Sannsynlighetsregning og kombinatorikk
MAT0100V våren 2016

Ørnulf Borgan
Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

1 Innledning og litt historie

Flere almanakker viser hvilke dager det er fullmåne og når sola står opp og når den går ned ulike steder i landet vårt. Det er mulig siden astronomene kan gi en nøyaktig matematisk beskrivelse av himmellegemenes bevegelser. Dermed kan de regne ut når vi får fullmåne og når det blir soloppgang og solnedgang. De har til og med funnet ut at vi i Norge vil få neste totale solformørkelse 16. oktober 2126! Hendelser som fullmåne, soloppgang/solnedgang og solformørkelse kan forutsies – de er *deterministiske*.

Når vi kaster en terning, vet vi ikke hvor mange øyne vi vil få. Vi vet heller ikke hva vinnertallene blir ved neste ukes lottotrekning. Terningkast og lottotrekning er eksempler på det vi kaller *tilfeldige forsøk*. Det er også et tilfeldig forsøk når vi ser om et nyfødt barn er en gutt eller en jente. For heller ikke da vet vi resultatet på forhånd (hvis ikke barnets kjønn er blitt avklart i løpet av svangerskapet ved en kromosomtest eller en ultralydundersøkelse). Det avgjørende kjennetegnet på et tilfeldig forsøk[1] er altså at vi ikke kan si på forhånd hva resultatet vil bli. Vi vet bare hvilke resultater som *kan* forekomme.

Selv om vi ikke kan vite hvor mange øyne vi vil få når vi kaster en terning, vil vi oppdage en regelmessighet hvis terningen kastes mange ganger. I omtrent en seksdel av kastene vil vi få en sekser. En lignende regelmessighet finner vi også for andre tilfeldige forsøk. For eksempel vil andelen av de nyfødte som er jenter være omtrent den samme hvert år. Det er den regelmessigheten vi observerer når et tilfeldig forsøk gjentas mange ganger som gjør det mulig å lage en meningsfylt "matematikk for tilfeldigheter" – for det er nettopp det sannsynlighetsregningen er.

[1] Merk at vi bruker ordet "forsøk" i en videre betydning enn en er vant til fra laboratorieøvelser i biologi, fysikk og kjemi.

1.1 Litt historikk

Menneskene har hatt terninger i flere tusen år. Den eldste formen for terning ble lagd av en liten knokkel – kalt astragalus – fra foten på en sau eller hund. Terningene ble brukt til ulike former for spill. I mange samfunn ble terningkast og andre former for loddtrekning også brukt for å komme fram til riktig avgjørelse på et vanskelig problem. Tanken var at avgjørelsen da ble overlatt til høyere makter. For eksempel kastet disiplene lodd om hvem som skulle erstatte Judas (Ap 1, 23-25). Et annet eksempel på slik bruk av terningkast er gitt i Snorres kongesagaer. Der beskrives det hvordan Olav den Hellige og svenskekongen kastet terning for å avgjøre om en bygd skulle høre til Norge eller Sverige (Olav den Helliges saga, kapittel 94.)

De religiøse forestillingene knyttet til terningkast og andre former for loddtrekning var ikke i samsvar med tanken om at resultatet er tilfeldig. Det er nok en viktig grunn til at sannsynlighetsregningen først fikk sitt gjennombrudd for omtrent 350 år siden. En fransk adelsmann – Chevalier de Méré – henvendte seg i 1654 til den franske matematikeren og filosofen Blaise Pascal (1623-1662) for å få hjelp med noen problemer knyttet til spill. Brevvekslingen mellom Pascal og matematikeren Pierre de Fermat (1601-1665) om de Mérés problemer blir regnet som det historiske gjennombruddet for sannsynlighetsregningen.

Brevvekslingen mellom Pascal og Fermat omhandlet særlig det såkalte delingsproblemet. En beskrivelse av delingsproblemet er som følger: To spillere legger 50 kroner hver i en "pott". Spillerne kaster så et kronestykke flere ganger. Lander det på krone, får spiller A ett poeng. Lander det på mynt, får spiller B ett poeng. Kast med kronestykke kan erstattes med et vilkårlig spill som går over flere omganger, så lenge vi antar at de to spillerene har like stor sjanse for å vinne i hver omgang. Førstemann til 10 poeng vinner spillet og får hele potten. Av en eller annen grunn må spillet avbrytes når spiller A har fått 8 poeng og spiller B har fått 7 poeng. Hvordan skal de dele potten?

Til å begynne med var sannsynlighetsregningen inspirert av spillproblemer. Men utover på 1700-tallet vendte interessen seg også mot andre områder. For eksempel ble livsforsikring vanligere blant de velstående, og da ble det nødvendig å bestemme sannsynligheten for at en person skulle leve et gitt antall år til. I dag brukes sannsynlighetsregningen på en rekke områder – blant annet danner den grunnlaget for statistiske metoder som brukes til å fortolke data fra det virkelige liv.

2 Sannsynlighetsbegrepet

I dette avsnittet skal vi se nærmere på hva sannsynlighet er. Vi vil først se på det klassiske sannsynlighetsbegrepet til Pascal og Fermat (avsnitt 2.2). Det viste seg fort at det klassiske sannsynlighetsbegrepet, som er motivert av anvendelser i spill, er for snevert til å håndtere alle de situasjonene en står ovenfor. Etter hvert kom en til at sannsynligheten for en begivenhet skal forstås som den andelen ganger begivenheten inntreffer "i det lange løp" (avsnitt 2.3). Det er også den vanlige fortolkningen av sannsynlighetsbegrepet i dag. Siden matematikken er et deduktivt fag, hvor resultatene bygger logisk på hverandre, er det imidlertid ikke mulig å bygge en matematisk teori for sannsynlighet på en slik empirisk forståelse. Men en formell matematisk definisjon av sannsynlighetsbegrepet kan motiveres ut fra denne empiriske forståelsen (avsnitt 2.4).

Før vi går i gang med å se nærmere på sannsynlighetsbegrepet, trenger vi imidlertid å innføre noe terminologi knyttet til tilfeldige forsøk (avsnitt 2.1).

2.1 Utfallsrom og hendelser

Terningkast er eksempel på et tilfeldig forsøk. Det er også et tilfeldig forsøk når vi ser om et nyfødt barn er en gutt eller en jente, eller når vi spør en person om hvilket politisk parti han eller hun vil stemme på.

Når vi gjør et tilfeldig forsøk, vet vi ikke på forhånd hva resultatet vil bli. Men vi kan angi de mulige resultatene, eller *utfallene* for forsøket. Når vi kaster en terning, kan vi få 1, 2, 3, 4, 5 eller 6 øyne. Disse seks mulige resultatene er utfallene ved terningkast. Mengden av alle utfallene for et tilfeldig forsøk kaller vi *utfallsrommet* U. Utfallsrommet ved terningkast er altså $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Eksempel 2.1. Vi er interessert i om et nyfødt barn blir en gutt (G) eller en jente (J). Utfallene er G og J, og utfallsrommet er $U = \{G, J\}$.

Eksempel 2.2. Vi er interessert i om et svangerskap gir ett barn, tvillinger, eller trillinger. (For enkelhets skyld regner vi firlinger, femlinger, osv. sammen med trillinger.) Utfallene er "ett barn", "tvillinger" og "trillinger", og utfallsrommet er $U = \{\text{ett barn, tvillinger, trillinger}\}$.

Eksempel 2.3. En meningsmåler spør en person om hvilket parti han eller hun vil stemme på. De mulige svarene eller utfallene er Rødt, Sosialistisk Venstreparti (SV), Arbeiderpartiet (Ap), Senterpartiet (Sp), Kristelig Folkeparti (KrF), Venstre (V), Høyre (H), Fremskrittspartiet (Frp), Miljøpartiet De Grønne (MDG) og Andre. (For enkelhets skyld ser vi bort fra de som ikke vil stemme.) Utfallsrommet er $U = \{\text{Rødt, SV, Ap, Sp, KrF, V, H, Frp, MDG, Andre}\}$.

Eksempel 2.4. Vi kaster en terning til vi får sekser og registrerer hvor mange kast vi må gjøre. Vi kan få sekseren i første kast, eller i andre kast, eller i tredje kast, osv. Utfallene for forsøket er 1, 2, 3, 4, $\ldots$, og utfallsrommet er

$U = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

I disse eksemplene er utfallsrommet *diskret*. Det betyr at det enten er endelig mange utfall i utfallsrommet (som i eksemplene 2.1–2.3), eller at det er uendelig mange utfall som kan skrives opp i en liste slik at prikkene "..." ikke er til å misforstå[2] (som i eksempel 2.4).

En kan også være interessert i situasjoner der utfallsrommet er et intervall på tallinja (eventuelt hele tallinja). Da sier vi at utfallsrommet er *kontinuerlig*. Eksempler på situasjoner med kontinuerlig utfallsrom er når vi registrerer fødselsvekten til en nyfødt jente eller når vi måler høyden til en norsk rekrutt. Vi vil i dette kompendiet imidlertid begrense oss til å se på situasjoner der utfallsrommet er diskret.

Vi vil ofte være interessert i et resultat av et tilfeldig forsøk som svarer til flere utfall. Ved terningkast kan vi for eksempel være interessert i om vi får minst fem øyne. Et resultat av et forsøk som svarer til ett eller flere utfall, kaller vi en *hendelse*. Hendelsen "minst fem øyne" består av utfallene 5 og 6. Kaller vi denne hendelsen for A, kan vi skrive $A = \{5, 6\}$.

Eksempel 2.5. Vi er interessert i hvor mange barn et svangerskap gir; jf. eksempel 2.2. Hendelsen $F =$ "flerfødsel" består av utfallene "tvillinger" og "trillinger". Altså har vi $F = \{\text{tvillinger, trillinger}\}$.

