapelige selskapene han besøkte. Til alt hell klarte han å få erkebiskopen på beina igjen, noe som selvfølgelig var en stor fjær i hatten for Cardano. Han ble da også tilbudt jobben som professor i medisin ved universitetet i Pavia. Der hadde han en mengde velstående pasienter og rikdommen hans økte for hver dag.

Men så dukket problemene opp igjen. Cardanos eldste sønn, Giambatista, hadde avlagt sin doktorgrad i 1557 og i hemmelighet giftet seg Brandonia di Seroni, en jente som Cardano omtalte som en verdiløs, skamløs kvinne. Cardano oppfattet det hele som om hun hadde giftet seg med hans sønn ene og alene for å komme inn i en rik, velansett og berømt familie. I tillegg skrøt Brandonia offentlig at hennes mann ikke var far til hennes tre barn. Dette ble for mye for Giambatista. Han tok livet av sin kone med gift, ble arrestert og fengslet. Cardano skaffet de beste sakførerene, men dommeren slo fast at dersom Giambatista skulle få leve, måtte Cardano betale en enorm pengesum til di Seroni-familien. Dette hadde ikke Cardano nok penger til å klare og Giambatistas liv sto ikke til å redde. Før han ble henrettet ble han torturert i fengselet, bl. a. kuttet de av han hans venstre hånd.

Cardano kom aldri over dette tapet. Han la skylden for katastrofen på egne skuldre og bar med seg tragedien resten av sitt liv. I tillegg ble han som faren til en dømt morder, lagt for hat at resten av samfunnet. Cardano bestemte seg for å flytte og heldigvis var det et ledig professorat i medisin i Bologna. Men også her ble det problemer. Cardano var fortsatt like arrogant og selvgod og kom selvfølgelig på kant med resten av lærerstaben. De gjorde alt de kunne for å kaste han ut. Det endte med at han ble fengslet for blasfemi, bl.a. etter å ha publisert et horoskop for Jesus Kristus. Han satt bare inne noen måneder, men da han slapp ut fikk han forbud mot å undervise på universitetet. I stedet dro han videre til Roma, hvor han forunderlig nok ble mottatt med åpne armer av det akademiske samfunn - og av Paven.

I mellomtiden hadde enda en tragedie rammet Cardano. Hans yngste sønn hadde arvet farens lidenskap for spill, men kanskje ikke de samme analytiske evnene. Han tapte masse penger, både sine egne og farens, og da han ikke hadde mer igjen selv, brøt han seg inn i farens hus og stjal penger og juveler. Han ble tatt, fengslet, dømt og til sist utvist fra Bologna.

Cardanno skriver i sin biografi om sine fire store sorger:

"Den første var mitt ekteskap, den andre den bitre død til min sønn, den tredje mine fengselsopphold og den fjerde, den svake karakteren til min yngste sønn."

Det sies om Cardano at han med full klaff forutuså sin egen dødsdag. Men andre sier at han begikk selvmord. Det kan jo hende at begge deler stemmer.

I tillegg til Cardanos store bidrag innen algebra skrev han også store og viktige verk innen sannsynlighetsberegninger, hydrodynamikk, mekanikk og geologi. Hans bok *Liber de Ludo Aleae* er det første skrevne verket innen sannsynlighetsteori. Cardano er også opphavsmannen til den mekaniske koplingen som i dag kalles kardang.

Løsning av 4.gradslikning

Etter at 3.gradslikningen var løst skulle det vise seg at veien var kort til å knekke 4.gradslikningen. Cardanos student Ludvico Ferrari (1522-1565) klarte dette bare få år etter. Cardano tok da også med denne løsningen i sitt store verk *Ars Magna*. Framgangsmåten er å redusere 4. gradslikningen til en 3. gradslikning.

Gitt en generell 4. gradslikning

$$y^4+ay^3+by^2+cy+d=0$$

Ved å sette

$$y=x-a/4$$

får vi likningen over på formen

$$x^4=px^2+qx+r$$

Så legger vi til $2x^2z+z^2$ på begge sider av likhetstegnet og får

$$x^4+2x^2z+z^2 =px^2+qx+r+2x^2z+z^2$$

Høyresiden er nå et kvadrat

$$(x^2+z^2)^2$$

og det sammen gjelder venstresiden

$$(p+2z)(x^2+qx/(p+2z)+(r+z^2)/(p+2z))$$

dersom vi antar at

$$(q/(2p+4z))^2=(r+z^2)/(p+2z)$$

Men dette er det samme som

$$(q/2)^2=(r+z^2)(p+2z)$$

som er en 3. gradslikning. Denne løser vi mhp. z og setter inn og vi ender opp med en kvadratisk likning som vi så løser.

Cardano viet ikke denne løsningen mye plass i sin *Ars Magna*. Ikke bare fordi han ikke selv var opphavet til denne elegante løsningen, den viktigste grunnen angir han selv i dette sitatet:

"Selv om en rekke regler kunne blitt tilføyd og lange drøftinger tatt med om dem, så avslutter vi vår detaljerte framstilling med 3. gradslikningen. Andre likninger vil bare bli nevnt i forbifarten. For mens posito refererer til en linje, quadratum til en flate og cubum til et legeme, så ville det være tåpelig av oss å gå ut over dette. naturen tillater det ikke."

Tartaglia (1499-1557)

Nicolo Tartaglia var født i Brescia i 1499 som sønn av en postrytter. Som ung gutt ble han hardt skadet i krigen mot franskmennene, noe som førte til at han fikk problemer med å snakke, derav tilnavnet Tartaglia, stammeren.

Det var del Ferro som var den første som fant en algebraisk løsning på 3.gradslikningen, men han sa det aldri til noen andre enn sin student Fior som fikk overbrakt hemmeligheten på del Ferros dødsleie. Fior begynte å skryte av sin nyervervede kunnskap og det endte med at det ble arrangert en konkurranse mellom han og Tartaglia. Siden datiden ikke hadde noen kjennskap til negative tall var 3.gradslikningene inndelt i klasser, etter tegnene på koeffisientene. Fior kunne dessverre bare løsningen på en bestemt type likning og i kampens hete forsto plutselig Tartaglia hvordan han skulle løse problemet i stor generalitet og han vant da også konkurransen overlegent.

