MA-EVU3
Videreutdanningskurs i
matematikkens historie

DEL 3

Matematikk som redskap for fysikk, fra Newton og fram mot vår tid

Ser på hvordan matematikk og fysikk har gått hånd i hånd, fra beskrivelse av planetbaner til kvantemekanikk.

Januar 2005

Arne B. Sletsjøe
Universitetet i Oslo

Perspektivtegning

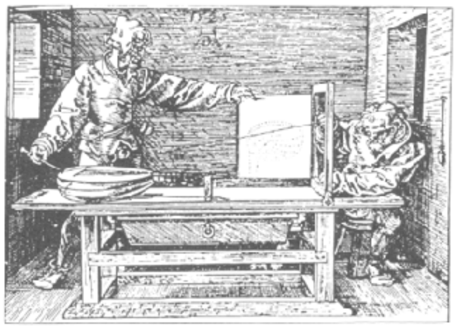
Historisk ramme

Selv om det også i antikken var spredte forsøk på perspektivtegning, var det først i renessansen at malere på bred basis begynte å interessere seg for å gi bildene en visuell dybde. Til å begynne med var det mye prøving og feiling, men i tiden rundt det femtende århundre dukket det opp kunstnere som forsøkte å lage en matematisk teori for å framstille tre-dimensjonale objekter på en to-dimensjonal flate. Det var klart at objekter i bakgrunnen måtte framstilles som mindre enn objekter i forgrunnen for å gi bildet et anstrøk av realisme. Spørsmålet var hvor stor denne forskjellen skulle være.

Den første som gikk inn i problemstillingen med et analytisk sinn og med geometri som verktøy var italieneren Filippo Brunelleschi (1377-1446), men den første skriftlige behandlingen var det hans landsmann Leon Battista Alberti (1404-1472) som sto bak. Han ga i 1435 ut boka *Della Pittura* hvor han bl.a beskriver hvordan et sjakkmønster av gulvfliser vil se ut på et malerei.

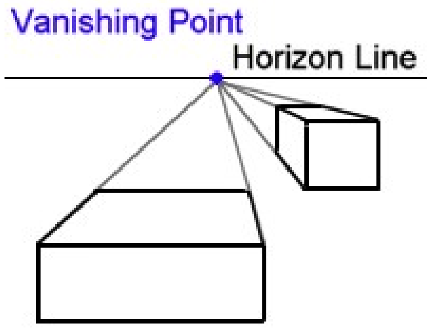
Nå gikk ikke Alberti så mye lenger enn dette. Den som førte arbeidet videre var heller Piero della Francesca (1420-1492) i sitt arbeid *De perspectiva pingendi* skrevet en gang mellom 1470 og 1490. Her får vi en detaljert framstilling av hvordan tegne to- og tre-dimensjonale objekter i perspektiv.

Men kanskje det viktigste arbeidet var *Underweysung der Messung mit Zirckel und Richtscheyt in Linien, Ebnene, und gantzen Corporen* fra 1525, skrevet av den tyske kunstneren og matematikeren Albrecht Dürer (1471-1528).

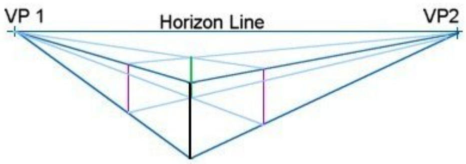


Hvordan tegne i perspektiv?

Det finnes ulike former for perspektivtegning. Vi skal se på to former. Den ene er det som kalles ett-punkts perspektivtegning. Dette er en metode som f.eks. brukes til å tegne en lang gate som forsvinner inn i det fjerne. Først tegner vi horisontlinja tvers over arket. Deretter velger vi ett punkt på horisontlinja, det såkalte forsvinnings-punktet. Alle parallelle linjer i den retningen vi ser forlenger vi til de møtes i forsvinningspunktet. Dette vil i eksemplet med den lange gaten være gatekantene husene, hustakene osv. Til slutt fjerner vi forlengelsene av strekene, slik at vi kun sitter igjen med den delen av linjene vi er interessert i.

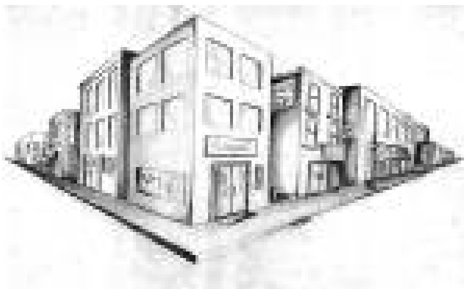


Den neste metoden kalles to-punkts perspektiv. Dette brukes bl.a. til å tegne et hus hvor vi ser rett på et hjørne, med gater på begge sider som hver forsvinner i det uendelig fjerne. Oppskriften likner mye på ett-punkts perspektivet, bare at nå velger vi to punkter på horisontlinja, ett til høyre og ett til venstre. Vi starter med å trekke en kort vertikal strek som gir oss det hjørnet som vender mot oss.



Fra topp og bunn av denne vertikale streken trekker vi linjer til de to forsvinningspunktene. Linjer som er parallelle med hjørnelinja tegnes parallelle med denne, mens linjer som er parallelle med de som er indikert med streker til forsvinningspunktene selv går gjennom ett av forsvinningspunktene. Igjen tar vi til slutt og visker bort alle overflødige streker.

Det finnes mange ulike oppskrifter på perspektivtegning, hvorav de vi har beskrevet er de to enkleste. Det blir mye vanskeligere dersom ikke alle linjer er parallelle, dersom det finnes krumme



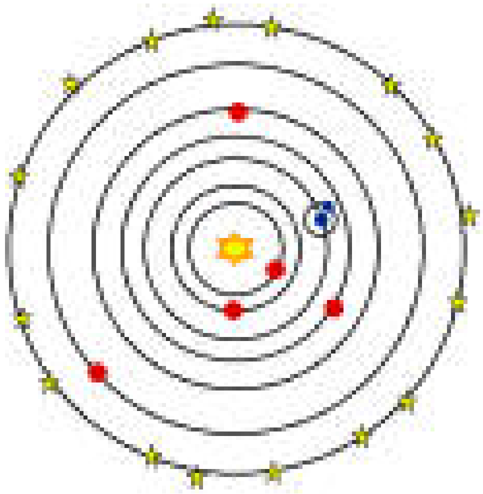
linjer etc. Men selv med kunnskap om disse to aller enkleste metodene kan vi få fram flotte virkelighetsnære tegninger av gater, hus og andre rektangulære figurer.

Astronomi, et nytt verdensbilde og en tilpasset matematikk

Innledning, linjer til Ptolemais og Almagest

Ved inngangen til renessansen var det fortsatt det antikke verdensbildet, beskrevet av Ptolemais i hans store verk *Almagest* som var mer eller mindre enerådende. Dette bildet baserte seg på at jorden var i sentrum og planetene og fiksstjernene var festet til konsentriske sfærer.

Etter hvert vokste erkjennelsen av at denne beskrivelsen ikke var tilstrekkelig, ja faktisk ikke en gang korrekt. Geometrien stemte ikke lenger overens med de mange og detaljerte observasjonene. Samtidig, som en del av det samme problemkomplekset, var det en økende bekymring for at den julianske kalenderen, som jo hadde vært i bruk siden Romerriket, var i ferd med å komme helt ut på viddene, påsken var f.eks. på god vei til å bli en sommerhøytid, etc. Det var på tide å gjøre noe. Men prosjektet møtte motstand blant fagfolkene, astronomene, rett og slett fordi de oppfattet at observasjonsgrunnlaget var for dårlig til å lage en ny kalender. En av dem som sto for dette standpunktet var Copernicus. Fra noen gamle greske filosofer hadde han fått ideen om at det ikke var jorda som var i sentrum, men sola. Med det utgangspunktet hadde han regnet på observasjonsmaterialet på nytt og funnet fabelaktige overenstemmelser mellom teori og observasjon.



Heliosentrisk system

Copernicus` verdensbilde var et heliosentrisk system, altså med sola i sentrum. Planetene og fiksstjernene beveget seg på konsentriske sfærer. Hvorfor de gjorde det var ikke Copernicus så veldig interessert i. Som matematikere var han hovedsakelig interessert i å beskrive banene, ikke som fysikerene Galilei og siden Newton som ville etablere forklaringer på hvorfor banene var slik de beskrev. Copernicus hadde ingen kunnskap om at planetene beveget seg i elliptiske eller sirkulære baner i et tomt rom. Hans argument for at jorda roterer om sin egen akse, heller enn at det er fiksstjernene som sirkulerer rundt, var praktikerens standpunkt, jorda er mye mindre enn hele resten av himmelrommet. En annen type argument hadde han for at jorda går rundt sola og ikke omvendt; det passet bedre med observasjonene. Altså et nokså fordomsfritt standpunkt, og kanskje ikke helt i tråd med datidens rådende oppfatning blant Kirkens makttunge toppskikt.

Men Copernicus` beskrivelse var ikke helt enkel å få tak på. Hans beregninger tydet på at senteret til jordas (sirkulære) bane ikke var sola, men et punkt på en sirkel hvis sentrum igjen roterte sirkulært rundt sola.

Keplers tre lover

Kepler arbeidet som astronom i Praha, hvor han hadde overtatt observator-oppgaven fra den store Tycho Brahe. Kepler var også dypt interessert i teologi og filosofi, og satte seg som mål å forstå de matematiske ideene Gud hadde brukt da han skapte verden. Han tok utgangspunkt i Copernicus heliosentriske verdensbilde, med sola i sentrum og plantene som kretset rundt. Gjennom årelange kalkulasjoner av planetbaner kunne Kepler sammenfatte sine resultater i det som i dag er kjent som Keplers tre lover om planetbevegelser.