Eksempel 2.6. Vi ser på meningsmålingen i eksempel 2.3. Arbeiderpartiet, Sosialistisk Venstreparti og Senterpartiet kalles ofte de rød-grønne partiene. Hendelsen at en person i en meningsmåling vil stemme rød-grønt, består av utfallene Ap, SV og Sp. Hvis vi lar R være hendelsen at personen vil stemme rød-grønt, har vi altså $R = \{\text{Ap, SV, Sp}\}$.

Eksempel 2.7. Vi kaster en terning til vi får sekser og registrerer hvor mange kast vi må gjøre; jf. eksempel 2.4. Vi ser på hendelsene $A =$ "høyst tre kast" og $B =$ "minst fem kast". Da er $A = \{1, 2, 3\}$ og $B = \{5, 6, 7, \ldots\}$.

Eksempel 2.8. Vi kaster et kronestykke og en femkrone og ser for hvert pengestykke om vi får "mynt" eller "krone". Det er fire utfall ved dette forsøket: Krone på begge pengestykkene (KK), krone på kronestykket og mynt på femkronen (KM), mynt på kronestykket og krone på femkronen (MK), og mynt på begge pengestykkene (MM). Utfallsrommet er $U = \{KK, KM, MK, MM\}$.

Hendelsen $A =$ "nøyaktig en mynt" består av utfallene KM og MK. (Merk at vi ikke bryr oss om hvilket av pengestykkene som blir mynt og hvilket som

[2] I dette tilfellet sier vi at utfallsrommet er *tellbart uendelig*.

blir krone.) Hendelsen $B =$ "mynt på kronestykket" består av utfallene MK og MM. Vi har altså $A = \{KM, MK\}$, og $B = \{MK, MM\}$.

For å få fram at det er forskjell på utfallene KM og MK har vi latt ett av pengestykkene være et kronestykke og ett være en femkrone. Det blir imidlertid samme utfallsrom om vi kaster to kronestykker, men da må vi skille mellom første og andre kronestykke.

Eksempel 2.9. Vi kaster en hvit og en rød terning og ser hvor mange øyne hver av dem viser. Hvis vi for eksempel får en firer på den hvite terningen og treer på den røde, skriver vi resultatet som $(4, 3)$. Utfallsrommet kan da gis som $U = \{(h, r) \,|\, h, r = 1, 2, \dots 6\}$. Det består av 36 utfall.

For dette forsøket kan vi for eksempel være interessert i hendelsen $A =$ "sum øyne lik sju". Denne hendelsen kan skrives

$$A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

For å få fram at det er forskjell på utfallene $(4, 3)$ og $(3, 4)$ har vi latt en terning være hvit og en terning være rød. Det blir imidlertid samme utfallsrom om de to terningene er like, men da må vi skille mellom første og andre terning.

Vi merker oss at det vi kaller utfall og utfallsrom i sannsynlighetsregningen kalles elementer og grunnmengde i mengdelæren. En hendelse er altså en delmengde av utfallsrommet.

2.2 Det klassiske sannsynlighetsbegrepet

De første arbeidene om sannsynlighetsregning var motivert av problemstillinger i spill, og det sannsynlighetbegrepet de brukte var tilpasset disse problemstillingene.

La oss illustrere tankegangen med et enkelt eksempel. Når vi kaster en terning er det seks *mulige* utfall, nemlig 1, 2, 3, 4, 5 og 6. Hvis terningen er lagd av et homogent materiale, er det ingen grunn til å tro at en av de seks sidene skal ha større sjanse for å vende opp når terningen kastes enn de andre. Et slikt symmetriargument fører dermed til at alle de seks utfallene må ha samme sannsynlighet. Siden sannsynligheten er lik én (eller 100%) for at en eller annen av de seks sidene vil vende opp, må hver av de seks utfallene ha sannsynlighet $1/6$ for å inntreffe.

Hva er så sannsynligheten for å få odde antall øyne når vi kaster terningen? Hendelsen "odde antall øyne" $= \{1, 3, 5\}$ inntreffer hvis ett av utfallene 1, 3 eller 5 inntreffer. Vi sier at de tre utfallene er *gunstige* for hendelsen "odde antall øyne". Siden tre av de seks mulige utfallene er gunstige for "odde antall øyne", er sannsynligheten for denne hendelsen lik $3/6$, dvs. 50%.

Vi kan gi en generell formulering av argumentet ovenfor. Betrakt et tilfeldig forsøk hvor utfallsrommet består av m utfall, og anta at alle de m mulige utfallene er like sannsynlige. Da har hvert av dem sannsynlighet $1/m$ for å inntreffe. Vi ser så på en hendelse A som består av g utfall. De g utfallene er de gunstige utfallene for A. Sannsynligheten for hendelsen A er da

$$P(A) = \frac{g}{m} \tag{2.1}$$

Skrivemåten $P(A)$ for sannsynlighet kommer av det engelske "probability".

Eksempel 2.10. Vi kaster et kronestykke og en femkrone og ser for hvert kast om vi får krone eller mynt; jf. eksempel 2.8. Dette forsøket har $m = 4$ utfall som alle er like sannsynlige. Vi er interessert i hendelsen A = "en mynt og en krone" = $\{KM, MK\}$. Denne hendelsen består av $g = 2$ utfall. Dermed er $P(A) = 2/4 = 0.50$.

Eksempel 2.11. Vi kaster en hvit og en rød terning og ser hvor mange øyne hver av dem viser; jf. eksempel 2.9. Dette forsøket har $m = 36$ utfall som alle er like sannsynlige. Hendelsen A = "sum øyne lik sju" betår av de $g = 6$ utfallene $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$ og $(6, 1)$. Dermed er $P(A) = 6/36 = 1/6 = 0.167$. Sannsyligheten er 16.7% for at summen av antall øyne blir sju.

Den klassiske definisjonen (2.1) av sannsynlighet fungerer for de fleste spill og i endel andre situasjoner. Men definisjonen er for restriktiv til å kunne brukes i situasjoner hvor utfallsrommet er uendelig (som i eksempel 2.4). Og selv når utfallsrommet er endelig er den ikke til hjelp når det ikke er rimelig å anta at utfallene er like sannsynlige (som i eksempel 2.2). Vi har derfor bruk for et mer generelt sannsynlighetsbegrep.

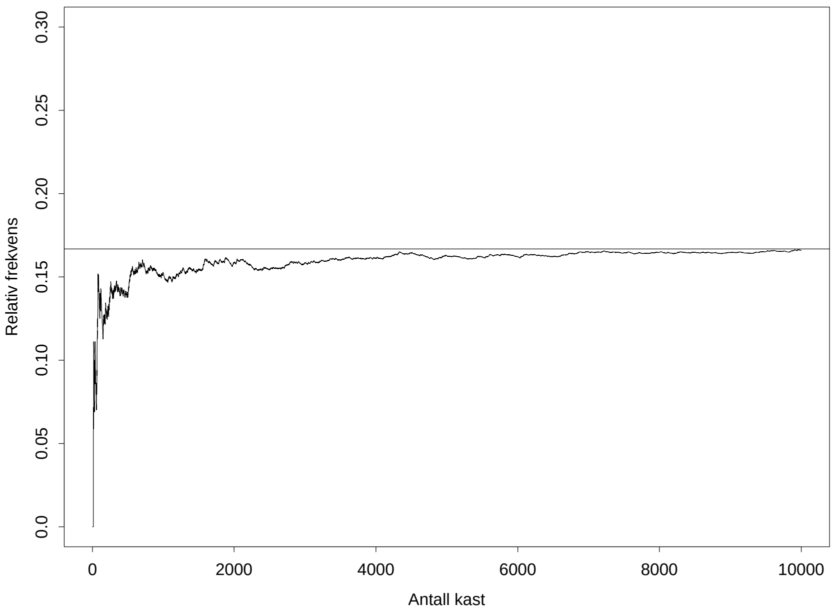
2.3 Sannsynlighet som relativ frekvens i det lange løp

Hva betyr egentlig at sannsynligheten er $1/6$ for å få sekser når vi kaster en terning? Det betyr *ikke* at hvis vi kaster en terning 6 ganger, så vil vi få nøyaktig én sekser. Det *betyr* at hvis vi kaster mange ganger, så vil vi få sekser i omtrent en sjettedel eller 16.7% av kastene.

For å illustrere dette har vi (ved hjelp av datamaskin) kastet en terning 10000 ganger. Etter N kast er den *relative frekvensen* av seksere

$$r_N(6) = \frac{\text{antall seksere i } N \text{ kast}}{N}$$

Figur 1 viser den relative frekvensen som funksjon av N. Vi ser at variasjonen i den relative frekvensen er ganske stor til å begynne med. Men etterhvert stabiliserer den seg nær $1/6 = 0.167$.



Figur 1: Relativ frekvens av seksere i 10000 terningkast.

Hva er sannsynligheten for at et nyfødt barn er en jente? Noen vil kanskje tro at det blir født like mange gutter som jenter slik at sannsynligheten er 50%. Hvis du ser etter i Statistisk årbok (`www.ssb.no/aarbok/`) vil du se at det ikke er tilfellet. Hvert år blir det født litt færre jenter enn gutter, og fordelingen mellom kjønnene er forholdsvis lik fra år til år. At variasjonen er så liten skyldes at det er mange fødsler hvert eneste år. I sekstiårsperioden 1951–2010 ble det født 3566440 barn i Norge, og av disse var 1733407 jenter[3]. Den relative frekvensen av jentefødsler i femtiårsperioden var derfor $1733407/3566440 = 0.486$.