Dessverre for Tartaglia dukket Cardano opp i hans liv på omtrent dette tidspuktet. Cardano var selvfølgelig ute etter hemmeligheten med løsning av 3.gradslikninger. Tartagli ville ikke gi han løsningen, men etter at Cardano fristet med å bruke sine kontakter til å skaffe Tartaglia en god stilling, ga han etter. Men Cardano måtte love å holde tett om hemmeligheten. Det gjorde han også en lang stund, men av flere grunne valgte han etter noe tid å offentliggjøre løsningene, noe Tartaglia satt lite pris på.

Tartaglia kom seg aldri helt etter dette, han skrev riktignok en del vitenskapelige verker og oversatte en del av antikkens storverk, men ingen av hans arbeider kom opp mot løsningen av 3.gradslikningen. Han døde da også som en relativ fattig og nedbrutt mann.

Ferrari (1522-1565)

Lodovico Ferrari kom i kontakt med Cardano som fjortenåring, da han begynte som tjener i det Cardanske hjem i Bologna. Cardano oppdaget raskt at gutten hadde matematiske talenter og han ansatte han som assistant og begynte å undervise han. Ferrari hjalp til gjengjeld Cardano med skrivingen av sine bøker og på denne måten kom det til et langt og fruktbart samarbeid. Det endte med at Ferrari overtok Cardanos stilling da han etter mange år trakk seg tilbake.

Ferrari er kjent som den første som fant løsningen til en generell 4.gradslikning. Han ble professor i matematikk i Bologna i 1565, men døde senere samme år.

Siden vi ikke har noe bilde av Ferrari, får vi nøye oss med en moderne navnebror.

5.gradslikning kan ikke løses ved rotutdragning

Hv betyr det at likningen ikke kan løses

Overskriften på dette kapitlet er "*5.gradslikninger kan ikke løses ved rotutdragning*". Det er ikke umiddelbart helt klart hva dette betyr. Algebraens fundamentalsetning sier jo nettopp at dersom vi utvider til de komplekse tall så kan alle likninger løses. Forskjellen er dette mystiske ordet rotutdragning.

Hver gang vi har gitt en likning av grad mindre enn eller lik *4*, så kan vi finne en formel som gir oss løsningene. Denne formelen tar utgangspunkt i koeffisientene i likningen, f.eks. tallene *1, 3, 2, -7* og *5* i likningen

$$x^4+3x^3+2x^2-7x+5=0$$

Disse tallene skal nå settes inn i en formel som er laget ved hjelp av de fire regnearter pluss alle mulige røtter, kvadratrøtter, tredjerøtter, fjerderøtter, etc.

Et velkjent eksempel på en slik formel er formelen for løsning av en 2.gradslikning.

$$ax^2+bx+c=0$$

har løsning

$$x=(-b\pm D)/2$$

hvor

$$D^2=b^2-4ac$$

Abels resultat sier at det ikke er mulig å lage en slik formel for en helt generell 5.gradslikning, eller likninger av høyere grad. Det betyr ikke at ikke det finnes 5. gradslikninger der vi kan skrive opp løsningene på denne måten, men disse er spesielle. For en generell likning lar det seg ikke gjøre.

Abel (1802-1829)

Niels Henrik Abel ble født på Finnøy i Rogaland der faren, Søren Georg Abel, var sogneprest. Tre år tidligere hadde familien flyttet fra Gjerstad i Aust-Agder der Søren Georg hadde vært kapellan under sin far, Hans Mathias Abel. I 1803 døde Hans Mathias, sønnen overtok sogneprestembedet, og familien flyttet tilbake til Gjerstad. Også for Abels mor var dette en hjemkomst — hun var født Anne Marie Simonsen og var datter av en velstående kjøpmann og skipsreder i Risør, rett ved Gjerstad.

Både Abels far og bestefar var sterkt interessert i sine bygdebarns liv og utvikling, men på hver sin måte. Mens Hans Mathias Abel hadde vunnet deres tillit gjennom et langsomt og tålmodig arbeid, var Søren Georg langt mer idérik og tiltaksom, men også oppfarende og rastløs. Til å begynne med kom han godt ut av det med bygdefolket, men etter hvert mistet han mye av sin popularitet. Én av grunnene var kanskje at hans blikk var rettet ut av bygda — han ble innvalgt på Stortinget i 1814 og igjen i 1818 — men en viktigere grunn var nok at hans tiltagende alkoholmisbruk gjorde ham mistroisk og humørsyk. Hans politiske karriere endte i skandale da han i 1818 holdt på å bli stilt for riksrett etter å ha kommet med ubegrunnede beskyldninger mot en statråd fra Stortingets talerstol. Syk og nedbrutt trakk han seg tilbake til Gjerstad der han døde to år senere, bare 48 år gammel.

Niels Henrik var den nest eldste av seks søsken, fem brødre og en søster. Han ble først undervist hjemme av faren, men tretten år gammel dro han sammen med den eldre broren til katedralskolen i Christiania. I begynnelsen gjorde han det godt på skolen, men etter hvert ble karakterene dårligere og bare i matematikk holdt de seg rimelig bra. I sekstenårsalderen kom omslaget ved en tilfeldighet — den gamle, tyranniske matematikklæreren fikk avskjed etter å ha prylt en elev som senere døde, og hans erstatter var den unge og entusiastiske Bernt Michael **Holmboe**. Det tok ikke lang tid før Holmboe oppdaget Abels talent, han lånte ham bøker, og i løpet av et par år slukte den unge Niels Henrik alt han kom over av tidens ledende matematikere. Holmboe var overbegeistret og skrev i skolens protokoll at hvis Abel får leve, vil han bli *verdens fremste matematiker*, men mer forsiktige sjeler fikk endret formuleringen til *en stor matematiker*. Matematikkinteressen hjalp imidlertid ikke stort på innsatsen i andre fag, og bortsett fra karakterene i aritmetikk og geometri (som begge var den best mulige "1 med slange"), var det langt mellom lyspunktene på artiumsvitnemålet.

Våren 1821 fikk professor Carl Ferdinand Degen ved universitetet i København et brev fra Christopher Hansteen, professor i anvendt matematikk ved det knapt ti år gamle Kongelige Frederiks Universitet i Christiania. Brevet inneholdt et manuskript av en attenårig gymnasiast som mente han hadde funnet en løsningsformel for den generelle femtegradsligningen. I likhet med sine kolleger i Christiania kunne ikke Degen finne feil ved utledningen, men han var likevel skeptisk og ba forfatteren prøve metoden på noen eksempler. Det viste seg fort at formelen var gal, men Degen var tilstrekkelig imponert av den unge matematikeren til å oppfordre ham til å fortsette sine undersøkelser, men fortrinnsvis med andre temaer:

"Neppe kan jeg ved denne Anledning undertrykke det Ønske at den Tid og de Aandskrefter som et Hoved, som Hr. Abel, skjenker en i mine Øine noget steril Gjenstand, måtte ydes et Emne, hvis Uddannelse vil have de vigtigste Følger for hele Analysen og dens Anvendelse paa dynamiske Undersøgelser, jeg mener de elliptiske Transcendenter. Ved tilbørligt Anlæg for Undersøgelser av dette Slags vil den alvorlige Gransker ingenlunde blive staaende ved disse ellers i og for seg selv høyst merkværdige Funktioners mange og smukke Egenskaper, men oppdage maghellanske Gjennemfarter til store Partier af eet og samme uhyre analytiske Ocean."