Etter Newton vet vi at disse lovene følger av gravitasjonsloven. F.eks. følger den andre loven av at at planetene

Keplers lover om planetbevegelse:

1. *Alle planetene går i ellipse-baner med sola i det ene brennpunktet.*
2. *Aksen mellom sola og en planet stryker over like store areal i løpet av like store tidsrom.*
3. *Kvadratet av omløpstiden er proporsjonal med avstanden (store halvakse) i tredje potens.*

utsettes for en radial kraft. Siden det beskrevne areal er infinitesimalt gitt ved absoluttverdien av kryssproduktet av hastighet og posisjon, får vi

$$dA = c|\mathbf{v} \times \mathbf{r}|\ dt$$

Deriverer vi dA/dt med hensyn på t får vi

$$d/dt\ (dA/dt) = p|\mathbf{v} \times \mathbf{v}| + q|\mathbf{a} \times \mathbf{r}|$$

som er lik 0 siden kraften, og derfor akselerasjonen er radial og fordi kryssporduktet av en vektor med seg selv er 0. Altså er dA/dt konstant.

Galileis verdensbilde

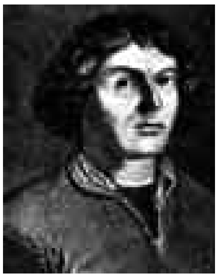
Galilei bygget videre på arbeidene til sine renessanseforløpere. Som dem var han opptatt av å lage geometriske argumenter for sine oppdagelser. Hans viktigste bidrag til matematikken er hans arbeider rundt akselerasjon. Det var denne kunnskapen han brukte til å studere jordas bevegelser i solsystemet.

Galilei slo i 1604 fast at et legeme i fritt fall utsettes for en konstant akselerasjon. Dette postulatet brukte han til å regne ut mange forskjellige bevegelsesbaner, og noen av dem kunne han verifisere ved ulike eksperimenter. F.eks. fant han prosjektilenes parabel-bane og han beregnet tyngdens akselerasjon ved å slippe ting fra det skjeve tårn i Pisa.

Men den viktigste anvendelsen var altså i studiet av planetenes bane rundt sola. Det finnes mange historier rundt dette, der Galilei blir stilt for inkvisisjonen og må sverge på at jorda er universets sentrum. En del av dette er historisk dokumenterbart, mens andre ting baserer seg på ettertidens frie fantasi. Uansett forsvarer Galilei en plass blant de aller fremste vitenskapsmenn gjennom historien, først og fremst som fysiker, litt mindre som matematiker og astronom.

Viktige personer

Nicolaus Copernicus (1473-1543)

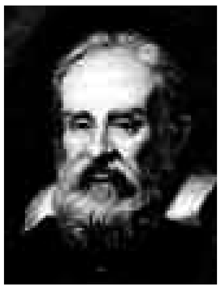


Nicolaus Copernicus ble født i Torun i Vest-Prøyssen i det som i dag er Polen. Familien hans var en velstående handels-familie og som attenåring ble han sendt til Universitetet i Krakow. Etter endt studietid sørget hans onkel, Biskopen av Warmia, for at han fikk en prestestilling med stor grad av frihet. Faktisk trengte han nesten ikke å gjøre noe som helst og han kunne benytte tiden til astronomisk forskning etter lengre studieopphold ved universitetene i Bologna og Padua. I 1530 avsluttet han arbeidet med sitt hovedverk *De Revolutionibus*, som ble publisert i 1539.

Johannes Kepler (1571-1630)

Johannes Kepler var født i Weil-der-Stadt i det sørvestlige Tysk-land. Han studerte ved universitetet i Tübingen og ble etter hvert overbevist om at Copernicus verdensbilde var det riktige. Han fikk jobb som professor i matematikk ved den protestantiske skolen i den østerriske byen Graz. Etter en lengre brevvekslingsperiode med den danske astronomen og observatøren Tycho Brahe fikk Kepler et kall fra Keiseren om å tiltre som Brahes assistant ved observatoriet i Praha. Brahe døde bare halvannet års tid etter at Kepler kom til Praha. Men de hadde brukt tiden godt og Kepler var fullt istand til å fortsette Brahes arbeid som hans keiserlige etterfølger.

Galileo Galilei (1564-1642)

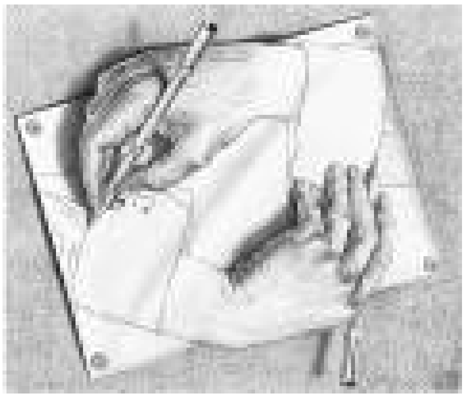


Galileo Galilei studerte opprinnelig medisin ved Universitetet i Pisa, men hans egentlige interesser var matematikk og naturfilosofi. Han er best kjent for sine arbeider om legemer i fritt fall, sin bruk av teleskopet og sine mange eksperimenter.

Etter en kort periode som matematikklærer ble Galileo utnevnt til professor i matematikk ved Universitetet i Padua. Der underviste han Euklids geometri og standard (geosentrisk) astronomi til medisinstudenter. Dette måtte de lære for å kunne benytte seg av astrologi i sin medisinske praksis.

Sommeren 1609 hørte Galileo om et spionglass som en hollender hadde vist frem i Venezia. Inspirert av dette gikk Galileo i gang med å konstruere teleskoper med en optikk som langt overgikk det hollandske instrumentet. Hans astronomiske oppdagelser, gjort ved hjelp av teleskopene, ble publisert i Venezia i mai 1610 og vakte stor oppsikt. Galileo påstod at han kunne se fjell på månen, at han hadde bevist at Melkeveien bestod av små stjerner og at han hadde sett fire måner i bane rundt Jupiter.
Galileo brukte sine oppdagelser som bevis for at planetene kretser rundt sola, og han gjorde det med store verbale såvel som matematiske ferdigheter. Hans arroganse skaffet han en mengde fiender
Etterhvert kom Galileos tanker og skrifter inkvisisjonen for øre. Galileo ble tilkalt til Roma, og under sterk mistanke om at han bedrev kjetteri, ble han dømt til husarrest på livstid i villaen sin i Arcetri (over Firenze). Han ble også nektet å publisere, men han fortsatte likevel å skrive. Boken *Discourses on two new sciences* ble smuglet ut av Italia og publisert i Leiden (i Nederland) i 1638.

Bøkene hans ble oversatt fra hans egen dialekt til latin for det internasjonale markedet, og fikk enorm inflytelse.



Sannsynlighetsregning og kombinatorikk

Tidligste sannsynlighetsregning

Den første spede begynnelsen på sannsynlighetsregningen finner vi i Europa mot slutten på middelalderen. Det dreier seg om å studere antall konfigurasjoner for to og tre terninger. De visste at det er 21 for to og 56 for tre terninger. Siden vi ikke tar hensyn til rekkefølgen på de to (tre) terningene vil ikke dette tallet reflektere oddsen for å få den enkelte konfigurasjonen, det er dobbelt så stor sjanse for å få 1 og 2 som det er for å få to 2-ere. Vi ville i moderne språk si at fordelingen ikke er ekviprobabel.

Den første som skrev noe betydningsfullt om sannsynlighetsteori var Cardano. Han var selv en lidenskapelig spiller og i perioder av sitt liv levde han av spill. Det fordret selvfølgelig stor innsikt i sannsynlighetsteori, han måtte vite nok om odds for foskjellige terning-kombinasjoner til å kunne lure sine motspillere. F.eks. beregnet han at dersom vi slår to terninger, så er sannsynligheten for å få 1, 2 eller 3 gitt ved 0,75. Han resonnerte som følger, av 36 mulige kombinasjoner er det 27 som inneholder 1, 2 eller 3, mens det er 9 som ikke gjør det. Vi ville sagt at det beste er å se på det motsatte, det er 50% sannsynlighet for ikke å få 1, 2 eller 3 med den ene terningen, og tilsvarende for den andre. Det å ikke få 1, 2 eller 3 med noen av terningene er to uavhengige begivenheter og har derfor sannsynlighet 0,5 x 0,5 = 0,25, og sannsynlighetene for det motsatte, nemlig å få 1, 2 eller 3 blir 1 - 0,25 = 0,75.

Cardano skjønte etter hvert at det måtte være slik og var da istand til å formulere akkurat dette eksempelet i en litt større generalitet.

Cardano var også opptatt av to andre problemer som verserte på denne tiden. Det ene var hvor mange ganger man må slå to terninger for at det skal være mer enn 50% sannsynlighet for å få to 6-ere i ett slag, og det andre problemet dreide seg om det uavsluttede spillet. Vi antar at to spillere spiller et spill der begge har samme odds for å vinne og de spiller førstemann til seks seire. På et tidspunkt må de avslutte spillet. Den ene spilleren har da vunnet tre spill, den andre har vunnet fem. Hvordan skal de fordele gevinsten på en mest mulig rettferdig måte?

Sammen med Cardano var det Tartaglia som sto for det som ble skrevet om sannsynlighetsregning på denne tiden. Etter disse to skjedde det ingen ting før langt ut på 1600-tallet, nærmere bestemt rundt 1660. Og problemet var fortsatt det avbrutte spillet, men i tillegg brakte Pascal på banen spørsmålet om å bestemme fornuftige grader av tro.