Den relative frekvensen av seksere vil være omtrent $1/6$ når vi kaster en terning mange ganger, og den relative frekvensen av jenter blant alle nyfødte er hvert år omtrent 48.6%. Det er to eksempler på et fenomen som observeres gang på gang – et fenomen som er en forutsetning for å forstå hva sannsynlighet er:

Vi er interessert i en hendelse A i et tilfeldig forsøk. Forsøket gjentas under like betingelser. Da vil den relative frekvensen av hendelsen A nærme seg en grenseverdi når forsøket gjentas mange ganger. Denne grenseverdien er sannsynligheten $P(A)$ for hendelsen A.

Rent språklig er ordet sannsynlighet knyttet til ett forsøk. Vi sier at sannsynligheten for å få sekser ved et terningkast er $1/6$ og at sannsynligheten for at et nyfødt

[3]Tallene er beregnet ut fra opplysninger i Statistisk årbok.

barn skal være en jente er 0.486. Det vi egentlig uttaler oss om er imidlertid ikke et enkelt kast eller en enkelt fødsel, men hva som vil skje "i det lange løp". I det lange løp vil 16.7% av terningkastene gi sekser og 48.6% av de nyfødte vil være jenter. *Sannsynlighet er altså det samme som relativ frekvens i det lange løp.*

Merk at en forutsetning for at sannsynligheten for en hendelse skal være lik relativ frekvens i det lange løp, er at det tilfeldige forsøket gjentas under like betingelser. Hvis forsøksbetingelsene endres, vil også sannsynligheten for hendelsen bli en annen. Et enkelt eksempel er terningkast. Sannsynligheten 1/6 for sekser forutsetter at terningen kastes slik at den snurrer rundt mange ganger før den blir liggende. Hvis den i stedet "kastes" ved at den slippes med sekseren øverst fra to centimeters høyde, vil sannsynligheten være mer enn 16.7% for sekser. Et annet eksempel er trillingfødsler. Andelen svangerskap som gir trillingfødsel har økt siden midten av 1980-årene. Det kommer av at det er blitt vanligere med kunstig befruktning der flere befruktede egg blir satt inn i kvinnens livmor.

Ovenfor har vi fortolket sannsynligheten for en hendelse som grenseverdien av den relative frekvensen i det lange løp. Sannsynlighet forstått på denne måten kalles enkelte ganger *frekventistisk sannsynlighet*. Den frekventistiske forståelsen av sannsynlighet forutsetter at det er mulig å gjenta forsøket mange ganger. Enkelte ganger brukes sannsynlighetsbegrepet i situasjoner hvor et tilfeldig forsøk ikke kan gjentas. En sportsjournalist kan for eksempel skrive at det er 70% sannsynlig at Stabæk vil slå Rosenborg i fotball neste søndag. Denne sannsynligheten kan ikke fortolkes som relativ frekvens i det lange løp. Søndagens kamp kan ikke spilles mange ganger! Sannsynligheten er her et uttrykk for journalistens personlige vurdering. Når sannsynlighet blir brukt på denne måten, kaller vi det *subjektiv sannsynlighet*. Vi vil ikke komme nærmere inn på subjektiv sannsynlighet i dette kompendiet.

2.4 Sannsynlighetsmodeller

Vi kan ikke bruke grenseverdien av den relative frekvensen som en presis matematisk definisjon av sannsynlighet. For den grenseverdien vi snakker om her er empirisk. Den er ikke en grenseverdi i samme forstand som grenseverdien for en tallfølge (som for eksempel grenseverdien 0 for tallfølgen 1, 1/2, 1/3, 1/4, . . .).

For å løse dette problemet går vi fram på en måte som er typisk i matematikken. På grunnlag av det klassiske sannsynlighetsbegrepet og vår forståelse av at sannsynlighet kan fortolkes som relativ frekvens i det lange løp, setter vi opp noen regeler som sannsynlighet må oppfylle. Disse grunnleggende regelene som vi postulerer gyldigheten av uten å vise at de er riktige, kalles *aksiomer*. På grunnlag av aksiomene (og definisjoner av nye begreper) kan vi så utlede nye regeler for sannsynlighet.

For å se hvilke aksiomer det er rimelig å sette opp, ser vi først på to eksempler: ett hvor vi bruker det klassiske sannsynlighetsbegrepet, og ett hvor vi bruker at sannsynlighet svarer til relativ frekvens i det lange løp.

Eksempel 2.12. Når vi kaster en terning har hvert av de seks utfallene sannsynlighet 1/6. Det kan vi skrive

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6} \tag{2.2}$$

Vi merker oss at alle sannsynlighetene er tall mellom 0 og 1, og at summen av sannsynlighetene for alle utfallene i utfallsrommet er lik 1.

Hendelsen $A =$ "odde antall øyne" består av de tre utfallene 1, 3 og 5. I henhold til det klassiske sannsynlighetsbegrepet (2.1) har vi at $P(A) = 3/6$. Men det gir at

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = P(1) + P(3) + P(5).$$

Vi får altså sannsynligheten for hendelsen A ved å legge sammen sannsynlighetene for de tre utfallene A består av.

Eksempel 2.13. Vi er interessert i om et svangerskap gir ett barn, tvillinger, eller trillinger; jf. eksempel 2.2. Fra offentlig statistikk har vi at det i perioden 2006-2010 var 296562 svangerskap her i landet. I 291382 av dem ble det født ett barn, mens det var 5105 tvillingfødsler og 75 trillingfødsler. De relative frekvensene av ett barn, tvillinger og trillinger er dermed

$$r(\text{ett barn}) = \frac{291382}{296562} = 0.9825$$

$$r(\text{tvillinger}) = \frac{5105}{296562} = 0.0172$$

$$r(\text{trillinger}) = \frac{75}{296562} = 0.0003$$

Vi merker oss at de relative frekvensene er tall mellom 0 og 1, og at summen av de relative frekvensene for alle utfallene i utfallsrommet er lik 1.

Antall flerfødsler i femårsperioden 2006-2010 var $5105 + 75 = 5180$. Den relative frekvensen av flerfødsel er dermed

$$r(\text{flerfødsel}) = \frac{5180}{296562} = 0.0175 = r(\text{tvillinger}) + r(\text{trillinger})$$

Vi får altså den relative frekvensen for hendelsen "flerfødsel" ved å legge sammen de relative frekvensene for de to utfallene hendelsen består av.

Sannsynlighet kan fortolkes som relativ frekvens i det lange løp. Siden det er mange svangerskap i femårsperioden, vil de relative frekvensene ligge nær de tilsvarende sannsynlighetene. Men det betyr at de egenskapene som gjelder for relative frekvenser også må gjelde for sannsynligheter.

Hvis vi angir sannsynligheten for hvert av utfallene for et tilfeldig forsøk, sier vi at vi gir en *sannsynlighetsmodell* for forsøket. For eksempel er (2.2) en sannsynlighetsmodell for terningkast. De to eksemplene motiverer følgende aksiomer for en sannsynlighetsmodell[4]:

En sannsynlighetsmodell for et tilfeldig forsøk med diskret utfallsrom angir sannsynligheten for hvert enkelt utfall i utfallsrommet på en slik måte at:
(i) Sannsynligheten for hvert av utfallene er et tall mellom 0 *og* 1.
(ii) Summen av sannsynlighetene for alle utfallene er lik 1.
(iii) Sannsynligheten for en hendelse er lik summen av sannsynlighetene for de utfallene hendelsen består av.

Den klassiske definisjonen (2.1) av sannsynlighet er en logisk følge av disse aksiomene. Anta nemlig at et tilfeldig forsøk har m mulige utfall som alle er like sannsynlige. Vi sier at vi har en *uniform sannsynlighetsmodell*. Av aksiomene (i) og (ii) følger det da at hvert av utfallene må ha sannsynlighet $1/m$. Hvis en hendelse A består av g utfall, gir aksiom (iii) at sannsynligheten for hendelsen er lik g ganger $1/m$, dvs. lik (2.1). Formel (2.1) gjelder derfor (selvfølgelig!) fortsatt, men den er ikke lenger en definisjon, men et resultat som er utledet av aksiomene.

Vi merker oss at den generelle formuleringen av en sannsynlighetsmodell bare gir noen aksiomer som enhver sannsynlighetsmodell må tilfredsstille. Aksiomene sier ikke noe om hvordan sannsynlighetene i modellen bør spesifiseres i en konkret situasjon. For å gjøre det må vi ty til symmetriargumenter slik vi gjorde i forbindelse med det klassiske sannsynlighetsbegrepet, eller vi må bestemme sannsynlighetene ut fra relative frekvenser for mange gjentatte forsøk.

Eksempel 2.14. Vi kaster et kronestykke og en femkrone og ser for hvert pengestykke om vi får “mynt” eller “krone”; jf. eksemplene 2.8 og 2.10. Utfallsrommet for dette forsøket er $U = \{KK, KM, MK, MM\}$. Ved et symmetriargument er det rimelig å anta at de fire utfallene er like sannsynlige. Vi har derfor den uniforme sannsynlighetsmodellen

$$P(KK) = P(KM) = P(MK) = P(MM) = \frac{1}{4}$$

og vi kan finne sannsynligheten for en hendelse som antall gunstige utfall for hendelsen dividert med antall mulige utfall slik vi gjorde i eksempel 2.10.

[4]De aksiomene vi gir her er tilpasset situasjonen med diskret utfallsrom. Det fins en generell teori for sannsynlighetsregningen som gjelder uansett om utfallsrommet er diskret eller kontinuerlig. De aksiomene denne generelle teorien bygger på er annerledes enn de vi gir her. Men de aksiomene vi gir følger logisk av de generelle aksiomene.

Eksempel 2.15. Ved Stortingsvalget i 2013 ble oppslutningen om de ulike partiene:

Rødt	SV	Ap	Sp	KrF	V	H	Frp	MDG	Andre
1.1%	4.1%	30.8%	5.5%	5.6%	5.2%	26.8%	16.3%	2.8%	1.8%

Tenk deg at du er med på å gjennomføre en valgdagsmåling i 2009, og at du spør en tilfeldig valgt velger hvilket parti han eller hun nettopp stemte på.