Niels Henrik Abel skulle følge Degens råd om å studere elliptiske integraler, men han skulle også ufortrødent fortsette sine studier av algebraiske ligninger. På begge områder kom han til å gjøre gjennombrudd som Degen knapt kunne ha drømt om, og som med full rett kan

sammenlignes med Magellans dristige seilas gjennom et trangt strede og ut i det mektige Stillehavet. Fra Abels og Galois´ undersøkelser om algebraiske ligninger stammer store deler av den moderne algebraen, og fra Abels og

Jacobis studier av elliptiske funksjoner vokste en rik teori som kom til å danne bro mellom algebra, geometri og analyse.

Høsten 1821 ble Abel student ved universitetet. I matematikk var det ingen som lenger hadde noe å lære ham, men på andre områder så fremtiden langt fra lys ut — faren var død året før, den eldste broren var uhelbredelig sinnsyk, og moren var presteenke med fire mindreårige barn og en liten pensjon. En stund håpet man på arven etter bestefar Simonsen i Risør, men da han døde var formuen gått tapt i nedgangstiden etter Napoleonskrigene. Hele sitt liv skulle Abel være avhengig av stipender, tilfeldige vikariater og ulike former for privat understøttelse. Mens andre studenter ventet på pengeforsendelser hjemmefra, måtte han dele sine inntekter så godt han kunne med mor og søsken.

Abels første arbeider ble trykt i det nye, norske *"Magazin for Naturvidenskap"* i 1823. De var ubegripelige for de aller fleste abonnentene, men de styrket hans omdømme i universitetskretser og var medvirkende til at Norges første professor i matematikk, Søren Rasmusen, forærte ham 100 spesidaler så han kunne dra til København og møte danske kolleger. Matematisk ble ikke reisen av så stor betydning, men for Abel personlig var den desto viktigere — på et ball traff han den unge Christine (Crelly) Kemp som han ble så inntatt i at han bød henne opp til tross for at han ikke kunne danse. Heldigvis var ikke hun stort bedre, og lattermilde måtte de forlate dansegulvet sammen. Året etter bragte han henne til Norge, til en guvernantestilling i Son, og kort etter forlovet de seg.

Også matematisk var 1824 et betydningsfullt år for Abel. Til tross for Degens råd hadde han fortsatt arbeidet med algebraiske ligninger, og nå greide han å vise at det var umulig å løse den generelle femtegradsligningen ved hjelp av rotutdragning. Det var en sensasjonell løsning på et problem matematikerne hadde strevd med i over 350 år, og Abel fikk artikkelen trykt og innbundet for egen regning. Den skulle være hans introduksjon til matematikerne på kontinentet — han hadde nemlig fått et stipend for å dra utenlands i to år.

Sommeren 1825 dro han av sted i følge med fire andre unge og håpefulle vitenskapsmenn — geologene Baltazar Mathias Keilhau, Nicolai Benjamin Møller og Nils Otto Tank samt medisineren og veterinæren Christian Peter Boeck. Abel trivdes best sammen med andre, og isteden for å konsentrere seg om de store matematiske sentrene i Berlin, Göttingen og Paris som opprinnelig var planen, ble han med kameratene på deres rundreise i Europa. De dro til Berlin, Dresden, Wien, Graz, Praha, Trieste, Venezia, Padua, Bolzano, Innsbruck, Zürich og Basel før Abel omsider satte kursen mot Paris. Det er fra denne tiden vi kjenner Abel best. Mange av hans brev er bevart, og i dem tegner han et levende bilde av seg selv og sine venner.

Med en slik rundreise ble det ikke mange møter med store matematikere før han kom til Paris, men Abel arbeidet utmerket på egen hånd, og i Berlin hadde han gjort et viktig bekjentskap. August Leopold **Crelle** var en fremstående bygningsingeniør, men matematikk var hans store lidenskap. Da Abel kom til Berlin, syslet Crelle med tanken på å starte et tidsskrift for matematikk, og han håpet å knytte til seg så mange unge og talentfulle matematikere som mulig. Til tross for Abels språkproblemer skjønte Crelle raskt at han her sto overfor en usedvanlig begavelse, og han skulle bli en uvurderlig hjelp og støtte gjennom hele Abels karriere. Mange av Abels fremste artikler ble trykt *i "Crelles Journal"* som tidsskriftet fort ble kalt (egentlig heter det "*Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*" og eksisterer den dag idag).

Paris var det store matematiske samlingspunktet på denne tiden, men Abel skulle raskt erfare at det ikke var så lett å komme i kontakt med parisermatematikerne. Han hadde med seg et trumfkort — en avhandling om det som senere har fått navnet Abels addisjonsteorem, og som ofte regnes som hans aller største oppdagelse. Han leverte avhandlingen til vitenskapsakademiet der den skulle vurderes av ledende matematikere som **Fourier**, **Legendre** og **Cauchy**. Men det kom aldri noe svar "*fra disse langsomme Mænd"* som Abel selv kalte dem i et brev til Holmboe. Avhandlingen var og ble borte, og hovedresultatet ble bare kjent gjennom en forkortet versjon som Abel skrev på dødsleiet. Først i 1841 ble den opprinnelige artikkelen publisert etter stort påtrykk fra Jacobi og andre.

Tiden i Paris var ensom og fattigslig, og Abel var lykkelig da han igjen kunne sette kursen hjemover. Men hjemkomsten bød på nye problemer — reisestipendet gikk ut i det øyeblikket han satte foten på norsk jord! Finansdepartementet nedla veto mot et forslag om å forlenge stipendet, og det så mørkt ut inntil Abel omsider ble utnevnt til vikar for Christopher Hansteen under dennes ekspedisjon til Sibir. For å tilbakebetale sin egen og familiens gjeld måtte han i tillegg gi privatundervisning i matematikk til skoleelever. Ironisk nok skyldtes noe av gjelden et årlig beløp som Søren Georg Abel hadde lovet universitetet da det ble opprettet i 1811, og som enken ikke hadde maktet å betale. Universitetet nektet å slette gjelden, men gikk med på at den skulle tilbakebetales i rater i påvente av at Abel fikk en fast stilling.