Pascals kombinatorikk

Pascals løsning av gevinstfordelings-problemet ved avbrutt spill er beskrevet i flere brev Pascal skrev til fermat i 1654, og siden mer grunnleggende i Pascals bok om den aritmetiske trekanten, eller Pascals trekant som vi kaller den i dag. Pascal begynner med å si at dersom en spiller ville ha vunnet en del av gevinsten uansett utfall, så skal spilleren ha denne delen av gevinsten. Og dersom det er slik at spillerne har like stor sjanse til å vinne så skal de dele likt. Videre sier Pascal at det som er avgjørende for fordelingen er hvor mange spill som gjenstår og hvor mange spill hver enkelt må vinne for å ta hele potten.

Vi kan illustrere det hele med et eksempel. Anta at potten er på 800 kroner. Hvis hver spiller trenger en seier for å vinne det hele, er det rimelig at de deler potten likt, altså kr. 400 til hver. Hvis det derimot er slik at den ene spilleren trenger én seier, mens den andre trenger to, så vil fordelingen være kr. 600 til den ene og kr. 200 til den andre. Årsaken er at i det første spillet har spilleren med best utgangspunkt 50% sannsynlighet for å vinne. Dersom han ikke vinner, noe som også skjer med 50% sannsynlighet, så har begge 50% sannsynlighet for å vinne i det andre spillet. Spilleren med best utgangspunkt skal dermed ha med seg kr. 400 for det første spillet og kr. 200 for det andre, til sammen kr. 600.

Vi skal generalisere dette argumentet og til det trenger vi Pascals trekant. Den øverste delen av denne trekanten ser ut som :

```
              1
           1     1
        1     2     1
      1    3     3     1
    1   4     6     4    1
  1   5   10    10    5   1
1   6   15   20    15   6   1
```

hvor systemet er at et hvert tall er lik med summen av de to tallene som står rett over. Pascal gir en rekke resultater knyttet til denne trekanten, f.eks. er et tall i trekanten lik summen av alle tallene i diagonalen (fra venstre mot høyre), ovenfra og ned til tallet som står til høyre over det gitt tallet. Alternativt summen av tallene på en anti-diagonal (fra høyre mot venstre) ned til tallet over til venstre for vårt tall. Som et eksempel har vi at 15=1+4+10, når vi går den ene veien og 15=1+2+3+4+5 når vi går den andre. En annen konsekvens er at summen av alle tallene i den r-te raden er gitt ved r-te potens av 2. Her teller vi det øverste 1-tallet som den 0-te raden.

I tillegg løste altså Pascal problemet med fordeling av utbytte. Hans resultat er som følger:

Pascals utbyttefordelingssats
Anta at den første spilleren er r spill fra å vinne og den andre er s spill. Både r og s er minst 1. Hvis spillet er avbrutt ved denne stillingen skal gevinsten fordeles slik at den første spilleren får samme andel som summen

$$\sum_{k=0}^{s-1}\binom{n}{k} = 2^k$$

og hvor n=r+s-1 (det maksimale antall gjenstående spill.)

Vi kan anvende dette generelle resultatet på tilfellet med 5 og 3 seire av 6. Antall gjenstående nødvendige seire er 3 og 1. Det gir at *n=1+3-1=3* og fordelingen av 8-deler (2^3=8) er 1 mot 1+3+3=7, så spiller 1 skal ha kr. 700 og spiller 2 skal ha kr. 100.

Den andre siden av Pascals behandling av sannsynligheter dreier seg om Guds eksistens. Pascal sier at dersom Gud eksisterer så skal man leve som en god kristen og dersom han ikke finnes har det ikke noe betydning. Gevinsten ved å leve som en god kristen er enten full pott eller ingenting, dersom vi antar at Gud eksisterer. Dersom han ikke eksisterer vil uansett utfallet være verdt 0. Siden det er en viss sannsynlighet for at Gud eksisterer vil forventningsverdien være positiv ved å leve som en god kristen og 0 dersom man ikke gjør det. Altså skal men uansett leve som en god kristen. Pascal presenterte dette resonnementet uten å innføre begrepet forventnings-verdi. Det var først noen år senere at Christian Huygens systematiserte dette begrepet, dog uten at han heller kalte det forventningsverdi.

Huygens og den første tekst i sannsynlighetsteori

Blant Pascals samtidige finner vi også en ung nederlender ved navn Christian Huygens. Etter en reise til Paris i 1655, da han var 26 år gammel, skrev han en liten bok om sannsynlighetsregning, kalt *De Ratiociniis in Aleae Ludo (Kalkulasjoner for sjansespill)*. I denne boka innføres det vi i dag kaller forventningsverdi. Forventningsverdi er definert som summen av produktene av verdiene av hvert utfall multiplisert med sannsynligheten for utfallet. Huygens sier det slik:

"Å ha like stor sjanse for å vinne a eller b er verdt $\frac{a+b}{2}$ *for meg"*

og senere

> *"Å ha p sjanser til å vinne a og q sjanser til å vinne b, hvor alle sjansene er ekvivalente, er verdt* $\frac{pa+qb}{p+q}$ *for meg."*

Huygens diskuterte også problemet med antall slag to terninger må slås før sannsynligheten for å slå to 6-ere er like stor som å ikke gjøre det. Huygens sier at ved første slag er sannsynligheten 1/36 og hvis gevinsten er a, så vil forventet verdi etter første slag være a/36. Etter neste slag bruker vi uttalelsen over. Det er 1/36 sannsynlighet for å få a, mens det er 35/36 sannsynlighet for å kaste én gang til. Dersom vi kaster én gang til, er igjen sannsynligheten for å vinne a/36. Det gir oss forventningsverdi lik

$$\frac{1a+35(\frac{1}{36})a}{1+35}$$

eller

$$\frac{71}{1296}a \approx 0{,}0548 \text{ a}$$

som er nesten dobbelt så stor som 1/36≈0,0278. Vi kan fortsette på samme måte. Kaster vi fire ganger vil spillerens sjanse for å oppnå en dobbel seks være gitt ved

$$\frac{178991}{1679616}a \approx 0{,}1066 \text{ a}$$

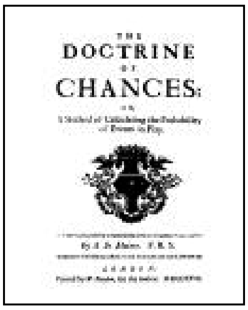
osv. Målet vårt er å komme over 0,5 a. For å komme dit må vi fortsette samme tankegang og vi finner at 24 ganger er for lite, mens 25 ganger er for mye. Så for å ha større sjanse til å få en dobbel sekser enn å ikke få det er man nødt til å slå 25 ganger. På 25 slag skal sannsynligheten for å få en dobbel sekser ha passert sannsynligheten for å ikke få det.

Bernoulli og de store talls lov

Mens Pascal og Huygens hadde vært mest opptatt av sannsynlighetsregning i forbindelse med spill, ga Jakob Bernoulli oss et annet perspektiv. Han stilte spørsmålet om sannsynligheten for at en person vil dø av en bestemt sykdom, eller hvordan vær det blir neste uke. Bernoullis løsning på begge disse eksemplene baserer seg på empiriske data. Vi studerer et stort antall eksempler og ser hva som har skjedd i disse tilfellene. Så legger vi den kunnskapen til grunn for å beregne sannsynligheten for at det ene eller andre skal skje neste gang. I virkeligheten regner vi på fortiden og bruker det til å prediktere om framtiden.

Bernoulli prøvde å finne ut noe om hvor mange eksempler man trenger for å gjøre kvalifiserte spådommer. Og dersom man bestemmer seg for et lite intervall rundt det riktige svaret, hvor mange eksempler trenger man for å komme innenfor?

Det er Bernoulli som er gitt æren for det som i dag går under betegnelsen "Store talls lov". Denne loven sier at dersom en del hendelser er belagt med en viss usikkerehet, men med bestemte sannsynligheter for ulike utfall, så vil fordelingen mellom de aktuelle utfallene avvike mindre og mindre fra de gitte sannsynligheter når antallet hendelser øker.



Etter Huygens og Bernoulli var det Abraham De Moivre som førte sannsynlighetsteoriarven videre. Hans hovedverk var kalt *"Doktriner om sannsynlighet"* og det var en mer moderne versjon av Huygens arbeider med en del utvidelser. De Moivre studerte også det gamle klassiske problemet mht. antall slag før sannsynligheten for å få to 6-ere overstiger sannsynligheten for ikke å ha fått det. De Moivre formulerer dette i en litt mer generell setting:

> *Finn antallet forsøk vi må gjøre før det er like stor sannsynlighet for at det har skjdd som at det ikke har skjedd når sannsynligheten for at det skjer er a av a+b og sannsynligheten for at det ikke skjer er b av a+b.*

De Moivre løser problemet slik: Hvis vi gjennomfører forsøket x ganger vil sannsynligheten for at vi feiler alle gangene være gitt ved

$$\frac{b^x}{(a+b)^x}$$

Vi er interessert i når denne er så nær 0,5 som mulig, dvs.

$$(a+b)^x=2b^x$$

Denne likningen gjør vi om til

$$(1+q)^x=2$$

eller

$$x\ ln(1+q)=ln(2)$$

Vi kan rekkeutvikle $ln(1+q)$ og få

$$ln(1+q)\approx q-(1/2)q^2+(1/3)q^2-\ldots$$

For q liten er $ln(1+q)\approx q$ en god tilnærming og vi får likningen

$$x\ q = ln(2) \approx 0{,}693$$

I De Moivres problem er $q=1/35$, noe som gir $x\approx 24{,}5$. Dvs. at det kritiske punktet ligger mellom 24 og 25 forsøk som er det samme vi har funnet tidligere.