Utfallsrommet for dette forsøket er som i eksempel 2.3. Tabellen viser at sannsynligheten er 30.8% for at en tilfeldig valgt velger stemte Arbeiderpartiet, mens den er 26.8% for at han eller hun stemte Høyre. Også for de andre partiene er sannsynlighetene lik prosentene i tabellen. Tabellen gir derfor en sannsynlighetsmodell for forsøket.

Hendelsen at velgeren stemte rød-grønt, består av utfallene Ap, SV og Sp. Vi finner sannsynligheten for denne hendelsen ved å legge sammen sannsynlighetene for de tre utfallene:

$$P(\text{rød-grønt}) = P(\text{Ap}) + P(\text{SV}) + P(\text{Sp}) = 0.308 + 0.041 + 0.055 = 0.404$$

Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt velger stemte rød-grønt er 40.4%.

Eksempel 2.16. Vi kaster en terning til vi får sekser og registrerer hvor mange kast vi må gjøre; jf. eksemplene 2.4 og 2.7. Utfallsrommet for dette forsøket er $U = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. For å gi en sannsynlighetsmodell for forsøket, må vi angi verdien av $P(k) = P(\text{“første sekser i kast } k\text{”})$ for $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Men hvordan kan dette gjøres?

For å komme fram til en rimelig sannsynlighetsmodell tenker vi oss at vi om og om igjen kaster en terning til vi får sekser. I omtrent $1/6$ av disse tilfellene vil vi få en sekser i første kast, mens vi i omtrent $5/6$ av tilfellene ikke vil få en sekser i første kast. Derfor setter vi $P(1) = 1/6$.

Vi ser så på de $5/6$ av tilfellene der vi ikke får en sekser i første kast. *Av dem* vil vi i omtrent $1/6$ av tilfellene få en sekser i andre kast, mens vi ikke vil få det i omtrent $5/6$ av disse tilfellene. Derfor setter vi $P(2) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$.

På tilsvarende måte vil vi i de $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$ av tilfellene der vi ikke får en sekser i de to første kastene, få en sekser i tredje kast i omtrent $1/6$ av tilfellene. Det gir $P(3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}$.

Ved å fortsette på denne måten, finner vi at en rimelig sannsynlighetsmodell for antall kast til første sekser er gitt ved

$$P(k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} \qquad \text{for } k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.3}$$

(I eksempel 4.9 vil vi komme fram til denne modellen på en mer formell måte.) Ved å bruke formelen for summen av en uendelig geometrisk rekke[5] ser vi at

[5]For $|a| < 1$ har vi at $a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots = a/(1-a)$.

summen av alle $P(k)$-ene er lik 1, så modellen (2.3) tilfredsstiller aksiomene (i) og (ii).

Sannsynligheten for hendelsen "høyst tre kast" = $\{1, 2, 3\}$ er

$$P(\text{"høyst tre kast"}) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{91}{216} = 0.421$$

Det er 42.1% sannsynlig at vi må gjøre høyst tre kast.

Det er verd å merke seg at en sannsynlighetsmodell bare vil gi en tilnærmet beskrivelse av virkeligheten. Det er tilsvarende som for andre matematiske modeller av virkelige fenomener. Det gir derfor ikke mening å si at en sannsynlighetsmodell er riktig eller gal. Det som gir mening er å si at modellen gir en god eller en mindre god beskrivelse av virkeligheten. Mange vil for eksempel regne som om det er samme sannsynlighet for å få en gutt og en jente ved en fødsel, slik at $P(J) = P(G) = 1/2$. Denne sannsynlighetsmodellen kan være god nok for mange formål. Men som vi så i avsnitt 2.3 vil modellen

$$P(J) = 0.486 \qquad \text{og} \qquad P(G) = 0.514 \tag{2.4}$$

gi en bedre beskrivelse av virkeligheten.

3 Vi regner med sannsynligheter

I dette avsnittet vil vi først se litt på hvordan vi kan finne sannsynligheter i uniforme sannsynlighetsmodeller hvor alle utfall er like sannsynlige (avsnitt 3.1). Så vil vi bruke aksiomene for en sannsynlighetsmodell til å utlede noen viktige regeler for sannsynlighet (avsnittene 3.2 og 3.3).

3.1 Uniforme sannsynlighetsmodeller og sammensatte forsøk

Vi vil ofte bruke uniforme sannsynlighetsmodeller i forbindelse med tilfeldige forsøk som er satt sammen av to eller flere delforsøk. Kast med to mynter (eksempel 2.8) og kast med to terninger (eksempel 2.9) er eksempler på slike sammensatte forsøk. For å kunne bruke (2.1) til å bestemme sannsynligheter i slike situasjoner, må vi kunne telle opp antall gunstige og antall mulige utfall. Vi skal her se litt nærmere på hvordan det kan gjøres. Vi starter med et enkelt eksempel for å illustrere tankegangen.

Eksempel 3.1. Vi kaster et kronestykke tre ganger og ser for hvert kast om vi får krone eller mynt. Hvis vi først får mynt, deretter krone og til slutt mynt, skriver vi resultatet som MKM. Dette forsøket er satt sammen av tre delforsøk – ett for hvert av de tre kastene. Hvor mange utfall har det sammensatte forsøket?

I hvert delforsøk (dvs. hvert kast) er det to mulige utfall K og M. For hvert av de to utfallene i første kast er det to mulige utfall i andre kast. Det er altså $2 \cdot 2 = 4$ mulige utfall i de to første kastene. For hvert av disse fire utfallene er det to mulige utfall i tredje kast. Det er dermed $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ mulige utfall for det sammensatte forsøket som består av de tre kastene sett under ett.

De åtte utfallene er KKK, KKM, KMK, KMM, MKK, MKM, MMK og MMM. Alle disse utfallene er like sannsynlige. Vi har dermed en uniform sannsynlighetsmodell.

Av de åtte utfallene, er det tre som gir nøyaktig en krone. Altså har vi

$$P(\text{en krone}) = \frac{3}{8} = 0.375$$

Når vi kaster de tre kronestykkene etter hverandre, kan vi skille mellom første, andre og tredje kast. Merk imidlertid at det blir samme utfallsrom og sannsynlighetsmodell om vi kaster alle kronestykkene på en gang. Men da må vi skille mellom første, andre og tredje kronestykke.

Forsøket med tre kast med et kronestykke har $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ utfall. Kast med to terninger har $6 \cdot 6 = 36$ utfall. Dette er eksempler på regelen:

I et sammensatt forsøk er antall utfall lik produktet av antall utfall i hvert delforsøk.

Vi ser på et par eksempler hvor vi bruker denne regelen.

Eksempel 3.2. En klasse med 11 jenter og 14 gutter skal velge ett medlem og ett varamedlem til elevrådet. Da ingen av elevene vil stille til valg, blir det først trukket lodd om hvem som skal være medlem av elevrådet. Deretter blir det trukket lodd om hvem som skal være varamedlem. Hva er sannsynligheten for at både medlem og varamedlem blir gutter?

Dette er et sammensatt forsøk der første delforsøk er valget av medlem og andre delforsøk er valget av varamedlem.

For hvert av de 25 mulige utfallene i første delforsøk, er det 24 mulige utfall i andre delforsøk. De to representantene til elevrådet kan derfor velges ut på $m = 25 \cdot 24 = 600$ måter. Da valget foregår ved loddtrekning er alle disse mulige utfallene like sannsynlige. Vi har en uniform sannsynlighetsmodel.

Vi bestemmer så hvor mange utfall som gir gutt både som medlem og varamedlem. Det er antall gunstige utfall. Ved samme tankegang som over, kan vi velge to gutter på $g = 14 \cdot 13 = 182$ måter. Av (2.1) får vi derfor

$$P(\text{to gutter blir valgt}) = \frac{g}{m} = \frac{182}{600} = 0.303$$

Det er 30.3% sannsynlig at to gutter blir valgt.

Eksempel 3.3. En kortstokk har 52 kort. Kortene er delt inn i fire “farger”: kløver, ruter, hjerter og spar. I hver farge er det tretten kort: 2, 3, ..., 10, knekt, dame, konge og ess. Vi trekker tilfeldig fire kort fra kortstokken. Hva er sannsynligheten for at vi får ett kort i hver farge?

Dette er et sammensatt forsøk der trekningen av ett kort svarer til et delforsøk. Vi kan trekke fire kort fra kortstokken på $m = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 = 6497400$ måter. Siden trekningen er tilfeldig, er alle disse mulige utfallene like sannsynlige. Vi har en uniform sannsynlighetsmodel.

Vi finner så hvor mange utfall som gir ett kort i hver farge. Vi kan velge det første kortet på 52 måter. Når det første kortet er valgt er en farge “brukt opp”, så det andre kortet kan velges på 39 måter som gir en annen farge enn det første. Når de to første kortene er valgt er to farger “brukt opp”, så det tredje kortet kan velges på 26 måter som gir en annen farge enn de to første. Endelig kan det siste kortet velges på 13 måter som gir en annen farge enn de tre første. Vi kan dermed velge ett kort i hver farge på $g = 52 \cdot 39 \cdot 26 \cdot 13 = 685464$ måter. Det er antall gunstige utfall.

Av (2.1) får vi dermed

$$P(\text{ett kort i hver farge}) = \frac{685464}{6497400} = 0.105$$

Det er 10.5% sannsynlig at vi får ett kort i hver farge.

3.2 Addisjonssetningen

La A og B være hendelser ved et forsøk. Ut fra disse kan vi lage to nye hendelser:

- Hendelsen $A \cup B$ (som leses “A union B”) omfatter alle utfall som er med i A eller i B eller i begge. Denne hendelsen inntreffer hvis minst en av hendelsene A og B inntreffer.
- Hendelsen $A \cap B$ (som leses “A snitt B") omfatter alle utfall som er med i både A og B. Denne hendelsen inntreffer hvis begge hendelsene A og B inntreffer.