De siste årene i Norge ble en rik tid vitenskapelig sett. Det var nå Abel kastet seg over de elliptiske funksjonene i full bredde. Samtidig var en ung, tysk matematiker, Carl Gustav Jacobi (1804-1851), kommet på sporet av de samme ideene. Det ble et opprivende kappløp som først ble avsluttet med Abels død.

Sommeren 1827 vendte også Crelly Kemp tilbake til Norge. Hun hadde fått en stilling på Froland Verk utenfor Arendal. Det var ingen tilfeldighet; eieren, Sivert Nicolai Smith, var en gammel venn av Abels far. Julen 1828 kom Abel på besøk til Froland. Etter nyttår fikk han kraftige blodstyrtninger. Han hadde tuberkulose og ble fort svakere. Den 6. april døde han på Froland. To dager senere skrev Crelle et gledesstrålende brev fra Berlin — han hadde omsider skaffet Abel et professorat ved universitetet der.

Niels Henrik Abel ble gravlagt på Froland Verk. Crelly Kemp giftet seg noen år senere med hans gode venn og reisekamerat, Baltazar Mathias Keilhau. I 1839 utkom Abels samlede verker redigert av hans tidligere lærer Bernt Michael Holmboe.

I sitt korte liv ga Abel vesentlige bidrag til tre sentrale deler av matematikken —

algebraiske ligninger, elliptiske funksjoner og uendelige rekker.

Permutasjoner av røtter

Abels bevis for uløsligheten av 5. gradslikningen og også Galois sine arbeider bygger på ideer fra Lagrange. Etter at de italienske matematikerne Tartaglia, Cardano og Ferrari hadde presentert sine formler hadde flere jobbet med algebraiske likninger, men det var Lagrange som kom med de mest banebrytende ideene.

Lagrange var interessert i hvorfor man kunne finne formler, hva var sammenhengen mellom de ulike røttene som dukket opp?

Det var nå godt kjent at løsningene til likninger med heltallige koeffisienter ikke var rasjonale tall, ja ikke en gang reelle. Med dagens terminologi ville vi si at vi må utvide de rasjonale tallene til et større tallsystem før vi kan finne røttene, slik vi må utvide med kvadratroten av *2* for å kunne løse likningen

$$x^2-2=0$$

En 3.gradslikning har normalt tre forskjellige røtter. Nå kan vi utvide de rasjonale tall med disse tre røttene og se hva vi får, når vi samtidig krever at vi fortsatt skal kunne addere og multiplisere som før. I hvert eksempel han studerte fant Lagrange at han på denne måten kom fram til 6 nye tall, og som tilfredstilte en 6. gradslikning. Løsningene til den opprinnelige likningen fant han at måtte kunne skrives som summer av de nye løsningene. Men så snudde han problemet opp ned og prøvde å finne alle de 6 nye tallene fra de opprinnelige 3 løsningene. Det han observerte var at hvis han uttrykte ett av de seks tallene på denne måten, så kunne han finne de andre ved å permutere, eller bytte om på, de tre opprinnelige løsningene. På denne måten fikk han knyttet sammen studiet av løsninger av en algebraisk likning med mengden av permutasjoner av tre symboler. Når han prøvde seg fram med 4. gradslikninger observerte han nøyaktig samme fenomen og konsekvensen var at han kunne gi en teoretisk beskrivelse av Cardano og Ferraris formler. Lagrange prøvde selvfølgelig å gjøre det samme for 5. gradslikningen, men det fikk han av for han uforståelige grunner ikke til. I dag vet vi hvorfor han ikke fikk det til, det var nøyktig det Abels bevis for uløsligheten av 5. gradslikningen var basert på.

Hvis vi skal prøve oss på en meget forenklet forklaring, så må det være noe slikt: Det finnes 6 permutasjoner av 3 elementer, vi kan skrive de som *123, 132, 213, 231, 312, 321*. F.eks. så betyr *213* at vi setter *2* på *1* sin plass og beholder *3*. Blant disse permutasjonene finnes det tre som vi sier har orden 3, nemlig *213, 231, 312.* Disse permutasjonene har ingen tall på rett plass! Nå kan vi bygge opp alle permutasjoner ved å sette sammen en slik orden-3-permutasjon med en orden-2-permutasjon. Siden permutasjonene henger sammen med hvordan vi kan beskrive de tre løsningene ved hjelp av "utvidede" tall viser det seg at det er denne splittingen i en 2-permutasjon og en 3-permutasjon som gjør at Cardanos formel inneholder en tredjerot av en kvadratrot.

Tilsvarende finner vi for 4. gradslikninger, men da må vi se på permutasjoner av elementene *1234*. I prinsippet kan vi gjøre akkurat det samme, nemlig bygge opp alle de 24 permutasjonene på en helt spesiell måte. Poenget, som Abel viste, er at for permutasjoner av fem elementer *12345*, så går ikke dette. Vi kan ikke på en universell måte (dvs. på samme måte for alle permutasjoner) bygge opp permutasjonene av orden-5-permutasjoner, orden-4-permutasjoner, osv.

Galois (1811-1832)

Evariste Galois sin far Nicholas Gabriel Galois og hans mor Adelaide Marie Demante var begge høyt utdannede akademikere, men ingen av dem hadde spesielle evner i matematikk. Faren var en størrelse i lokalmiljøet og ble i 1815 valgt til borgermester i Bourg-la-Reine i Paris. Denne tiden var en brytningstid i Frankrike, startet av stormen på Bastillen i 1789 og etterfulgt av relativ stor politisk uro. Det var mange som satt i fengsel for sine meningers skyld, og på det nasjonale plan raste Napoleonskrigene over Europa.

Galois hadde etter hvert kommet inn på Lycée de Louis-le-Grand. Dette var i 1823 og allerede i den første terminen hans opplevde han opptøyer ved skolen. 40 elever ble utvist, men Galois var ikke blant dem. Han var stort sett en meget flink og pliktoppfyllende elev som fikk gode skussmål.

I februar 1827 kom det store vendepunktet for den unge Galois. Da ble han for første gang presentert for avansert matematikk og det var fulltreff fra første stund. Men på denne tiden begynte også Galois å få mer negative kritikker. Han ble omtalt som en einstøing, bisarr, orginal og lukket. Spesielt er den interssant at en av verdenshistoriens mest originale matematikere faktisk ble kritisert av skolen for å være original. Den eneste som ga han fortsatt gode skussmål var matematikklæreren hans.