Bayes og betinget sannsynlighet

Ett problem som hverken Huygens, Bernoulli eller De Moivre hadde noen løsning på var følgende:

> *Vi tenker oss at vi har gjennomført et forsøk n ganger og et utfall har forekommet X ganger, og at sannsynligheten for at et førsøk har et slikt utfall er gitt ved x (som vi ikke kjenner). Hva er da sannsynligheten for at x ligger i et bestemt delintervall [r,s] av intervallet [0,1]?*

Den som utviklet teorien for å løse denne type problemstillinger var Thomas Bayes. Han innførte begrepet *betinget sannsynlighet* $P(E|F)$ som betyr sannsynligheten for hendelsen E når vi har gitt F. I eksemplet er E hendelsen $r<x<s$ og F er "X fulltrff i n forsøk".

Bayes formulerte flere resultater med betinget sannsynlighet, bl.a. det som i dag er kjent som Bayes setning

$$P(E \text{ og } F) = P(E)P(F|E)$$

Med dette og liknende resultater i en mer generell setting på plass var sannsynlighetsregningen kommet et stort skritt videre og framsto som en slagkraftig og nyttig teori.

Viktige personer

Blaise Pascal (1623-1662)

Pascal ble født i Clermond-Ferrant i Frankrike i 1623. Moren døde da han var tre år gammel, og faren, Étienne Pascal, fikk hovedansvaret for oppdragelsen. Étienne var jurist av utdannelse og arbeidet i statsadministrasjonen, men han var en begavet hobbymatematiker som kjente mange av tidens ledende vitenskapsmenn. Det viste seg fort at hans sønn var en bråmoden begavelse — tolv år gammel skal han selv ha funnet frem til grunnprinsippene i plangeometrien, seksten år gammel beviste han et nytt, betydelig teorem om kjeglesnitt, og i tjueårsalderen bygde han en av verdens første regnemaskiner. Han viste hvordan man kan bruke lufttrykk til å måle høyde over havet (til hans ære kalles enheten for trykk 1 pascal).

I en av Pascals viktigste avhandlinger utledet og systematiserte han sammenhengen mellom tallene i det som kalles Pascals trekant. Pascal anvendte dette innen sannysnlighetsregning. Hans opprinnelige motivasjon var spørsmålet til Chevalier de Méré, en lidenskapelig spiller, som lurte på hvordan innsatsen skulle fordeles mellom spillerne dersom et spill ble avbrutt før det var slutt. Hvis man, for eksempel, hadde bestemt seg til å spille til førstemann hadde vunnet 5 spill, og så ble avbrutt på stillingen 4-3, hvordan skulle da pengene fordeles? I en korrespondanse med Fermat løste Pascal dette problemet i full generalitet. Denne korrespondansen blir ofte regnet som grunnlaget for asannsynlighetsregningen.

På midten av 1640-tallet ble familien Pascal kjent med jansenismen, en religiøs reformbevegelse startet av den nederlandske teologen Cornelius Jansen (1585-1638). Jansenismen lære var asketisk og pietistisk; den understreket at mennesket bare ble frelst ved Guds nåde og ikke selv kunne fortjene sin frelse gjennom gode gjerninger. Pascals søster Jaqueline gikk i kloster i jansenittenes hovedkvarter Port Royal i Paris, og i 1654 fulgte Pascal henne etter at han hadde hatt en opprivende, religiøs opplevelse. Pascal var mye plaget av sykdom og smerter hele sitt voksne liv, og de siste årene forverret sykdommen seg. Likevel fikk han skrevet ned sine tanker om kristendommen på løse lapper. Disse lappene ble ordnet og utgitt i 1670, og regnes av mange som hans filosofiske hovedverk. De viser en mann besatt av tanken på frelse, fortapelse og det evige liv.

Jakob Bernoulli (1654-1705)

Jacob Bernoulli var bror av Johann Bernoulli og onkel til Daniel Bernoulli. Han studerte filosofi og teologi, mest fordi foreldrene presset han til det, for aller helst ville han lese matematikk og astronomi.

I 1676, etter å ha fullført teologigraden sin flyttet Bernoulli til Geneve. Der fikk han en lærerpost. I tiden som fulgte gjorde han mange reiser rundt i Europa og møtte mange av datidens ledende matematikere og vitenskapsfolk.

Jacob Bernoulli vendte tilbake til Sveits, og underviste mekanikk på Universitetet i Basel fra 1683.

Jacob Bernoulli gav betydningsfulle bidrag i mange grener av matematikken. I 1689 utgav han arbeider om uendelige rekker og han presenterte sin lov om store tall i sannsynlighetsteorien. Tolkningen av sannsynlighet som relativ frekvens sier at hvis et eksperiment gjentas mange ganger er den relative frekvensen til hendelse lik sannsynligheten for den hendelsen. Loven for store tall er en matematisk tolkning av dette resultatet.

Han ga også ut arbeider innen geometri og differensiallikninger. En meget anvendelig diff.likning har til og med blitt oppkalt etter Bernoulli.

Jacob Bernoullis mest originale arbeid var "*Ars Conjectandi*" gitt ut i Basel i 1713, åtte år etter hans død.

Integral- og differensialregning

Infinitesimaler, fra Arkimedes via Kepler og Cavalieri

Både greske og islamistiske matematikere kjente til metoder for å beregne areal og volum av bestemte områder avgrenset av kurver og flater. Mange av metodene var nokså ad hoc. Men en generell ting hadde matematikerne på 1600-tallet lært av sine antikke forfedre, den mest hensiktsmessige måten å beregne et areale eller volum var å dele opp området i veldig mange små delområder, på en slik måte at vi er sikret å ha nødvendig kunnskap om areal eller volum av hver enkelt del. Deretter er det bare å legge sammen. Det var presis dette Arkimedes gjorde når han beregnet volumet av en kule med sitt likevektsforsøk.

Kepler hadde brukt nøyaktig samme ide da han viste sine tre lover for planetbevegelse. I den adre loven plukker han ut infinitesimalt små områder som han beregne areal av og så viser han sitt resultat derifra. Samme metode benyttet han for øvrig til å beregne volumet av en torus (smultring).

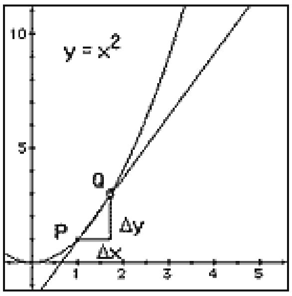
På denne måten var flere matematikere rundt 1650 i stand tilå beregne arealet under kurven $f(x)=x^k$ og mellom linjene $x=0$ og $x=b$. Dette resultatet kjenner vi i dag som det bestemte integralet av funksjonen, beregnet på intervallet $[0,b]$.

I store trekk var det to metoder som ble benyttet til å beregne areal og volum. Den ene, utførlig beskrevet av Cavalieri, besto i å betrakte et område som bygget opp av delområder av dimensjon en lavere. Så et areal ville være satt sammen av linjer og et volum av plan. I den andre metoden, den som Kepler brukte, er områdene satt sammen av delområder av samme dimensjon, dog veldig små.

Før-newtonske kalkulus

En av de som beregnet areal og volum på denne måten var Fermat. På midten av 1640-tallet hadde han full oversikt over arealet under monomiale kurver og han kunne også beregne stigningstallet til tangentlinjene. Så hvorfor regnes ikke han som grunnleggeren av differensial og integralregningen? Hovedgrunnen er at Fermat ikke så sammenhengen mellom disse to operasjonene, han manglet med andre ord fundamentalteoremet. Så kan jo dagens studenter spørre om hvordan i all verden han kunne miste det, det er jo faktsik nesten en trivialitet når man både kan derivere og integrere. Og svaret er vel egentlig nokså opplagt, Fermat reiste aldri spørsmålet eller vurderte problemstillingen. For han var tangenten en rett linje, gitt ved $y=x/k + b$ når $y=x^k$ og arealet under grafen satt han til å være lik arealet av et rektangel med sider x_0 og $y_0/(1+k)$. Han så aldri på et bestemt integral som en funksjon i øvre grense og etablerte heller ikke det som vi idag kaller det ubestemte integralet. Når denne sammenhengen mangler er vi brutale nok til å si at han ikke oppfant kalkulus, det var andre som fulgt etter han som stilte mer korrekte spørsmål.

To etterfølgere av Fermat var veldig nære å bli differential- og integralregningens oppfinnere, Isaac Barrow (1630-1677) og James Gregory (1638-1675). Begge to forsto sammenhengen mellom tangenter og areal og formulerte det fundamental-teoremet som ikke Fermat kom fram til. Men ingen av de to gjorde dette i den generalitet og med den eleganse som Newton presenterte. Barrow var vel den som var nærmest, men for han er det hele et geometrisk problem og ikke særlig betydningsfullt. Det ble ikke trukket fram i hans arbeider, mer nevnt som eksempler på egenskaper ved kurver. Kanskje kunne han at utviklet det videre dersom ikke Newton hadde dukket opp? Uansett skjønte Barrow at han bare var en liten planet der Newton var en stor sol og han gikk etter hvert bort fra matematikk og interesserte seg heller for teologi.



Newton og Leibniz og grunnlaget for integral- og differensialregningen

Så var det hele duket for Isaac Newton og Gottfried Leibniz, to av matematikkhistoriens aller mest betydningsfulle personer. Sammen, eller helst hver for seg satt de hele differensial- og integralregningen på plass, omtrent slik vi underviser den i skolen i dag. Newton var mer fysiker enn Leibniz og presenterer sin teori på en nokså konkret og håndgripelig måte, Leibniz tar det fra den matematisk-teoretiske siden. Notasjonen *dx* kalles Leibniz notasjon og regelen

$$d(xy)=x\,dy + dx\,y$$

kalles Leibniz regel. Newton anvendte sin teori på planetbaner, epler som faller og liknende praktiske problemer.