Eksempel 3.4. Vi kaster en terning, og ser på hendelsene $A = \{2, 4, 6\}$ = “antall øyne er et partall” og $B = \{1, 2\}$ = “høyst to øyne”. Da er $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$ og $A \cap B = \{2\}$.

Vi vil bruke situasjonen i eksempel 3.4 til å motivere en formel for $P(A \cup B)$. Det er klart at vi har $P(A) = 3/6$, $P(B) = 2/6$, $P(A \cup B) = 4/6$ og $P(A \cap B) = 1/6$. Hvis vi legger sammen sannsynlighetene for hendelsene A og B, får vi $P(A) + P(B) = 5/6$. Denne summen er større enn $P(A \cup B) = 4/6$. Grunnen til det er at vi i summen får med sannsynligheten for $A \cap B = \{2\}$ to ganger – en gang i $P(A)$ og en gang i $P(B)$. Altså har vi $P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$.

Dette resonnementet gjelder generelt: Ved aksiom (iii) er $P(A)$ lik summen av sannsynlighetene for alle utfallene som A består av, og $P(B)$ er lik summen av sannsynlighetene for alle utfallene som B består. Når vi legger sammen $P(A)$ og $P(B)$, får vi derfor summen av sannsynlighetene for alle utfallene som er med i A eller i B eller i begge, men slik at sannsynlighetene for de utfallene som er med i både A og B tas med to ganger. Det gir at $P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$.

Ved å flytte over, får vi *addisjonssetningen*:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{3.1}$$

Vi vil se på noen eksempler på bruk av addisjonssetningen.

Eksempel 3.5. Vi kaster to terninger og ser på hendelsene A = "sum øyne lik sju" og B = "minst en sekser". Vi har at

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

og

$$B = \{(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6), (6,5), (6,4), (6,3), (6,2), (6,1)\}$$

Hendelsen A har 6 utfall og hendelsen B har 11 utfall. Hendelsen $A \cap B$ omfatter de to utfallene som er med i både A og B, nemlig $(1,6)$ og $(6,1)$. Siden alle de 36 utfallene er like sannsynlige, får vi

$$P(A) = \frac{6}{36} \qquad P(B) = \frac{11}{36} \qquad P(A \cap B) = \frac{2}{36}$$

Addisjonssetningen gir dermed

$$P(A \cup B) = \frac{6}{36} + \frac{11}{36} - \frac{2}{36} = \frac{15}{36}$$

Kontroller at svaret stemmer ved å telle opp antall utfall i $A \cup B$.

Eksempel 3.6. På en videregående skole har en klasse 25 elever. Av disse har 10 elever fransk og 12 elever tysk. Fire av elevene har både fransk og tysk. En elev blir trukket ut tilfeldig. Hva er sannsynligheten for at eleven har minst ett av språkene?

Vi ser på hendelsene F = "eleven har fransk" og T = "eleven har tysk". Av opplysningene ovenfor følger det at

$$P(F) = \frac{10}{25} \qquad P(T) = \frac{12}{25} \qquad P(F \cap T) = \frac{4}{25}$$

Hendelsen $F \cup T$ betyr at eleven har minst ett av språkene. Ved addisjonssetningen finner vi

$$P(F \cup T) = \frac{10}{25} + \frac{12}{25} - \frac{4}{25} = \frac{18}{25}$$

Sannsynligheten er $18/25 = 72.0\%$ for at eleven har minst et av språkene.

Vi kan kontrollere svaret ved å telle opp hvordan elevene fordeler seg på de to fagene. Vi får da tabellen:

	Fransk	Ikke fransk	Sum
Tysk	**4**	8	**12**
Ikke tysk	6	7	13
Sum	**10**	15	**25**

Her er de tallene som er gitt innledningsvis i eksemplet skrevet med fete typer, mens de andre tallene er fylt inn slik at summene stemmer. Vi ser at $4+6+8 = 18$ av elevene har minst ett av språkene. Sannsynligheten for at det skal gjelde for en tilfeldig valgt elev er dermed $18/25$ i samsvar med det vi fant ved addisjonsetningen.

Vi kaster en terning og lar $A = \{5, 6\}$ og $B = \{1, 4\}$. Her er A hendelsen "terningen viser minst fem øyne" og B hendelsen "terningen viser et kvadrattall". Vi kan ikke få minst fem øyne og et kvadrattall i samme kast. Det er derfor ingen utfall i hendelsen $A \cap B$. Når det ikke er noen utfall i $A \cap B$, sier vi at hendelsene A og B er *disjunkte*.

Når A og B er disjunkte, er $A \cap B$ en *umulig begivenhet*, dvs. en hendelse som ikke kan inntreffe, og $P(A \cap B) = 0$. For disjunkte hendelser får addisjonssetningen formen

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{3.2}$$

Dette resultatet gjelder tilsvarende for tre eller flere disjunkte hendelser. Hvis for eksempel A, B og C er disjunkte hendelser har vi at

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \tag{3.3}$$

At dette er tilfellet er en umiddelbar konsekvens av aksiom (iii) for sannsynlighetsmodeller.

3.3 Sannsynligheten for komplementære hendelser

La A være en hendelse ved et forsøk. Det at A ikke inntreffer, er en hendelse vi kaller "ikke A" og skriver $\overline{A}$. Hendelsen omfatter alle utfall som *ikke* er med i A. Hendelsene A og $\overline{A}$ kalles *komplementære* hendelser.

Eksempel 3.7. Vi kaster en terning og lar A være hendelsen at vi får minst fem øyne. Da er $A = \{5, 6\}$. Den komplementære hendelsen "ikke A" er $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4\}$.

I eksemplet har vi at $P(A) = 2/6$ og $P(\overline{A}) = 4/6$. Dermed er $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Slik er det for alle tilfeldige forsøk. Det kommer av at alle utfall enten er med i A eller i $\overline{A}$, og at summen av sannsynlighetene for alle utfallene er 1. For komplementære hendelser A og $\overline{A}$, har vi derfor:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \tag{3.4}$$

Enkelte ganger er det enklere å finne $P(\overline{A})$ enn $P(A)$. Da er regelen (3.4) nyttig.

Eksempel 3.8. Vi trekker tilfeldig fire kort fra en kortstokk. Hva er sannsynligheten for at vi får *minst* to kort i samme farge?

Vi kan få minst to kort i samme farge på fire måter: Vi kan få to kort i en farge og de to andre kortene i hver sin farge, eller vi kan få to kort i en farge og de to andre kortene i en annen farge, eller vi kan få tre kort i en farge og det siste kortet i en annen farge, eller vi kan få alle fire kortene i samme farge. Vi kan finne sannsynligheten for å få minst to kort i samme farge ved å finne sannsynlighetene for hver av disse fire disjunkte hendelsene og så legge dem sammen. Men det er tungvint. Det er enklere å først finne sannsynligheten for den komplementære hendelsen.

La $A =$ "minst to kort i samme farge". Da er $\overline{A} =$ "ett kort i hver farge". Fra eksempel 3.3 har vi at $P(\overline{A}) = 0.105$. Dermed har vi at

$$P(\text{minst to kort i samme farge}) = P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0.105 = 0.895$$

Det er 89.5% sannsynlig at vi får minst to kort i samme farge.

4 Betinget sannsynlighet og uavhengige hendelser

Begrepene betinget sannsynlighet og avhengige og uavhengige hendelser er sentrale i sannsynlighetsregningen. Vi skal i dette avsnittet se nærmere på disse begrepene. Vi ser først hvordan begrepene kan gis en intuitiv fortolkning i enkle situasjoner (avsnitt 4.1). For å kunne håndtere mer komplekse situasjoner, trenger vi en formell definisjon av hva betinget sannsynlighet betyr (avsnitt 4.2) og hva vi mer presist forstår med avhengige og uavhengige hendelser (avsnitt 4.3). Etter at begrepene er blitt gitt en presis mening, bruker vi dem til å utlede produktsetningen, som er en nyttig regneregel for sannsynligheter (avsnitt 4.4).

4.1 En intuitiv forståelse

For å få en intuitiv forståelse av hva vi mener med betinget sannsynlighet og avhengige hendelser, ser vi på et eksempel.

Eksempel 4.1. Fra en kortstokk velger vi fire røde kort (ruter, hjerter) og to svarte kort (kløver, spar) og legger i en bunke. Vi trekker så tilfeldig ett kort fra bunken og ser hvilken farge det har. Uten å legge kortet tilbake trekker vi ett kort til. Vi betrakter hendelsene A = "første kort er rødt" og B = "andre kort er svart". Det er klart at $P(A) = 4/6 = 2/3$.

Hvis A har inntruffet, er det tre røde og to svarte kort igjen i bunken når det andre kortet trekkes. Sannsynligheten for B er da $2/5$. Siden denne sannsynligheten forutsetter at A har inntruffet, sier vi at det er den *betingede sannsynligheten* for B gitt A. Vi skriver $P(B|A) = 2/5$.

Den komplementære hendelsen til A er $\overline{A}$ = "første kort er svart". Hvis $\overline{A}$ har inntruffet, er det fire røde og ett svart kort igjen i bunken når det andre kortet trekkes. Derfor er $P(B|\overline{A}) = 1/5$.

I eksempel 4.1 er det intuitivt klart hva vi mener med den betingede sannsynligheten for B gitt A og den betingede sannsynligheten for B gitt $\overline{A}$. Eksemplet gir oss også en forståelse av hva det betyr at to hendelser er avhengige. Vi har at $P(B|A) = 2/5$ og $P(B|\overline{A}) = 1/5$. Så hvis hendelsen A inntreffer, er sannsynligheten for B lik $2/5$. Men hvis A ikke inntreffer, er sannsynligheten for B lik $1/5$. Det om hendelsen A inntreffer eller ikke gir oss altså informasjon som endrer sannsynligheten for hendelsen B. Derfor er A og B *avhengige hendelser*.