I 1828 forsøkte han uten hell å bli tatt opp École Polytechnique. På denne tiden var dette det ledende universitetet i Paris og Galoios hadde helt sikkert en akademisk begrunnelse for å søke, men han kan også ha hatt en politisk baktanke siden skolen var kjent for sin sterke politiske aktivitet. Og den unge Evariste var en glødende republikaner.

Tilbake på Louis-le-Grand, fortsatte Galois sine matematikkstudier, mye på egenhånd og i april 1829 fikk han publisert sitt første matematiske arbeid. Han fortsatte å skrive og senere samme vår sendte han inn to nye arbeider til vurdering.

Men den sommeren skjedde også noe annet som skulle få stor betydning i Evaristes liv. Pga en skandale i det lokale politiske liv valgte borgermester Galois å ta sitt eget liv. Dette gikk naturlig nok sterkt inn på Evariste og spilte nok inn i forhold til at han heller ikke ved andre gangs forsøk kom inn på École Polytechnique. Men noe av grunnen var nok også at Galois ikke var noen stor kommunikatør av sine dype matematiske ideer.

Dermed ble det det litt mindre prestisjefylte École Normale for Galois og han klarte greit opptaksprøven, på tross av litt varierende rapporter: Hans matematikklærer skrev

"Denne eleven har av og til en litt merkelig måte å presentere sine ideer, men han et intellegent og har et oppsiktsvekkende forskertalent."

mens litteraturlæreren skrev

"Dette er den eneste eleven som har svart under enhver kritikk, han kan absolutt ingenting.
Noen fortalte meg at han hadde et ekstraordinært talent for matematikk. Det overrasker meg veldig, for etter denne eksaminasjonen ville jeg trodd at han var mindre begavet."

Galois fortsatte å jobbe med løsning av likninger. Han leste Abels arbeider i *Bulletin de Férussac* og innså at denne ukjente nordmannen hadde gjort mye av de samme tingene som han selv var interessert i. Dette inspirerte han til å utvikle teorien videre. Ved siden av arbeidet med løsning av likninger jobbet han også med elliptiske funksjoner og abelske integraler, og fortsatte på mange måter der Abel slapp. Imidlertid fikk han ikke den store prisen fra det franske Akademiet, slik han hadde håpet. Den prisen ble delt mellom Abel, posthumt og Jacobi.

Så kom revolusjonen i 1830. Det var opptøyer i gatene i Paris og direktøren ved École Normale, M. Guigniault, stengte portene for å hindre at studentene deltok. Galois prøvede å klatre over murene, men klarte det ikke og opprørerne måtte klare seg uten han denne gangen. Imidlertid skrev den unge Galois et glødende leserinnlegg i *Gazette des Écoles*, som et tilsvar til direktørens forsøk på å forsvare sin handling. Det endte selvfølgelig med at Galois ble utvist fra skolen og han sluttet seg umiddelbart til Nasjonalgarden, en republikansk gren av militsen. Nyttårsaften 1830 ble Nasjonalgarden forbudt av Kongen og Galois var blitt en politisk trussel mot det bestående samfunnet.

Galois svarte med å organisere sin egen skole for matematikk, uten noe særlig hell. Samtidig skrev han noen små matematiske arbeider som også ble publisert, de siste fra hans hånd.

Han fortsatte å støtte den nå forbudte Nasjonalgarden og under en stor fest for å feire løslatelsen av 19 arresterte offiserer dro han sitt sverd og kom med utvetydige trusler mot Kongen. Dermed ble han selv arrestert, men slapp ut ganske raskt, selv om han faktisk opprettholdt truslene fra tiltaleboksen.

Den 14. juli ble Galois på ny arrestert. I fengselet fikk han brev fra Akademiet som på tross av oppmuntrene formuleringer hadde refusert hans manuskript. Livet begynte å falle litt sammen for den ennå unge Evariste og han forsøkte å ta sitt eget liv. Det klarte hans medfanger å forhindre og like etter ble han overført til et annet fengsel, hovedsakelig på grunn av en koleraepidemi som herjet Paris. Her ble han i sin nokså mentale ubalanse forelsket i datteren til fengselslegen og etter løslatelsen den 29. april 1832 drev han en intens kurtise. Dessverre var det også andre som var interessert i den vakre Stephanie-Felic og Galois ble utfordret til duell.

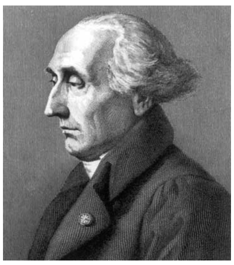
Det er spekulert i om duellen var arrangert fra myndighetenes side, for å kvitte seg med en brysom rebell, men det kan like gjerne ha vært et utslag av fransk lidenskap og dramaturgi.

Kvelden før duellen satt Galois seg ned å skrev ned alle sine tanker. Myten sier at det var denne kvelden Galois-teorien ble til, men det er nokså usikkert om det er den hele og fulle sannhet.

Uansett, Galois ble såret i duellen og hans opponent etterlot han dødende. Han ble funnet og brakt til et sykehus, men livet stod ikke til å redde. Galois døde den 31 mai 1832, i sitt 21. år. Han ble begravet to dager senere og hans død førte til nye opprør i Paris.

Evaristes bror og hans venn Chevalier tok hånd om hans etterlatte manuskripter og sendte dem til Gauss, Jacobi og flere andre, men det skulle ta mange år før de ble publisert. Ikke før i 1843, 11 år etter hans død, fikk verden kjennskap til hvilke geniale arbeider denne unge rebellen hadde produsert. I dag kjenner vi hans teori som Galois-teori, en teori som forener teorien for tallkropper med gruppeteori, via automorfier av løsningene til enkle polynomer. En teori som er blant de vakreste matematiske byggverk som noensinne er blitt til.