Fundamentalteoremet

1. Dersom vi har (med nødvendige presiseringer av formell art)

$$A(x) = \int_c^x f(t)dt$$

så er

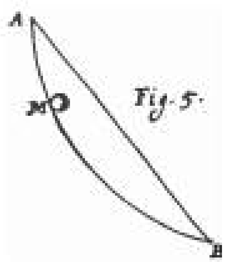
$$A'(x)=f(x)$$

2. La P(x) oppfylle P´(x)=f(x), vi kaller P en anti-derivert til f. Da har vi

$$P(x) = P(c) + \int_c^x f(t)dt$$

Men hovedresultatet i deres arbeider er fundamentalteoremet, som knytter sammen disse to teoriene. Kort fortalt sier dette teoremet at når vi skal beregne et integral, så gjør vi det ved å finne en anti-derivert. Det gir oss det korrekte svaret opp til en konstant. På den annen side, vi kan se på et integral som en funksjon i øvre grense. Da er den deriverte av denne funksjonen rett og slett integranden.

Brachistochrone problemet



Et spesielt problem fra denne tiden har fått stor betydning for utviklingen av matematikken, nemlig det såkalte brachistochron problemet, lansert av Johann Bernoulli i 1696. Problemet går ut på å finne en kurve som forbinder to punkter i det vertikale planet slik at en kloss som sklir friksjonsløst fra det ene punktet til det andre langs denne kurven bruker kortest mulig tid.

I januar 1697 satte Bernoulli opp en pris:

".. hverken gull eller sølv… heller skal prisen være, siden erkjennelsne er sin egen mest ettertraktede belønning og berømmelse er et kraftfullt insitament, ære, hyllest og anerkjennelse….

En av de som mottok denne utfordringen var Isaac Newton. Klokka fire om ettermiddagen den 29. januar 1697, trøtt etter en hard dag på jobben, fikk Newton Bernoullis brev i hånden, åpnet det, leste det og satt seg ned og begynte å jobbe. Tolv timer senere, men fortsatt i god tid før neste morgengry hadde han løst problemet. Newtons løsning ble publisert i mai samme år, sammen med løsningene til Leibniz, Jakob Bernoulli og Johann Bernoulli. Så det var flere oppegående matematikere på denne tiden og flere av dem hadde et velutviklet konkurranse-instinkt.

Viktige personer

Isaac Newton (1642-1727)

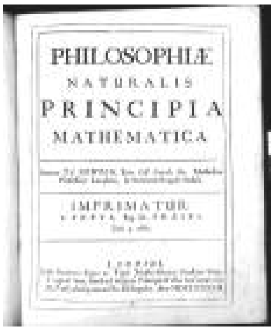
Newton ble født i Woolsthorpe i Lincolnshire. Hans forfedre hadde gjennom generasjoner arbeidet seg opp fra å være fattige bønder til å bli velstående jordeiere, men boklig lærdom var det så som så med, og Newtons far kunne neppe skrive sitt eget navn. Litt bedre stod det til på morsiden — broren til Hannah Ayscough hadde studert i Cambridge og senere blitt sogneprest slik lærde folk gjerne ble på den tiden. Faren døde tre måneder før lille Isaac ble født, og selv var han så svakelig at ingen trodde han ville overleve. Da han var tre år, giftet moren seg på nytt, og Isaac ble overlatt til hennes foreldre. Vi lar amatørpsykologene gruble over hva denne atskillelsen kan ha betydd, men Newton viste hele livet en påfallende uvilje mot å knytte seg nært til andre personer.

I 1661 dro Newton til Cambridge for å studere. I hans dager var det lite som minnet om det elite-universitetet Cambridge har vært til andre tider — pensum var noen foreldede tekster fra middelalderen, og både studenter og lærere var mer opptatt av å leve behagelig enn å dyrke kunnskap. For Newton var ikke dette bare en ulempe — han visste hva han var interessert i, og siden pensum ikke var noe å bry seg om, hadde han tid og anledning til å lese det han ville. Han fikk tak i skriftene til Viète, Descartes og Wallis og satte igang sine studier på egenhånd. I løpet av kort tid mestret han samtidens vitenskap.

Senere skulle Newton se tilbake på denne perioden som sin *prime age for invention*. I løpet av noen få år la han grunnlaget ikke bare for sin integral- og differensialregning, men også for optikken og dynamikken. Det var ensomme og arbeidsomme år — han hadde knapt en omgangsvenn i Cambridge, og han var så opptatt av sine studier at han ofte glemte å spise.

Fra 1666 til 1671 skrev Newton tre manuskripter som kom til å sirkulere blant britiske matematikere. I disse manuskriptene beskriver han sine resultater om uendelige rekker og om derivasjon og integrasjon. Manuskriptene ble aldri trykt — dels fordi Newton på denne tiden var mer interessert i å jobbe med nye ting framfor å finpusse på de gamle gamle, og dels fordi han var så vár for kritikk at han stadig trakk sine manuskripter tilbake.

I 1670-årene var Newton mest opptatt av teologi og alkymi, men i begynnelsen av 1680-årene blomstret hans interesse for fysikk opp igjen. Det er i denne perioden han oppdager den universelle gravitasjonsloven og skriver sitt hovedverk "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*". Arbeidet med denne boken var en voldsom kraftanstrengelse, og i årene som følger vender Newton seg bort fra vitenskapen — han blir innvalgt i parlamentet, og i 1696 sier han opp sitt professorat i Cambridge for å bli leder for Den kongelig mynt i London. I 1703 lar han seg velge til president for Royal Society (Videnskapsakademiet) som han leder med fast hånd til sin død i 1727, men selv om dette vervet førte til at han omsider sammenfattet sine undersøkelser i optikk ("*Opticks*", 1704), drev han ikke lenger systematisk forskning.


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA
IMPRIMATUR
LONDINI

Utifra Cambridge-årene er det lett å tenke seg Newton som en ensom og verdensfjern teoretiker som brukte all sin tid på vitenskapelige sysler. I virkeligheten var han en mann som mestret alt han interesserte seg for — allerede i gutteårene vakte han oppsikt med sine mekaniske konstruksjoner, og som eksperimentalfysiker lagde han sitt utstyr selv. Som leder for Den kongelige mynt viste han ikke bare administrative evner, men også en god nese for å avsløre falskmyntere. Etter at Newton flyttet til London, kom hans niese, Catherine Barton, for å bo hos ham. Hun var vakker, vis og vittig og det naturlige samlingspunktet i ethvert selskap. Man skulle ikke tro at hun var en naturlig husfelle for en gammel eneboer og nevrotisk kranglefant, men de to ser ut til å ha kommet godt ut av det med hverandre. Kanskje var det under hennes innflytelse at Newton i sine siste år deltok aktivt i selskapslivet og ofte inviterte middagsgjester?

Mer enn noen annen er Newton blitt oppfattet som den moderne vitenskapens far. Han er en overgangsfigur mellom to tidsaldere, og på mange måter tilhører han vel så mye den gamle tiden han vokste opp i, som den nye han var med å skape. Han brukte like mye krefter på å studere alkymiens mystiske skrifter som han brukte på matematikk og fysikk, og han var like brennende opptatt av teologi som av naturvitenskap. Uten at noen visste det, var verdens ledende vitenskapsmann en religiøs kjetter — han forkastet læren om den treenige gud, og mente at Bibelen og kirkefedrene var blitt systematisk forfalsket etter kirkemøtet i Nicaea i 325 (der treenighetsdoktrinen ble vedtatt ved avstemning).

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

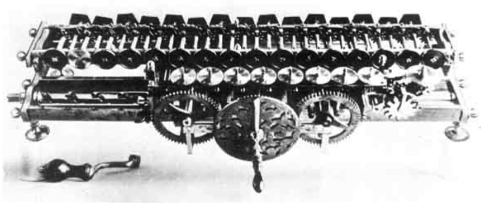
Gottfried Wilhelm Leibniz ble født i Leipzig. Han ble student 15 år gammel, men da han forsøkte å avlegge doktorgraden i 20-årsalderen, ble han avvist av universitetet i hjembyen og måtte ta graden i Nürnberg isteden. Leibniz første store prosjekt var et symbolspråk som skulle fange opp alle aspekter av logisk og vitenskapelig tankegang. Dette prosjektet kunne naturligvis ikke gjennomføres, men det har vært en inspirasjonskilde for fremveksten av matematisk logikk i vårt århundre. Senere ble Leibniz interessert i konstruksjonen av regnemaskiner, og også på dette området har hans tanker hatt stor innflytelse selv om de på hans egen tid ikke kunne gjennomføres fullt ut på grunn av tekniske problemer.

Under et studieopphold i Jena i 1663 hadde Leibniz blitt interessert i matematikk og naturvitenskap — to områder der han ellers hadde liten utdannelse. Da han kom til Paris i 1672 som utsending for kurfyrsten av Mainz, oppsøkte han det vitenskapelige miljøet, og frem for alt Christian Huygens som var allment anerkjent som tidens ledende vitenskapsmann. Huygens ga ham noen problemer å arbeide med, og Leibniz avanserte raskt fra læregutt til en av tidens ledende matematikere. I årene som fulgte arbeidet Leibniz med uendelige rekker og med det som skulle bli hans versjon av differensial- og integralregningen. Han publiserte sine resultater i to artikler i 1682 og 1684, og selv om Newton hadde kjent til lignende resultater i femten år, var dette første gang de ble publisert.