For å gi en forståelse av hva det betyr at to hendelser er uavhengige, endrer vi litt på eksemplet.

Eksempel 4.2. Som i eksempel 4.1 har vi en bunke med fire røde og to svarte kort. Vi trekker tilfeldig et kort fra bunken og ser hvilken farge det har. Vi legger kortet tilbake i bunken og trekker tilfeldig et kort til. Vi betrakter igjen hendelsene A = "første kort er rødt" og B = "andre kort er svart". Vi har fortsatt at $P(A) = 4/6 = 2/3$.

Men siden vi legger det første kortet tilbake i bunken før vi trekker det neste, er det nå fire røde og to svarte kort i bunken når det andre kortet trekkes. Og det gjelder uansett om A inntraff eller ikke. Dette betyr at $P(B|A) = 2/6$ og $P(B|\overline{A}) = 2/6$. Disse betingede sannsynlighetene er dermed begge lik den ubetingede sannsynligheten $P(B)$.

Om hendelsen A inntreffer eller ikke gir i eksempel 4.2 ingen informasjon som endrer sannsynligheten for hendelsen B. Derfor er A og B *uavhengige begivenheter*.

4.2 Definisjon av betinget sannsynlighet

I eksempel 4.1 er det intuitivt klart hva vi forstår med betinget sannsynlighet. Det skyldes at vi ser på hva som skjer i andre trekning når vi vet resultatet av den første. Men det er ikke alltid like klart hva betinget sannsynlighet betyr. For situasjonen i eksempel 4.1, kan vi for eksempel spørre:

- Hva er den betingede sannsynligheten for at begge kortene er røde gitt at minst ett av dem er rødt?
- Hva er den betingede sannsynligheten for at det første kortet er rødt gitt at det andre er svart?

For å svare på disse spørsmålene (og andre spørsmål som er av større praktisk interesse) trenger vi en presis definisjon av betinget sannsynlighet. Vi bruker et eksempel til å motivere definisjonen.

Eksempel 4.3. Deler vi inn alle norske barn etter kjønn og fargesyn, blir resultatet omtrent som i tabellen:

	Normalt syn	Fargeblind
Gutt	47.3%	4.1%
Jente	48.3%	0.3%

Se på forsøket som består i å undersøke fargesynet til et tilfeldig valgt barn og i å se om barnet er en gutt eller en jente. Dette forsøket har fire utfall: gutt med normalt syn (ng), fargeblind gutt (fg), fargeblind jente (fj) og jente med normalt syn (nj).

Av tabellen ser vi at en sannsynlighetsmodell for forsøket er gitt ved:

$$P(ng) = 0.473 \quad P(fg) = 0.041 \quad P(fj) = 0.003 \quad P(nj) = 0.483$$

Vi ser nå på hendelsene $G = \{ng, fg\}$ = "gutt", $F = \{fg, fj\}$ = "fargeblind" og $F \cap G = \{fg\}$ = "fargeblind gutt". For disse får vi

$$P(F) = P(fg) + P(fj) = 0.041 + 0.003 = 0.044$$

$$P(G) = P(ng) + P(fg) = 0.473 + 0.041 = 0.514$$

og

$$P(F \cap G) = P(fg) = 0.041$$

Det er 4.4% sannsynlig at et barn er fargeblindt. Sannsynligheten for at det er en gutt er 51.4%, mens sannsynligheten er 4.1% for at det er en fargeblind gutt.

Men nå kan vi stille oss følgende spørsmål: Hvis barnet er en gutt, hva er da sannsynligheten for at det er fargeblindt? Eller sagt med andre ord, hva er den betingede sannsynligheten $P(F|G)$?

Vi har at $P(G) = 0.514$ og $P(F \cap G) = 0.041$. Av en gruppe på 100000 barn vil det altså være ca. 51400 gutter og ca. 4100 fargeblinde gutter. Den relative frekvensen av fargeblinde blant guttene vil derfor være ca. $4100/51400 = 0.080$. Hvis vi vet at et barn er en gutt, er derfor sannsynligheten 8.0% for at det er fargeblindt. Altså er $P(F|G) = 0.08$.

I eksempel 4.3 fant vi den betingede sannsynligheten $P(F|G)$ ved å dividere antall fargeblinde gutter med antall gutter. Merk at vi kan skrive

$$P(F|G) = \frac{4100}{51400} = \frac{0.041}{0.514} = \frac{P(F \cap G)}{P(G)}$$

Denne sammenhengen mellom $P(F|G)$, $P(F \cap G)$ og $P(G)$ gir en motivasjon for definisjonen:

La A og B være hendelser ved et forsøk. Den betingede sannsynligheten for B gitt A er gitt som

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{4.1}$$

så sant $P(A) > 0$.

Merk at definisjonen gir (ved å bytte om "rollene" til A og B)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{4.2}$$

så sant $P(B) > 0$

La oss vise at den formelle definisjonen (4.1) av betinget sannsynlighet stemmer med den intuitive forståelsen fra eksempel 4.1.

Eksempel 4.4. Som i eksempel 4.1 har vi en bunke med fire røde og to svarte kort. Vi trekker tilfeldig et kort fra bunken og ser hvilken farge det har. Uten å legge kortet tilbake trekker vi et kort til. Vi betrakter som før hendelsene $A =$ “første kort er rødt” og $B =$ “andre kort er svart”.

Vi vil bruke (4.1) til å finne den betingede sannsynligheten for B gitt A. Vi må da først bestemme sannsynlighetene for hendelsene $A \cap B$ og A. Vi kan trekke to kort på $6 \cdot 5 = 30$ mulige måter. Av disse er $4 \cdot 2 = 8$ gunstige for hendelsen $A \cap B$, mens $4 \cdot 5 = 20$ er gunstige for hendelsen A. Dermed har vi $P(A \cap B) = 8/30$ og $P(A) = 20/30$.

Definisjonen (4.1) av betinget sannsynlighet gir dermed at

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{8/30}{20/30} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

Dette stemmer (selvfølgelig!) med det vi fant intuitivt i eksempel 4.1.

I eksempel 4.2 la vi det første kortet tilbake i bunken før vi trakk det andre. Framgangsmåten i eksempel 4.4 kan brukes også i denne situasjonen til å finne formelt de betingede sannsynlighetene vi fant i eksempel 4.2. Gjør dette selv!

Vi kan også bruke framgangsmåten i eksempel 4.4 til å finne de betingede sannsynlighetene vi spurte om i starten av dette avsnittet. Vi illustrerer framgangsmåten for det siste spørsmålet.

Eksempel 4.5. Vi har en bunke med fire røde og to svarte kort. Som i eksemplene 4.1 og 4.4 trekker vi tilfeldig et kort fra bunken og ser hvilken farge det har. Uten å legge kortet tilbake trekker vi et kort til. Som før ser vi på hendelsene $A =$ “første kort er rødt” og $B =$ “andre kort er svart”. Vi vil bestemme den betingede sannsynligheten for at det første kortet er rødt gitt at det andre er svart, dvs. $P(A|B)$.

Vi må først finne $P(B)$. Vi kan få et svart kort andre gang på to måter: Vi kan trekke et rødt kort første gang og et svart kort andre gang, eller vi kan trekke et svart kort både første og andre gang. Det betyr at hendelsen B er en union av de to disjunkte hendelsene $A \cap B$ og $\overline{A} \cap B$. Addisjonssetningen for disjunkte hendelser gir derfor at

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = \frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 1}{6 \cdot 5} = \frac{10}{30} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Merk at dette er det samme som sannsynligheten for at det første kortet er svart!

Ved å bruke (4.2) får vi nå

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{8/30}{10/30} = \frac{4}{5}$$

Hvis det andre kortet er svart, er sannsynligheten $4/5 = 80.0\%$ for at det første kortet er rødt.

I eksempel 4.5 fant vi at hvis det andre kortet vi trekker er svart, så er sannsynligheten 4/5 for at det første kortet vi trakk er rødt. Hva betyr egentlig dette?

For å forstå det, minner vi om at sannsynlighet er relativ frekvens i det lange løp. I eksempel 4.1 fant vi at $P(A) = 2/3$. Det betyr at hvis vi om og om igjen trekker tilfeldig to kort fra en bunke med fire røde og to svarte kort, så vil vi i det lange løp få et rødt kort første gang i omtrent 2/3 av trekningene. I eksempel 4.5 fant vi $P(A|B) = 4/5$. Det betyr at hvis vi bare teller de trekningene hvor det andre kortet er svart, så vil vi i det lange løp *i disse trekningene* få et rødt kort første gang i omtrent 4/5 av trekningene. Denne måten å fortolke sannsynlighet og betinget sannsynlighet gjelder generelt:

- $P(A)$ *svarer til den relative frekvensen av* A *når vi gjentar et forsøk mange ganger.*

- $P(A|B)$ *svarer til den relative frekvensen av* A *når vi bare teller de forsøkene hvor* B *inntreffer.*

4.3 Avhengige og uavhengige hendelser

Vi ser på situasjonen hvor vi har en bunke med fire røde og to svarte kort, og hvor vi etter tur trekker to kort fra bunken og ser hvilken farge de har. Vi betrakter som før hendelsene A = "første kort er rødt" og B = "andre kort er svart".