Lagrange (1736-1813)



Joseph Louis Lagrange kom fra en fransk familie, men han var født i Torino i Nord-Italia. Bare 19 år gammel ble han professor ved militærakademiet i hjembyen, men han følte seg etter hvert vitenskapelig isolert i Torino, og da **Euler** i 1766 flyttet til Sankt Petersburg, overtok Lagrange hans stilling ved akademiet i Berlin. Etter Fredrik den stores død i 1786 flyttet Lagrange videre til Paris, tre år før den franske revolusjon. I motsetning til mange av sine kolleger, kom den stillfarne og tilbakeholdne Lagrange gjennom den franske revolusjonen uten altfor mange dramatiske opplevelser, men de stadige stridighetene og den vilkårlige terroren gjorde et sterkt inntrykk på ham. I 1792 giftet han seg med den 17 år gamle Renée Lemonnier som hjalp ham å komme over fortvilelsen og svartsynet som ofte plaget ham. Etter den franske revolusjonen var Lagrange med på å bygge opp École Polytechnique til Frankrikes ledende utdannelses-institusjon for ingeniørfag og naturvitenskap.

Lagrange var Eulers eneste konkurrent som tidens største matematiker. Som Euler arbeidet han i alle deler av matematikken og satte spor etter seg over alt. I **algebraen** var han en av **Abels** og **Galois'** nærmeste forløpere og inspirerte dem begge, i **tallteorien** viste han at ethvert helt tall kan skrives som et sum av fire kvadrattall, i **analysen** videreførte han **variasjonsregningen** og ga betydelige bidrag til teorien for **differensialligninger**. Men hans aller betydeligste innsats finner vi nok i mekanikken der hans *"Mécanique analytique"* fra 1788 gir en omforming av **Newtons** ideer som har vist seg uhyre fruktbar. Lagrange har et betydelig navn som astronom, og han interesserte seg også for kjemi og religionsfilosofi

Andre sider ved likningsteori, sammenhengen med geometri

Hva er algebraisk geometri, løsning av likninger som et geometrisk bilde

Algebraisk geometri knytter på en vakker måte sammen algebra og geometri. Gitt en algebraisk likning i to variable x og y, f.eks. $x^2+ y^2-1=0$. Vi er interessert i å finne løsningene til denne likningen. En løsning består at et par av tall (x,y). Dersom vi plasserer hvert av tallene på en tallinje, vil tallparet på en naturlig måte korrespondere til et punkt i planet. I dette tilfellet får vi en hel kurve av punkter i planet som tilfredsstiller likningen. Denne kurven kalles løsningskurven til likningen, og det er klart at vi kan gjøre dette både for mer kompliserte likninger og eventuelt for likninger i flere variable. Det siste vil gi oss romkurver, flater, etc.

Historien sier at det var to sentrale matematiske tenkere som sto bak denne nye tilnærmingen til geometri, Descartes og Fermat. De hadde begge en forståelse av den beskrevne sammenhengen mellom en geometrisk kurve og en algebraisk likning i to variable. Men de hadde litt ulik tilnærming til problemet. Fermat startet alltid med en algebraisk likning og beskrev ut i fra den en geometrisk kurve. Descartes var på sin side mer interessert i geometri og startet derfor med det geometriske objektet og forsøkte å produsere en likning som beskrev det geometriske objektet. Descartes ble av denne grunn tvunget inn mot mye mer kompliserte likninger enn Fermat.

Moderne algebraisk geometri er en syntese av Descartes og Fermats synspunkter, av og til kommer geometrien først, av og til algebraen.

Algebraens fundamentalsats

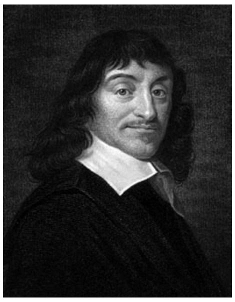
Innenfor rammene av likningsteorien er det tvingende nødvendig å snakke noen ord om algebraens fundamentalsats. Det er to klare problemstillinger knyttet til en polynomial likning av en gitt grad. Den ene er Abels, kan vi eller kan vi ikke finne en generell formel som beskriver løsningene til en likning av en gitt grad, uttrykt ved koeffisientene i likningen?

I den andre tilnærmingen er vi ikke så interessert i formler, vi er mer opptatt av spørsmålet, hva må vi kreve av tallsystemet vårt for at vi skal være sikker på å ha minst en løsning?

Svaret på det siste spørsmålet er de komplekse tall, det forsikrer algebraens fundamentalsats. Den sier at dersom vi jobber over de komplekse tallene, så har enhver polynomial likning en løsning. Løsninger svarer til lineære faktorer av typen x-a. Det betyr at når vi starter med en likning, så finnes det et lineært ledd x-a som er en faktor i det opprinnelige polynomet. Nå kan vi faktorisere ut dette lineære leddet x-a og vi får et nytt polynom. Dette polynomet har igjen en løsning, som vi så kan faktorisere av, osv. På denne måten vil et hvert polynom av grad n med komplekse koeffisienter faktorisere i n lineære ledd.

Descartes (1596-1650)

René Descartes ble født i La Haye (som nå kalles La Haye-Descartes) litt sør for Tours midt i Frankrike. Han fikk en fremragende utdannelse i en jesuitterskole og studerte senere i Poitiers. I flere år reiste han rundt i Europa, dels som privatperson og dels som frivillig i forskjellige arméer, inntil han



i 1628 trakk seg tilbake til Nederland for å skrive og studere. Vandreårene hadde bragt ham i forbindelse med lærde over store deler av Europa, og gjennom sin korrespondanse med dem skaffet han seg fort ry som en av tidens skarpeste tenkere.

I 1637 utkom René Descartes' (1595-1650) *"La Géométrie"* som et tillegg til hans filosofiske hovedverk *"Discourse de la méthode"*. Dette arbeidet sammen med *"Ad locos planos et solidos isagoge"* av Pierre de Fermat som utkom samme året, markerer begynnelsen på den analytiske geometrien. Her blir algebraiske metoder brukt til å definere og studere geometriske objekter. Etter Descartes kalles et rettvinklet koordinatsystem kartesisk.

Descartes var mer filosof enn matematiker, men han hadde tidlig fattet interesse for matematikkens deduktive metode, og et av hans mål var å overføre dette tankesettet til andre kunnskapsområder. Han forsøkte å bygge opp sin filosofi fra det umiddelbart fattbare *("jeg tenker, altså er jeg")* ved hjelp av strengt logiske resonnementer. La Géométrie var tenkt som en anskueliggjørelse av denne metoden — her skulle geometrien tilbakeføres til algebraen.

Descartes' metodesyn fikk stor innflytelse innenfor både filosofi og naturvitenskap, og hans bidrag til fysikken ble en inspirasjonskilde for Newtons mekanikk noen tiår senere.