For Leibniz var matematikk bare én av mange interesser, han var også filosof, politiker, jurist, historiker og språkforsker. Han fikk aldri tid til å skrive noen av de store, sammenfattende verkene han planla, og det vi vet om hans tanker, er satt sammen fra kortere artikler og over 1500 brev. De spenner fra det dypsindige til det kuriøse — i et av dem prøver han å overbevise Ludvig XIV om at han absolutt bør starte et felttog mot Egypt. Til tross for at han aldri fikk gitt en samlet fremstilling av sine tanker, må Leibniz regnes som en av de mest innflytelsesrike tenkerne i nyere tid.

Leibniz' og Newtons siste år ble formørket av en meningsløs strid om hvem som egentlig hadde æren for de nye, banebrytende oppdagelsene. Engelske matematikere anklaget Leibniz for plagiat fordi han under et opphold i London i 1676 hadde sett noen av de manuskriptene som Newton sirkulerte, og matematikere på kontinentet anklaget

Newton for plagiat siden han aldri publiserte noe om emnet før lenge etter Leibniz' artikler. I ettertid er det klart at både Newton og Leibniz uavhengig av hverandre kom fram til de samme resultatene, men på hver sin måte og fra hver sin angrepsvinkel. Dessverre førte striden til en varig splittelse i det internasjonale matematikkmiljøet, noe som særlig gikk utover engelske matematikere.



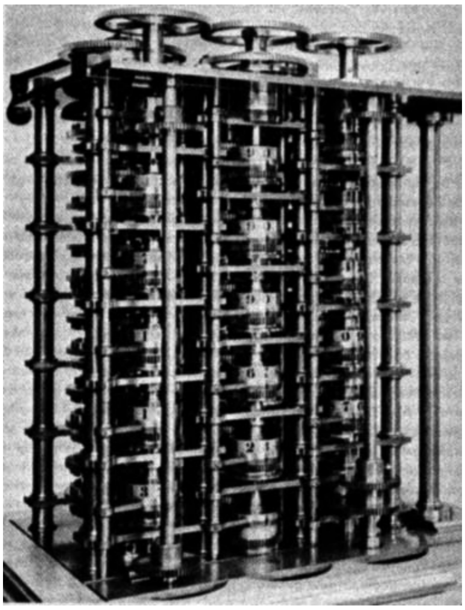
Regnemaskiner

De første regnemaskiner, beskrevet av Babbage

Det er hevet over enhver tvil at utviklingen av datamaskiner er en av de absolutt største landevinninger innen vitenskap i det 20. århundrede. Men selv om det var matematikere som sto bak utviklingen er matematikere blant de siste som har tatt i bruk datamaskiner innen sin egen forskning. Mange foretrekker fortsatt papir og blyant som sitt hovedverktøy, selv om maskinenes fortrinn etter hvert får innpass på flere og flere områder, også innen teoretisk matematikk.

De første regnemaskinene ble beskrevet lenge før dagens elektroniske hurtigtog så dagens lys. Drømmen om å lage mekaniske regnemaskiner finnes allerede i antikken, men det var først i renessansen at de begynte å bygge slike maskiner. Imidlertid fikk ikke disse konstruksjonene noen særlig plass i historien, sannsynligvis fordi datidens teknologi ikke var i stand til å konstruere noe som gode matematikere like godt, og raskt, kunne gjøre for hånd.

Den første moderne regnemaskin er Babbage sin Differensmaskin. Denne maskinen skulle kunne regne ut verdier for polynomiale funksjoner og baserte seg på at ethvert polynom har en høyere derivert som er en konstant funksjon.



Det betyr at funksjonsverdien i et punkt kan beregnes ved en iterert prossess som starter med å summere et passende antall repetisjoner av et bestemt heltall. Babbage fikk støtte fra den britiske regjeringen til å bygge maskinen, men det ble aldri gjort, hovedsakelig fordi Babbage i steden for å bygge en Differensmaskin kastet seg over tegnebrettet og begynte å jobbe med en Analytisk maskin. Denne maskinen hadde en oppdeling i komponenter som minner mye om den oppdelingen dagens avanserte regnemaskiner har. Hovedkomponentene var "lageret" og "mølla". I lageret ble verdien av variablene oppbevart mens mølla gjorde alle kalkulasjonene. I tillegg var det en styringsenhet, kontrollert av et hullkort, en ide Babbage fikk fra tekstilindustrien, der vevemaskinene allerede ble styrt av slike hullkort.

Babbage sin Analytiske maskin ble heller aldri bygget. Sannsynligvis fantes det på den tiden nok teknologisk kunnskap til å bygge den, men denne gangen hadde ikke regjeringen den nødvendige troen på prosjektet. Men Babbage har etterlatt seg en mengde tegninger av maskinen så i dag er det enkelt å bygge den og den ville sannsynligvis fungere bra.

I 1840 holdt Babbage en rekke seminarer i Torino om sine maskiner. Foredragene ble skrevet ned og siden publisert. Noen år etter ble notatene oversatt til engelsk og gitt en utdypning av Ada Byron King, baronesse av Lovelace. I dette arbeidet er det beskrevet med stor nøyaktighet hvordan Babbages maskin virker. Byron King gir en oppskrift på hvordan maskinen skal programmeres, som vi ville sagt i dag. Denne publikasjonen inneholder altså historiens første dataprogram.

Helt konkret tar Byron King for seg Bernoulli-tallene (koeffisientene i rekkeutviklingen til $x/(e^x-1)$). Disse kan bergenes gjennom en rekursiv prosess. Denne prosessen beskriver Byron King bl.a ved hjelp av et flytdiagram, igjen det første i verdenshistorien.

Men Byron King påpeker også i sitt verk at "*den Analytiske Maskinen har ingen pretensjoner om å finne på ting. Den kan gjøre alt vi ber den om dersom vi kan beskrive hvordan den skal gjøre det. Den kan følge en prosedyre, men den kan ikke lære av det den gjør….*"

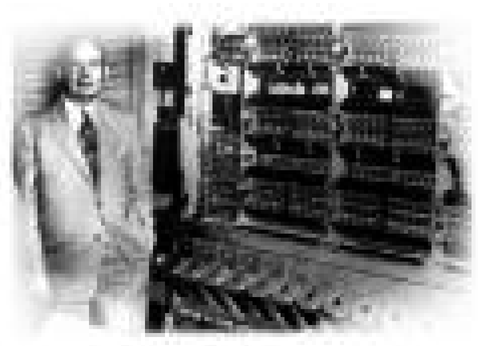
Turing og det teoretiske grunnlaget

Hovedgrunnen til at Babbage sin analytiske maskin og andre liknende konstruksjoner ikke ble realisert var at kostnadene ved en eventuell produksjon ikke sto i forhold til hva man vant i tidsbesparelse. Faktisk var det de to verdenskrigene i det 20. århundre og krigsindustriens behov som ga støtet til utviklingen av de elektroniske datamaskinene. Og selvfølgelig oppfinnelsen av transistoren. Men i tillegg var det teoretiske sider ved problemet som skulle vise seg å ha avgjørende betydning. Blant disse var Alan Turing sine ideer om beregnbarhet.

Turing var interessert i problemet med beregnbarhet, han ønsket gi et presist svar på spørsmålet om hva beregnbarhet er og hva det betyr at en beregning lar seg utføre. Fra en ordinær beregningsprossess trakk han ut de essensielle sidene og formulerte disse i en teoretisk maskin, en såkalt Turing maskin. En Turing maskin har tre ingredienser, en endelig mengde tilstander eller konfigurasjoner, en endelig mengde symboler og en prossess som endrer tilstander og symboler. For å gjennomføre dette mottar maskinen instruksjoner fra en lang tape som passerer gjennom maskinen. Vi skal ikke gå mer inn i detaljene for Turing maskiner, vi nøyer oss med å konstatere at Turing med dette hadde lagt det teoretiske grunnlaget for å konstruerer moderne hurtigvirkende regnemaskiner.

Siste etappe mot elektroniske regnemaskiner

Et annet viktig skritt på veien mot konstruksjonen av våre dagers regnemaskiner var Claude Shannons beskrivelse av kretser av brytere ved hjelp av boolsk algebra. En åpen bryter, hvor altså intet slipper gjennom, gis verdien 1, mens en lukket bryter får verdien 0. Boolsk addisjon representerer porter i serie, mens boolsk multiplikasjon representerer brytere i parallell. Dermed kan sammensetning av brytere representeres ved hjelp av boolsk algebra. Siden boolsk algebra er utstyrt med en mengde regneregler, kan dette brukes til å forenkle bryterkretsene.



Turing og Shannons arbeider var bare to fasetter av et mangfold som la det teoretiske grunnlaget for å konstruere den første elektroniske regnemaskin. Den som fikk æren av å stå som kontruktør av den første maskinen var John von Neumann. Han ledet en forskningsgruppe ved Institute of Advanced Studies i Princeton. Von Neumann var en meget dyktig matematiker som gjorde fremragende arbeider på mange felt og det var ikke tilfeldig at han ble valgt ut til dette arbeidet. Maskinen sto ferdig i 1951 og ble stamfar til alle dagens datamaskiner.

Viktige personer i historien

Charles Babbage (1792-1871)

Charles Babbage er mest kjent for sine konstruksjoner av mekaniske regne-maskiner, og blir ofte omtalt som datamaskinens far.

Han ble født inn i en relativt velstående familie og fikk en solid utdannelse ved universitetet i Cambridge hvor han først og fremst studerte matematikk. Han var imidlertid ikke alltid like fornøyd med undervisningen og han startet en forening for å bringe moderne kontinental matematikk til Cambridge.