I eksemplene 4.1 og 4.5 så vi på situasjonen der vi ikke legger det første kortet tilbake i bunken før vi trekker det andre, og vi fant at $P(B|A) = 2/5$ og $P(B) = 1/3$. Det at hendelsen A = "første kort er rødt" inntreffer, endrer altså sannsynligheten for hendelsen B = "andre kort er svart". Da er A og B *avhengige hendelser.*

I eksempel 4.2 så vi på situasjonen der vi legger det første kortet tilbake i bunken før vi trekker det andre, og vi fant at sannsynligheten er 1/3 for B = "andre kort er svart" både når vi betinger med A = "første kort er rødt" og når vi ikke gjør det. Sannsynligheten for B blir altså ikke endret av at A inntreffer. Da er A og B er *uavhengige hendelser.*

Dette motovere definisjonen[6]:

- *Hvis* $P(B|A) = P(B)$ *er* A *og* B *uavhengige hendelser.*

- *Hvis* $P(B|A) \neq P(B)$ *er* A *og* B *avhengige hendelser.*

[6]Ut fra definisjonen kan vi vise at følgende tre utsagn er ekvivalente: (i) $P(B|A) = P(B)$, (ii) $P(A|B) = P(A)$ og (iii) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Da de tre utsagnene er ekvivalente spiller det egentlig ikke noen rolle hvilket av dem vi bruker som definisjon av uavhengighet. Vi har valgt å bruke (i) som definisjon. I mer "avanserte" framstillinger av sannsynlighetsregningen er det vanlig å bruke (iii) som definisjon på at hendelsene A og B er uavhengige. En slik definisjon er ikke så intuitiv som (i), men den har den fordelen at den er symmetrisk i A og B og at den gjelder selv om (minst) en av hendelsene har sannsynlighet null.

I mange situasjoner kan vi ikke kontrollere ved en beregning at to hendelser er uavhengige. Ofte må vi forutsette uavhengighet på grunnlag av våre kunnskaper om den situasjonen vi studerer. Uavhengighet er da en forutsetning vi gjør om sannsynlighetsmodellen. Således vil vi i eksempel 4.8 forutsette at barnas kjønn er uavhengige i en trebarnsfamilie som ikke har eneggede tvillinger eller trillinger.

4.4 Produktsetningen

Hvis vi multipliserer med $P(A)$ på begge sider av (4.1), får vi *produktsetningen*:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \tag{4.3}$$

Tilsvarende gir (4.2) at

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) \tag{4.4}$$

Eksempel 4.6. En klasse med 11 jenter og 14 gutter skal velge ett medlem og ett varamedlem til elevrådet. Da ingen av elevene vil stille til valg, blir det først trukket lodd om hvem som skal være medlem av elevrådet. Deretter blir det trukket lodd om hvem som skal være varamedlem. Hva er sannsynligheten for at både medlem og varamedlem blir gutter?

I eksempel 3.2 fant vi denne sannsynligheten ved å bruke en uniform sannsynlighetsmodell for det sammensatte forsøket som består i å trekke medlem og varamedlem. Her skal vi se hvordan vi kan finne sannsynligheten ved å bruke produktsetningen.

Vi ser på hendelsene A = "en gutt blir medlem" og B = "en gutt blir varamedlem". Når det trekkes lodd om hvem som skal bli medlem av elevrådet, er det 25 elever å velge mellom og 14 av disse er gutter. Derfor er $P(A) = 14/25$. Når varamedlemmet skal velges er det igjen 24 elever å velge blant, og gitt at en gutt ble valgt som medlem, er 13 av disse gutter. Dermed er $P(B|A) = 13/24$. Produktsetningen gir da at

$$P(\text{to gutter blir valgt}) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{14}{25} \cdot \frac{13}{24} = 0.303$$

Merk at når vi bruker produktsetningen ser vi på en trekning om gangen, mens vi i eksempel 3.2 så på begge trekningene under ett.

Anta nå at vi har tre hendelser A, B og C ved et forsøk. Ved å bruke produktsetningen to ganger får vi:

$$\begin{aligned} & P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A \cap B) \cdot P(C|A \cap B) \\ &= P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Ved et tilsvarende resonnement kan vi vise at produktsetningen også gjelder for fire og flere hendelser.

Eksempel 4.7. Etter offentlig statistikk er sannsynligheten:

- 95% for at en 65 år gammel kvinne skal bli minst 70 år
- 92% for at en 70 år gammel kvinne skal bli minst 75 år
- 87% for at en 75 år gammel kvinne skal bli minst 80 år

Hva er sannsynligheten for at en 65 år gammel kvinne skal bli minst 80 år?

Vi tar for oss en 65 år gammel kvinne og ser på hendelsene A = "kvinnen blir minst 70 år", B = "kvinnen blir minst 75 år" og C = "kvinnen blir minst 80 år". Vi har $P(A) = 0.95$. Hvis hendelsen A inntreffer, er kvinnen blitt 70 år, så $P(B|A) = 0.92$. Hvis både hendelsene A og B inntreffer, har kvinnen blitt 75 år, så $P(C|A \cap B) = 0.87$.

Hvis kvinnen blir minst 80 år, må hun også bli 70 år og 75 år. Derfor er $C = A \cap B \cap C$. Da gir (4.5):

$$P(C) = P(A \cap B \cap C) = 0.95 \cdot 0.92 \cdot 0.87 = 0.76$$

Det er 76 % sannsynlig at en 65 år gammel kvinne skal bli minst 80 år.

Når A og B er *uavhengige hendelser*, har vi at $P(B|A) = P(B)$. Da gir produktsetningen

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Tilsvarende resultat gjelder for tre og flere uavhengige hendelser. Hvis for eksempel A, B og C er uavhengige, har vi

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Eksempel 4.8. I en søskenflokk er det tre barn. Hva er sannsynligheten for at det eldste barnet er en gutt og de to andre er jenter? Vi ser bort fra eneggede tvillinger og trillinger i dette eksemplet. Vi går derfor ut fra at barnas kjønn er uavhengige av hverandre. Ved produktsetningen for uavhengige hendelser får vi sannsynligheten for at det eldste barnet er en gutt og de to andre er jenter ved å gange sannsynligheten for at den eldste er en gutt med sannsynligheten for at den neste eldste er en jente og sannsynligheten for at den yngste er en jente. Altså

$$P(\text{eldste gutt, de to andre jenter}) = 0.514 \cdot 0.486 \cdot 0.486 = 0.121$$

På samme måte finner vi

$$P(\text{midterste gutt, de to andre jenter}) = 0.486 \cdot 0.514 \cdot 0.486 = 0.121$$

$$P(\text{yngste gutt, de to andre jenter}) = 0.486 \cdot 0.486 \cdot 0.514 = 0.121$$

Siden de tre hendelsene vi har funnet sannsynligheten for er disjunkte, finner vi sannsynligheten for unionen av dem, dvs. sannsynligheten for at det er en gutt og to jenter i søskenflokken, ved å legge sammen de tre sannsynlighetene. Dermed har vi at

$$P(\text{en gutt og to jenter}) = 3 \cdot 0.121 = 0.363$$

Det er 36.3% sannsynlig at søskenflokken består av en gutt og to jenter.

Eksempel 4.9. Vi kaster en terning til vi får sekser og registrerer hvor mange kast vi må gjøre; jf. eksemplene 2.4 og 2.7.

For at vi for eksempel skal få den første sekseren i fjerde kast, må vi ikke få seksere i de tre første kastene og så få sekser i det fjerde kastet. Siden kastene er uavhengige, blir sannsynligheten for dette lik $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = (\frac{5}{6})^3 \cdot \frac{1}{6}$.

På samme måte finner vi at sannsynligheten for at vi skal få den første sekseren i k-te kast er $(\frac{5}{6})^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$. Dette gir en formell begrunnelse for sannsynlighetsmodellen (2.3) i eksempel 2.16.

5 Total sannsynlighet og Bayes' setning

Vi skal nå se på to viktige regler for å regne med (betingede) sannsynligheter. Vi kan bruke disse reglene til å finne $P(B)$ og $P(A|B)$ når vi kjenner $P(A)$, $P(B|A)$ og $P(B|\overline{A})$.

5.1 Total sannsynlighet

I eksempel 4.5 fant vi sannsynligheten for hendelsen B = "andre kort er svart" ved hjelp av sannsynlighetene for hendelsene A = "første kort er rødt" og $\overline{A}$ = "første kort er svart" og de betingede sannsynlighetene for B gitt A og B gitt $\overline{A}$.

Resonnementet i eksemplet har generell gyldighet: Hvis vi har to hendelser A og B ved et forsøk, kan vi alltid uttrykke B som en union av de to disjunkte hendelsene $A \cap B$ og $\overline{A} \cap B$. Addisjonssetningen for disjunkte hendelser gir derfor at

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \tag{5.6}$$

Av produktsetningen har vi at

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A})$$

Setter vi disse uttrykkene inn i (5.6), får vi setningen om *total sannsynlighet*:

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A}) \tag{5.7}$$

Vi illustrerer bruken av setningen med noen eksempler.

Eksempel 5.10. En bedrift produserer en vare på to maskiner. De to maskinene tar henholdsvis 40% og 60% av produksjonen. På den første maskinen er 4% av de produserte vareenhetene defekte i det lange løp. På den andre maskinen gjelder dette 2% av varene. På lageret blir de ferdige produktene blandet, slik at en ikke vet hvilken maskin de kommer fra. En vareenhet blir tatt tilfeldig fra lageret. Hva er sannsynligheten for at varen er defekt?

Vi ser på hendelsene $A =$ "vareenheten kommer fra den første maskinen", $\overline{A} =$ "vareenheten kommer fra den andre maskinen" og $B =$ "vareenheten er defekt". Opplysningene ovenfor gir at $P(A) = 0.40$, $P(\overline{A}) = 0.60$, $P(B|A) = 0.04$ og $P(B|\overline{A}) = 0.02$.

Ved å bruke setningen om total sannsynlighet får vi dermed

$$P(B) = 0.40 \cdot 0.04 + 0.60 \cdot 0.02 = 0.028$$

Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt vare er defekt, er 2.8%.