Et tegn på Descartes' internasjonale berømmelse var at han i 1649 ble kalt til Stockholm som rådgiver og samtalepartner for dronning Christina av Sverige (1626-1689). På denne tiden var Sverige en politisk stormakt — landet hadde spilt en avgjørende rolle i trettiårskrigen og dominerte nå området rundt Østersjøen. Christinas ambisjon var at Sverige også skulle bli en kulturell stormakt, og Descartes var bare en av de mange kunstnere og intellektuelle som hun kalte til seg fra Frankrike. Men samarbeidet skulle bli av kort varighet — Descartes' helse tålte ikke kulden og fuktigheten i Stockholm, og han døde allerede den første vinteren.

de Fermat (1601-1665)

Pierre de Fermat levde hele sitt liv i og rundt byen Toulouse i Sør-Frankrike. Han var utdannet jurist og hadde diverse juridiske stillinger, men det var matematikk som var hans store lidenskap. I en tid da den vitenskapelige debatten ofte utartet til krangel og fornærmelser, unngikk Fermat strid så godt han kunne. Han reiste lite og publiserte enda mindre, og vi kjenner hans resultater dels gjennom brev og dels gjennom notater som ble offentliggjort etter hans død. Til tross for dette må Fermat regnes som en av tidenes største matematikere — han var en av opphavsmennene til analytisk geometri og sannsynlighetsregning, han var en viktig forløper for differensialregningen, han ga viktige bidrag til optikken, men først og fremst ga han tallteoretikerne ideer og problemer som de ennå arbeider med.

Her er en smakebit på Fermats resultater. Primtallene fra *3* og oppover kan deles i to klasser; de som gir *1* som rest når de deles på *4*:

$$5, 13, 17, 29, 37, 41, ...$$

og de som gir 3 som rest:

$$3, 7, 11, 19, 23, 31, ...$$

Albert Girard (1595-1632) hadde observert at alle tallene i den første rekken kan skrives som en sum av to kvadrattall
5 = 12 + 22, 13 = 22 + 32, 17 = 12 + 42, 29 = 22 + 52, 37 = 12 + 62, 41 = 42 + 52, ...
mens ingen tall i den andre rekken kan skrives som en slik sum. Fermat beviste at dette gjelder generelt — et primtall større enn 2 kan skrives som en sum av to kvadrater hvis og bare hvis det gir 1 som rest når det deles med 4. (Dette resultatet har flere slektninger — Joseph Louis **Lagrange** viste i 1770 at alle naturlige tall kan skrives som en sum av fire kvadrater, og Carl Friedrich **Gauss** karakteriserte i 1801 de tallene som kan skrives som en sum av 3 kvadrater).

Fermat er mest berømt for en påstand som ingen tror han beviste. Han hadde for vane å skrible kommentarer i margen til sin utgave av **Diofants** "Arithmetica", og utenfor det stedet der Diofant karakteriserer alle pythagoreiske tripler, skriver Fermat at han har funnet et vidunderlig bevis for at det ikke finnes naturlige tall x, y, og z slik at

$$x^n + y^n = z^n$$

når $n \geq 3$, men at margen ikke er stor nok til at han kan skrive det ned. Ettertiden har gitt denne påstanden navnet Fermats formodning (på engelsk kalles den gjerne Fermat’s Last Theorem — til tross for at det ikke er et teorem!). Vi vet at Fermat hadde et bevis for $n = 4$ og sannsynligvis også for $n = 3$, men etter at generasjoner av matematikere har forsøkt å finne et bevis for det generelle tilfellet, er det bare de mest innbitte romantikerne som tror at Fermat virkelig fant noe som alle andre har oversett.

Dette problemet ble endelig løst av den engelske matematikeren Andrew **Wiles** i 1994. Wiles’ bevis var på over 200 sider og bygger på tusenvis av sider utviklet siden Fermats dager, så det kan det umulig være Fermats forsvunne bevis han har funnet!

Gauss (1777-1855)

Carl Friedrich Gauss er en av alle tiders mest betydningsfulle matematikere; han er blitt kalt "matematikernes fyrste ("Princeps Mathematicorum"). Hans arbeider ga radikalt nye synspunkter i algebraen og i geometrien, og han gjorde fundamentalt viktig arbeid i astronomi og i fysikk.

Gauss var født i byen Braunschweig i staten av samme navn, i nåværende Tyskland, den 30. april 1777, og han døde i Göttingen 28 februar 1855.

Gauss' far arbeidet som gartner og murer, og hadde liten tro på boklig lærdom, men moren og hennes bror skjønte at skolegang ville være bra for gutten. Heldigvis hadde fyrstedømmet Braunschweig et for sin tid godt skolevesen, også for almuen, og Carl Friedrich begynte på skole som 7-åring. Hans matematiske begavelse viste seg tidlig. En berømt episode fra han var 10 er denne: Læreren hadde, kanskje for å skaffe seg et lite pusterom (det var ca 100 elever i klassen) satt elevene til å summere tallene fra *1* til *100*. Carl Friedrich skrev tallet *5050* på sin tavle og la den på lærerens bord med ordene "*Der ligger den*". De andre elevene strevet lenge, og fikk gale svar. Gauss hadde sett at disse tallene kunne ordnes i *50* par med samme sum: *1+100*, *2+99*, *3+98* osv.

Fyrsten i Braunschweig, Ferdinand, fikk høre om gutten, og skaffet ham stipendier til mere skolegang, og fra 1795 til universitetsstudier i Göttingen. Gauss var lenge usikker på om han skulle velge matematikk eller filologi, det som avgjorde valget for ham var visstnok at han, knapt 19 år gammel, fant ut hvilke regulære mangekanter som kan konstrueres med bare linjal og passer (17-kant, 157-kant etc). Det var det første framskrittet på dette området siden antikken. Samme året begynte han å notere korte stikkord om sine matematiske funn i en notisbok. Der finner vi foruten linjal-og-passer-konstruksjonen mange tallteoretiske resultater, den dobbelte periodisiteten til de elliptiske funksjonene og mye annet.

Gauss ventet som regel med å publisere sine arbeider til de var godt gjennomarbeidet og avklaret. *"Lite, men modent"* var hans rettesnor. Det førte til at flere av hans resultater ble gjenoppdaget og publisert av andre før Gauss fikk dem trykket. Ett av dem er de ikke-euklidiske geometriene, som Janos Bolyai og Nikolai Lobachevskij gjenoppdaget i 1830-årene. Abels resultater om elliptiske funksjoner kom i samme klasse, Gauss sa han hadde kjent dem i 25 år, og var glad for at han nå slapp bryderiet med å skrive dem ut!