Babbage tok eksamen i 1814, og i årene etter skrev han flere viktige matematiske artikler. Etter hvert dreide interessene hans mot astronomi. I 1820 var han helt sentral i stiftelsen av Royal Astronomical Society og hadde siden flere tunge verv i dette selskapet. I 1827 ble Babbage Lucasian Professor i Cambridge, en stilling han satt i i 12 år uten å gjøre den forventede undervisning. Grunnen til at han ikke utførte sin plikt, var at han hadde blitt oppslukt av det som skulle bli hans lidenskap for resten av livet, nemlig utviklingen av mekaniske datamaskiner.

Babbage er uten tvil oppfinneren av prinsippene for dagens datamaskiner. Hans første konstruksjon var en differensmaskin som kunne beregne verdiene til et 2.gradspolynom ved hjelp av differanser. For denne konstruksjonen fikk han gullmedaljen fra Astronomical Society i 1823. Han fortsatte å arbeide med differansemaskinen, men begynte etter hvert også å arbeide med en analytisk maskin.

I 1834 fullførte Babbage den første tegningen av en analytisk maskin, forløperen til den moderne elektroniske datamaskinen. Arbeidet med differansemaskinen hadde ført ham til en mye mer sofistikert idé. Selv om den analytiske maskinen aldri kom lenger enn til tegnebordet er den bemerkelsesverdig lik dagens datamaskiner i sine logiske komponenter. Babbage beskriver fem logiske komponenter, lageret, mølla, kontrollen, input og output. Lageret inneholder alle variablene og alle resultatene av mellomregninger. Mølla svarer til cpu i dagens datamaskin og det er der alle regneoperasjonene blir gjort. Kontrollen sørger for at regneoperasjonene foretas i riktig rekkefølge. Den ble styrt av hullkort, og hullkortene inneholdt programmet for den spesifikke oppgaven.

Ada Byron King (1815-1852)

Augusta Ada Byron King Lovelace var datter av George Gordon, den sjette Lord Byron. Han forlot England 6 uker etter hennes fødsel og de så hverandre aldri igjen. Hun ble oppdratt av sin mor, Anna Isabella Millbanke, som selv hadde studert matematikk og ble derfor eksponert for mer matematikk-undervisning enn noen annen kvinne fra denne tidsepoken.

Som 18-åring traff hun Charles Babbage og begynte å interessere seg for hans Differanse-maskin. Denne interessen resulterte i en oversettelse av hans Torino-forelesninger til engelsk, et verk som hun bygget ut og kompletterte med sine egne arbeider, bla, flytdiagram og og et detaljert maskinprogram for å beregne Bernoulli-tallene

Ada Byron King ble ikke mer enn 37 år gammel.

Alan Turing (1912-1954)

Alan Turing er mest kjent for sitt arbeid innen matematisk logikk og denne teoriens avgjørende betydning for utviklingen av de første datamaskiner. Babbage hadde mer enn 100 år tidligere lansert ideen om en analytisk maskin, noe som regnes som den teoretiske forløperen til vår moderne datamaskin. Alan Turings arbeid innen matematisk logikk gav han muligheten til å gi en presis matematisk definisjon av Babbages konsept. Turing er også kjent for sin innsats innen kryptografi. Under andre verdenskrig var han ledende i arbeidet med knekke kodene til den tyske okkupasjonsmakten.

Turing ble født i London i 1921. I likhet med Babbage fikk han sin utdannelse ved universitetet i Cambridge. Han hadde interesser innenfor flere områder, bl.a. kvante-mekanikk, sannynlighetsregning og logikk og han fikk Smith's Prize i 1936 for arbeider innen sannsynlighetsregning.

På denne tiden utviklet han en interesse for matematikkens grunnlag. Han kjente til arbeidet til Russel og Whitehead: *Principia Mathematica*. I 1931 hadde Gödel vist at det logiske fundamentet matematikken basertes på, ikke var så solid som Russel, Whitehead og andre hadde forutsatt. Noe forenklet kan man si at Gödel hadde vist at det finnes sanne utsagn om hele tall som ikke kan bevises. En annen meget sentral matematiker, Hilbert, formulerte på grunnlag av dette følgende problem: finnes det en metode for å avgjøre om et utsagn kan bevises eller ikke?

Turing viste at en slik metode ikke finnes. I denne prosessen var det viktig å presisere betydning av ordet "metode", og dette ledet til de svært viktige begrepene Turing-maskin og universel Turing-maskin. Turing-maskinen kan betraktes som en formell definisjon av et dataprogram og en universel Turing-maskin tilsvarer da en datamaskin.

Under 2. verdenskrig jobbet Turing med å knekke koder for den britiske etteretningstjenesten, og han var svært aktiv i arbeidet som gjorde at meldinger kryptert med Enigma, den tyske kodemaskinen, kunne dekrypteres av engelskmennene.

Etter 2. verdenskrig jobbet Turing bl.a. med å bidra til å lage en virkelig datamaskin basert på de teoretiske modellene.

Turing var homofil og ble arrestert i 1952 på grunn av sin legning. Han godtok østrogen-behandling, og unnslapp dermed fengselsstraff. Han utviklet sterke depresjoner, i 1954 begikk han selvmord.

John von Neumann (1903-1957)

Von Neumann var opprinnelig ungarer, født i Budapest av velstående foreldre. Han hadde sin doktorgrad fra universitetet i hjembyen og underviste deretter i Hamburg og Berlin, før han i 1930 ble hentet til Institute of Advanced Studies i Princeton, USA hvor han virket til sin alt for tidlige død, bare 54 år gammel.

Von Neumann var en av de siste matematikerne som var like hjemme i ren som i anvendt matematikk. Opp gjennom årene produserte han en strøm av arbeider innen begge grener av matematikken. Som renmatematiker var det spesielt innen analyse og kombinatorikk han gjorde seg bemerket, med en fabelaktig evne til å se gjennom svært komplekse problemer for så å trekke ut de riktige aksiomene for å etablere en matematisk teori.

Hans talent innen anvendt matematikk kom amerikanerne godt til nytt under og etter den andre verdenskrigen. Han var bl.a. sentral i arbeidet med å konstruere den aller første elektroniske datamskin,

Alle dedelene av matematikkhistorien vi ikke har sett på, en avslutning

Denne gjennomgangen av matematikk-historien må nødvendigvis bli ganske avrundet i kantene i tillegg til at det er mange områder og personer som ikke er blitt nevnt. En slik prioritering betyr ikke at de delene av historien og de matematikerne ikke er betydningsfulle. Det betyr bare at i forhold til den målgruppen som dette kurset er myntet på, så er det kanskje de områdene vi har behandlet som er de mest relevante.

Vår historiegjennomgang stopper mer eller mindre opp på begynnelsen av 1800-tallet. Faktum er at størstedelen av det matematiske universet er beskrevet etter denne tiden. Mye av det er nokså komplisert og krever mye matematikk-teknisk innsikt og egner seg derfor dårlig i et slikt kurs. Andre emner er tatt bort av rene plasshensyn. Men det finnes masse litteratur på området og er man interessert er det bare å sette i gang å finne bøker og nettsteder og lese.

Men for ikke å bli beskyldt for å ignorere fullstendig de siste 200 årenes matematikk skal vi helt til slutt ta med tre biografier over matematikere som har betydd mye, både for sin samtid og sin ettertid. Igjen er dette et utvalg som sikkert kan diskuteres, det kan jo være opp til hver enkelt å bedømme.

Georg Cantor (1845-1918)

Georg Cantor regnes som grunnleggeren av teorien for uendelige mengder, en teori som fikk stor betydning for matematikkens utvikling på 1800-tallet.

Cantor ble født i St. Petersburg av jødiske foreldre. Han viste tidlig store evner og 18 år gammel begynte han sine studier hos framstående matematikere, blant andre Weierstrass og Kronecker, ved det berømte universitetet i Berlin.

Innføring av mengdeteorien som et grunnlag for matematikken var på ingen måte noen enkel affære. Noen av Cantors samtidige kalte hans mengdelære for "en alvorlig matematisk sykdom" som måtte kureres, mens andre mente han hadde skapt et "nytt paradis" for matematikerne.
Skarpest i sin kritikk var Kronecker, han kunne aldri like begrepet transfinite tall.

I 1873 viste Cantor at de rasjonale tallene er tellbare, det vil si at det er en en-til-en korrespondanse med de naturlige tallene. Han viste også at de algebraiske tallene er tellbare og at de reelle tallene ikke er.

Kritikken Cantor fikk fra kolleger for sine dristige teorier gjorde at han på slutten av livet led av depresjoner. Kanskje spile også hans fortvilelse over å ikke kunne bevise kontinuumshypotesen inn. Dessverre fikk Cantor aldri oppleve at mengdebegrepet hans ble godtatt som det naturlige grunnlag og fundament i matematikken.

Ved Niels Henrik Abel-jubileet i 1902 ble Cantor utnevnt til æresdoktor ved Universitetet i Oslo.

Georg F.B. Riemann (1826-1866)

Georg Friedrich Bernhard Riemann ble født 7. september 1826 i fyrstedømmet Hannover (i Tyskland), og døde i Italia 7. juni 1866. Hans arbeider ga nye og mer geometriske synspunkter på funksjonsteorien, en ny forståelse av grunnlaget for geometrien, og de ga det første store bidraget til analytisk tallteori.

Riemanns far var prest, og den første skolegangen fikk Bernhard av ham. Siden flyttet han hjemmefra for å gå på gymnasium i Lüneburg. Gutten var uvanlig begavet, og leste matematikkbøker langt ut over skolepensum. Legendres tallteori behersket han etter en ukes arbeid. Men skolegangen var ikke bare lykkelig, han var sjenert, lite selvsikker, og lengtet hjem. 19 år gammel begynte han ved universitetet i Göttingen for å studere teologi og filologi, slik faren ønsket. Men han tvilte på sine evner som predikant, og skiftet til matematikk og realfag, selv om utsiktene til et levebrød da ble dårligere.

I Göttingen var det C. F. Gauss som styrte med matematikken. Han var verdensberømt, 70 år gammel, og ikke særlig interessert i undervisning. Riemann var alt for beskjeden til å søke nærmere kontakt med en så opphøyet person. Miljøet i Berlin, med C. G. Jacobi og G. Dirichlet i spissen, var mer tilgjengelig, og Riemann tilbragte to år der. Sin doktorgrad tok han i Göttingen i 1851, og ble så "Privatdozent", det vil si at han underviste mot betaling fra studentene, etter et par år fikk han også et lite bidrag fra universitetet. Han brukte mye tid og strev på sin undervisning, men syntes det var vanskelig å tilpasse seg studentenes fatteevne.

Samtidig arbeidet han som assistent ved laboratorieundervisningen i fysikk. Det førte til et nært vennskap med fysikeren Wilhelm Weber, og til forskning i elektrisitetslære, mekanikk og akustikk. Riemanns arbeid med lydbølger åpnet nye veier for studiet av sjokkbølger, mer generelt for håndtering av ikke-lineære partielle differensiallikninger. Et arbeid som han aldri rakk å fullføre gjaldt ørets mekanikk, et annet en felles teori for gravitasjon og elektromagnetisme.

Riemanns første trykte arbeid, hans doktoravhandling, ga nye geometriske synspunkter på teorien for funksjoner av en kompleks variabel. Problemet med "flertydige funksjoner" (kvadratrøtter er de enkleste slike), taklet han ved å definere dem på det som nå heter en Riemannsk flate i stedet for bare i det komplekse planet. Han bygget mye på at disse funksjonene er vinkelbevarende (konforme), og altså oppfyller "Cauchy-Riemanns differensiallikninger", og på at de er entydig bestemt overalt så snart de er kjent på et lite linjestykke. Et berømt enkeltresultat er "Riemanns avbildningssats". Ideene fra denne avhandlingen brukte han senere til å videreføre Abels og Jacobis arbeider om algebraiske integraler og Gauss' om hypergeometriske rekker.

Også Riemanns eneste arbeide i tallteori (9 sider!) bygger på funksjonsteorien. Euler hadde 100 år tidligere observert at summen av alle n^{-s}, der n gjennomløper de naturlige tallene, og s er et gitt tall større enn 1, har nær sammenheng med hvordan primtallene er fordelt. Riemann viste at denne summen, som funksjon av s , faller sammen med en funksjon som er definert for alle komplekse s, unntatt for s =1. Den heter nå Riemanns zeta-funksjon. Han fant at den er lik null når s er et negativt partall, og at alle dens andre nullpunkter har sin realdel mellom 0 og 1. Det ga ham en rekkeutvikling for fordelingsfunksjonen for primtallene, og støttet opp kjente gjetninger av Gauss og Legendre. Riemann gjettet at alle de komplekse nullpunktene har realdel eksakt lik 1/2, og det har senere vist seg at hvis det er riktig, vil man kunne si mye mere om primtallene. Men denne "Riemanns hypotese" er fortsatt ikke bevist og står som en av de store utfordringene for våre dagers matematikere.

For å bli privatdosent måtte Riemann levere en avhandling, kalt "habilitasjonsskrift," og holde en prøveforelesning. Som tema for avhandlingen valgte han trigonometriske rekker. Emnet var grundig studert tidligere, og Riemann innledet med en meget leseverdig historikk, som munner ut i et helt fundamentalt spørsmål: Hva menes egentlig med "integralet av en funksjon"? Cauchy's definisjon av integralet er god nok så lenge det bare er snakk om kontinuerlige funksjoner, men den er ubrukelig hvis man ikke vet på forhånd at funksjonen man vil integrere er kontinuerlig. Det gjelder blant annet summer av trigonometriske rekker. Riemann snudde på problemet og undersøkte hva som må kreves av en funksjon for at det skal ha en fornuftig mening å snakke om å integrere den. Det førte ham til det som nå heter "Riemann-integralet", til en bedre teori for

Fourierrekker, og, minst like viktig, til nye synspunkter på integrasjonsteorien.

Til prøveforelesningen for "habilitasjonen" skulle han foreslå tre emner som fakultetet, i praksis Gauss, skulle velge mellom. To av dem hadde han noenlunde klare, det tredje, om geometriens grunnlag, var bare en løs skisse. Gauss valgte dette siste, visstnok fordi han ville se hva en så ung mann kunne gjøre ut av et så vanskelig emne. Foredraget, "Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" ("Om hypotesene som geometrien bygger på"), ble et av de mest berømte i matematikk-historien. Tanker som Riemann la fram der ble grunnleggende i senere geometrisk arbeide, blant annet Einsteins generelle relativitetsteori.

Gauss døde i 1855, hans etterfølger Dirichlet døde 4 år etter, og i 1859 ble Riemann professor, med fast stilling, fast lønn, og bolig i observatoriet. Da kunne han gifte seg (i 1862, med en venninne av søstrene) og året etter fikk paret en datter. Dessverre ble gleden kortvarig, han hadde tuberkulose, og selv om han i sine siste år var mye i Italia, der klimaet var bedre enn i Göttingen, døde han allerede i 1866, i en liten by ved Lago Maggiore.

David Hilbert (1862-1943)

David Hilbert tok etter tur for seg mange områder av matematikken, løste noen viktige problemer i hvert av dem, og etterlot det i mer avklaret form enn han fant det. Hans foredrag på den internasjonale matematikerkongressen i 1900 om uløste problemer i matematikken inspirerte mye av utviklingen gjennom århundredet som fulgte. Han drev et meget aktivt forskningsseminar som gjorde Göttingen til et knutepunkt for tidens matematikk og fysikk. Hans elever var mange og gode, og ble en drivkraft i europeisk, og fra1930-årene av også i amerikansk matematikk.

Hilbert var født i Königsberg i Østpreussen (nå Kaliningrad i Russland) i 1862, gikk på skole og studerte der, tok sin doktorgrad i 1885, og underviste ved universitetet der til han ble kalt til Göttingen i 1895. I Göttingen forble han til sin død.

Hilberts første arbeider gjaldt algebraiske likninger, det ledet ham etter noen år over til tallteori. Begge stedene supplerte han tidens vanlige intrikate regnetekniske metoder med mer slagkraftige, generelle og begrepsmessige tankebaner. Merkestener er hans "*Basissatz*" fra 1888 og "*Zahlbericht*" fra 1893. Ideene var uvante, og den første tiden kontroversielle, men de bidro til et tidsskifte i disse områdene

Euklids klassiske oppbygging av plangeometrien fra et lite antall aksiomer har vært en modell for matematisk arbeid i mer enn to tusen år, selv om det tidlig ble klart at Euklids versjon har sine svakheter. I boka "*Grundlagen der Geometrie*" fra 1899 drøfter Hilbert dette aksiomsystemet, forbedrer det og behandler plangeometrien ut fra et mer moderne ståsted. Boka ble en drivkraft for å gjøre samtiden mer fortrolig med aksiomatisk arbeidsmåte, og for reformer i skolematematikken.

Til matematikerkongressen i Paris i år 1900 ble Hilbert bedt om å beskrive sine ideer om hvordan matematikken ville utvikle seg i det nye århundredet. Foredraget endte med en liste på 23 problemer som han mente ville være sentrale i tiden framover, og de har vært en inspirasjon for matematikere gjennom hele 1900-tallet.

I 1901 ble Hilbert oppmerksom på Ivar Fredholms arbeider om integrallikninger. Han så at de, sammen med arbeider av blant andre Frederic Riesz og Erhard Schmidt om ortogonalrekker, kunne bygges inn i en mer generell formulering av store deler av analysen. Området, som fikk navnet funksjonalanalyse, med "Hilbertrom" som et sentralt begrep, ble et uunnværlig redskap i den revolusjonen i fysikken som skjedde i årtiene omkring 1920. Boka "*Methoden der Mathematischen Physik*" (1924) av Hilbert og Richard Courant ble det matematiske standardverket for tidens fysikere.

Fra 1910 av arbeidet Hilbert noen år mest med matematisk fysikk, først med statistisk mekanikk, så med feltlikninger og generell relativitetsteori, der han fant de samme likningene som Einstein, nesten samtidig.

Ønsket om å aksiomatisere matematikken (og fysikken) førte ham tilbake til grunnlagsforskningen som han hadde innledet med geometriboka. Håpet var at han ved å presisere aksiomer og slutningsregler skikkelig, ville kunne bevise at korrekte matematiske utledninger aldri kan føre til selvmotsigelser. Det resulterte i to bøker som har vært sentrale for logikerne, "*Grundlagen der Mathematik*" og"*Grundzüge der mathematischen Logik*", bedre kjent under oppnavnene Hilbert-Bernays og Hilbert-Ackermann, etter to yngre medarbeidere. Men målet han hadde satt seg, er dessverre uoppnåelig, det følger av en sats av Kurt Gödel fra 1930.

Omkring 1930 ble det klart at Hilbert var syk med perniciøs anemi, som til da hadde vært en uhelbredelig sykdom. Men nye medisiner ble kjent akkurat tidsnok til at han fikk leve i 13 år til. Han døde i 1943 i Göttingen.

Kilder:

[1] Victor J. Katz: A History of Mathematics, HarperCollins, 1993

[2] http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics.html