Sin doktorgrad tok Gauss i 1799 på et arbeid om algebraens fundamentalt-eorem. Det sier at ethvert polynom (i en variabel og med reelle eller komplekse koeffisienter) har nullpunkter. Gauss avfeide alle tidligere bevis for teoremet som uholdbare, det han selv ga er i hovedsak holdbart også i dag, 200 år etterpå. Senere ga han tre nye og forskjellige bevis for denne satsen.

Samme året skrev han sin "*Disquisitiones arithmeticae*," som ble utgitt i 1801. Han starter enkelt, med begrepet kongruens mellom heltall (to heltall *a* og *b* er kongruente med hensyn på et tredje tall *m* hvis *m* er faktor *i a - b)*, og løsning av lineære og høyere kongruenslikninger. På det grunnlaget bygger han opp sin teori for kvadratiske former, han beviser en sats som Legendre hadde gjettet på 15 år før, men ikke klart å bevise, om kvadratisk resiprositet, og han setter de før nevnte resultatene om geometriske konstruksjoner inn i en algebraisk sammenheng. Det siste er klart det viktigste bidraget til likningsteorien mellom Lagranges arbeid fra 1771 og Abel og Galois sine i 1825 og senere. Kanskje aller viktigst på lengere sikt var at hans regning med kongruensklasser viste at det er mulig, og nyttig, å drive aritmetikk med andre objekter enn tall.

I 1801 fant astronomene en ny småplanet, kalt Ceres; men de rakk bare å observere den noen få netter før den forsvant i sollyset, så det var vrient å bestemme dens bane. Gauss tok opp utfordringen, og hans beregninger førte til at planeten ble funnet igjen utpå høsten. Dermed var han etablert som en av Europas ledende astronomer.

Fyrst Ferdinand døde i slaget ved Jena i 1806, og støtten fra ham tok slutt. Men da var Gauss en berømt vitenskapsmann, og han ble direktør for observatoriet i Göttingen i nabostaten Hannover. I den stillingen forble han livet ut,

En av pliktene til direktøren for observatoriet var å forestå kartleggingen av Hannover, og Gauss reiste rundt og triangulerte. Han oppfant bedre landmåler-instrumenter, og forbedret arbeidsmetodene. Men arbeidet med trianguleringen fikk ham også til å tenke gjennom problemene med å avbilde en krum flate (jordoverflaten) på et plan (kartet), og ut fra den problemstillingen oppsto moderne differensialgeometri, som ble videreført av Riemann, og som ble sentral i Einsteins generelle relativitetsteori.

Landmålingen og astronomien gjorde det nødvendig for ham å studere hvordan man best skal håndtere de uunngåelige unøyaktighetene i et stort observasjonsmateriale. Det førte til viktige arbeider om feilteori (minste kvadraters metode).

Gauss var også interessert i elektrisitet og magnetisme, som var et nytt og spennende forskningsfelt. Det var hans arbeide med elektrostatikk som ledet til den velkjente "Gauss sats" om fluks og divergens i et vektorfelt. Da fysikeren Wilhelm Weber ble professor i Göttingen samarbeidet han og Gauss om eksperimentelle arbeider, blant annet laget de en elektrisk telegraf.

Avslutning, forbindelse med Volvos karosseri

I denne delen av matematikkhistorie-kurset har vi tatt for oss likningsteorien, fra antikkens løsninger av lineære og kvadratiske likninger, til algebraisk geometri. Gjennom historien har det variert veldig hva slags deler av matematikken som har vært forskningens lokomotiv. I tidlig antikk var det tallteori, siden ble det geometri og fra 6-700-tallet og fram til 16-1700-tallet var det likningsteorien som dro utviklingen framover. At denne epoken tok slutt hadde flere årsaker. Abels endelige punktum for jakten på formler for løsninger spilte en rolle, likeså forståelsen av komplekse tall og algebraens fundamentalsats. Men kanskje den viktigste årsaken ligger i at andre deler av matematikken tok oppmerksomheten bort fra likningsteorien. Og det er naturligvis analysen, i første rekke representert ved Newton og Leibniz som sto for denne epokegjørende dreiningen. Som et svar på renessansens ønske om bl.a. å forstå planetens bevegelser og hvorfor epler faller fortere og fortere inntil de treffer bakken, utviklet Newton og Leibniz differensial- og integralregning.

Med opplysningstiden ble også mulighetene for å drive forskning større, flere drev med matematisk virksomhet og det var samtidig helt legitimt å forske på problemstillinger som var rent teoretiske. Dermed kom den store eksplosjonen i matematisk forskning i stor grad til å falle sammen med den industrielle revolusjon. Den industrielle revolusjon, på sin side, krevde store bidrag fra matematikken, i form av verktøy og språk til å håndtere de enorme teknologiske utfordringene. Resultatet ble en rivende utvikling av matematisk forståelse og kunnskap, innen algebra, geometri, tallteori, analyse, logikk for å nevne noen av de store feltene.

Men hva har dette med Volvos karosseri å gjøre? Jo, med form, design og geometri og likninger som beskriver dette. Når Volvo skal produsere en ny modell blir bilen designet på en datamaskin. Tegningen av bilen må kunne la seg overføre til roboter som står for produksjonen. Det betyr at beskrivelsen av bilens form må være helt eksakt, slik at roboten vet nøyaktig hva den skal gjøre. Samtidig må denne beskrivelsen kunne gjøres med et overkommelig antall parametre, i det minste av en slik størrelsesorden at tiden det tar å beregne formen er neglisjerbar for de aller fleste formål. Til å gjøre dette bruker moderne datamaskiner polynomer, polynomiale likninger og geometriske tolkninger av løsningene. Først deles bilen opp i et meget finmasket rutenett. Innenfor hver rute beskrives bilens form ved hjelp av løsningene til en spesiell polynomial likning. Det er ikke så veldig vanskelig. Problemene kommer når vi skal få alle disse små rutene til å passe sammen, slik at overflaten blir glatt og fin. Men det lar seg gjøre, ikke minst fordi matematikere i dag forsker på nettopp slike problemstillinger.

Tilsvarende teknikker brukes også i dataspill og i 3d-animasjoner.

Kilder og oppgaver:

[1] Victor J. Katz: A History of Mathematics, HarperCollins, 1993

[2] Audun Holme: Matematikkens historie, Fagbokforlaget, 2001

[3] Bernt Øksendal: Tall og tallsystem, Gyldendal/NMF 1991

[4] http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics.html

[5] Torgeir Onstad: Fra Babel til Abel, NKS-forlaget, 1994

[6] http://www.andrews.edu/~calkins/math/webtexts/numb19.htm