Eksempel 5.11. Fra en kortstokk velger vi ut fire røde kort og to svarte kort og legger i en bunke (bunke I). Vi velger også ut to røde kort og fire svarte kort og legger i en annen bunke (bunke II). Vi velger tilfeldig en av bunkene og trekker to kort fra denne. Hva er sannsynligheten for at vi får to røde kort?

La nå $A =$ "vi trekker fra bunke I" og $B =$ "vi trekker to røde kort". Da er

$$P(A) = P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$$

$$P(B|A) = \frac{4 \cdot 3}{6 \cdot 5} = \frac{6}{15}$$

$$P(B|\overline{A}) = \frac{2 \cdot 1}{6 \cdot 5} = \frac{1}{15}$$

Dermed gir setningen om total sannsynlighet at

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{15} = \frac{7}{30}$$

Sannsynligheten er $7/30 = 23.3\%$ for at vi får to røde kort.

5.2 Bayes' setning

Vi har et forsøk med to hendelser A og B. Definisjonen av betinget sannsynlighet gir at

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{5.8}$$

Vi kan omforme dette uttrykket. Ved produktdetningen (4.3) er telleren i (5.8) lik

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

mens setningen (5.7) om total sannsynlighet gir at nevneren i (5.8) kan skrives som

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})$$

Dette gir oss *Bayes' setning*:

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A})} \tag{5.9}$$

Bayes' setning er nyttig i situasjoner hvor det er lett å bestemme $P(B|A)$ og $P(B|\overline{A})$, og vi ønsker å finne den "omvendte" betingede sannsynligheten $P(A|B)$.

Eksempel 5.12. Se på eksempel 5.10. Hvis en vare er defekt, hva er da sannsynligheten for at den kommer fra den første maskinen?

Fra eksempel 5.10 har vi at $P(A) = 0.40$, $P(\overline{A}) = 0.60$, $P(B|A) = 0.04$ og $P(B|\overline{A}) = 0.02$. Bayes' setning gir dermed

$$P(A|B) = \frac{0.40 \cdot 0.04}{0.40 \cdot 0.04 + 0.60 \cdot 0.02} = 0.57$$

I det lange løp vil 57% av de vareenhetene som er defekte komme fra den første maskinen.

Eksempel 5.13. Vi har fire røde kort og to svarte kort i bunke I og to røde kort og fire svarte kort i bunke II; jf. eksempel 5.11. Vi velger tilfeldig en av bunkene og trekker to kort fra denne. Hvis begge de to kortene vi trekker er røde, hva er da sannsynligheten for at vi har trukket fra bunke I?

Vi spør om $P(A|B)$. Fra eksempel 5.11 har vi at $P(A) = P(\overline{A}) = 1/2$, $P(B|A) = 6/15$ og $P(B|\overline{A}) = 1/15$. Bayes' setning gir dermed

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{15}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{15} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{15}} = \frac{6}{7}$$

Hvis begge de to kortene vi trekker er røde, er det $6/7 = 85.7\%$ sannsynlig at vi har trukket fra bunke I.

Eksempel 5.14. Mammografi er en form for røntgenundersøkelse som gjør det mulig å avsløre brystkreft på et tidlig stadium. Erfaringer med mammografi er:

- Hvis en kvinne har brystkreft, er det 95% sannsynlig at undersøkelsen avslører dette.
- Hvis en kvinne ikke har brystkreft, er det 3,5% sannsynlig at undersøkelsen likevel viser tegn på kreft.

En kvinne tar en mammografiundersøkelse. Vi ser på hendelsene S = "kvinnen har brystkreft (er syk)" og M = "mammogrammet viser tegn på kreft". Av opplysningene over har vi $P(M|S) = 0.95$ og $P(M|\overline{S}) = 0.035$. Vi antar videre at 0.7% av de kvinnene som møter til undersøkelse, har brystkreft, slik at $P(S) = 0.007$ og $P(\overline{S}) = 0.993$.

Mammogrammet viser tegn på brystkreft. Hva er da sannsynligheten for at kvinnen virkelig har kreft? Vi spør om den betingede sannsynligheten $P(S|M)$. Denne kan vi finne ved å bruke Bayes' setning:

$$P(S|M) = \frac{P(S) \cdot P(M|S)}{P(S) \cdot P(M|S) + P(\overline{S}) \cdot P(M|\overline{S})} = \frac{0.007 \cdot 0.95}{0.007 \cdot 0.95 + 0.993 \cdot 0.035} = 0.16$$

Selv om mammogrammet tyder på at kvinnen har brystkreft, er det bare 16% sannsynlig at hun virkelig har det.

6 Kombinatorikk og Pascals talltrekant

Når vi skal bruke en uniform sannsynlighetsmodell, må vi kjenne antall mulige og antall gunstige utfall for den hendelsen vi skal finne sannsynligheten for. I enkle situasjoner kan vi skrive opp alle mulige utfall og avgjøre hvilke av dem som er gunstige. Men det går ikke når vi ser på mer innviklede situasjoner. For eksempel er det i Lotto over 5 millioner ulike rekker på sju vinnertall. En må være veldig tålmodig for å skrive opp alle disse! For å finne ut hvor mange mulige rekker det er i Lotto, må vi derfor kunne resonnere oss fram til svaret uten å skrive opp alle rekkene. *Kombinatorikk* er navnet på den delen av matematikken som gir oss løsningen på dette og liknende spørsmål.

Indiske matematikere var tidlig opptatt av kombinatoriske spørsmål. Rundt år 200 f.Kr. ga Pingala en regel for å finne hvor mange måter vi kan velge et gitt antall stavelser på fra en mengde av stavelser. Og i en forklaring fra 900-tallet e.Kr. viste Halayudha at vi får Pingalas regel fra det vi i dag kaller Pacals talltrekant (jf. avsnitt 6.4). Inderne kalte talltrekanten Meru Prastara etter det mytiske fjellet Meru. Dette fjellet av gull var sentrum for universet og gudenes hjem. Også arabiske matematikere kjente til Pascals talltrekant for over tusen år siden.

I Europa ble matematikerne for alvor interessert i kombinatorikk først for 350 år siden. Interessen kom av ønsket om å regne ut vinnersjansene i ulike spill. En sentral person var den franske filosofen og matematikeren Blaise Pascal (1623-1662). Han studerte også nøye den talltrekanten som i dag bærer hans navn.

I dag er kombinatorikken en selvstendig del av matematikken. Den anvendes for eksempel i databehandling, kodeteori og numerisk matematikk i tillegg til sannsynlighetsregning. I dette avsnittet skal vi se på noen viktige resultater fra kombinatorikken. De kommer til nytte når du skal beregne sannsynligheter for uniforme sannsynlighetsmodeller, men er også av interesse i andre sammenhenger.

6.1 Multiplikasjonssetningen

I avsnitt 3.1 så vi på antall mulige og antall gunstige utfall i et tilfeldig forsøk som er satt sammen av to eller flere delforsøk. Den tankegangen vi brukte der gjelder generelt.

Eksempel 6.1. Du er på en restaurant. På menyen er det 4 forretter, 10 hovedretter og 5 desserter. På hvor mange måter kan du sette sammen måltidet når det skal bestå av én forrett, én hovedrett og én dessert?

Du kan velge forretten på 4 måter. For hver av de 4 mulige valgene av forrett, kan du velge hovedretten på 10 måter. Du kan derfor velge forrett og hovedrett på $4 \cdot 10 = 40$ måter. For hver av de $4 \cdot 10$ mulige valgene av forrett og hovedrett kan du velge desserten på 5 måter. Du kan derfor sette sammen måltidet på $4 \cdot 10 \cdot 5 = 200$ måter.

I eksemplet kan vi se på valget av de tre rettene som en valgprosess med tre trinn. I det første trinnet velger du forretten, i det andre trinnet velger du hovedretten, og i det tredje trinnet velger du desserten. Resonnementet i eksemplet gjelder generelt. Det gir oss *multiplikasjonssetningen:*

En valgprosess har r trinn. I det første trinnet er det n_1 valgmuligheter, i det andre trinnet er det n_2 valgmuligheter, ..., i det siste trinnet er det n_r valgmuligheter. Da er det til sammen $n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$ valgmuligheter.

Eksempel 6.2. Et bilnummer i Norge består av to bokstaver og et femsifret tall. De ni bokstavene G, I, M, O, Q, W, Æ, Ø og Å brukes ikke. Hvor mange forskjellige bilnummer kan vi lage?

Vi kan se på dette som en valgprosess i sju trinn. I de to første trinnene velges én av 20 bokstaver, i det tredje trinnet velges ett av 9 siffer[7], og i trinn nummer fire til sju velges ett av 10 siffer. Det er derfor mulig å lage $20 \cdot 20 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 36000000$ forskjellige bilnummer.

[7] Det første sifferet i et bilnummer kan ikke være 0.

6.2 Ordnet utvalg med og uten tilbakelegging

Det er to viktige spesialtilfeller av multiplikasjonssetningen i forrige avsnitt. Det er ordnet utvalg med og uten tilbakelegging. Før vi ser på disse spesialtilfellene, vil vi ved hjelp av et eksempel forklare hva "med tilbakelegging" og "uten tilbakelegging" betyr, og hva vi mener med "ordnet utvalg" og "uordnet utvalg".

Eksempel 6.3. Du skriver de 29 bokstavene i alfabetet på hver sin lapp og legger de 29 lappene i en eske. Du trekker så 4 lapper fra esken, én etter én. Da trekker du et *utvalg* på fire bokstaver.

Hvis du *ikke* legger en lapp tilbake i esken før du trekker den neste, sier vi at du trekker *uten tilbakelegging*. Hvis du *legger* en lapp tilbake i esken før du trekker den neste, sier vi at du trekker *med tilbakelegging*.

Hvis rekkefølgen bokstavene blir trukket i *har* betydning, sier vi at du trekker et *ordnet utvalg*. Da er det forskjell på LITE og LEIT. Hvis rekkefølgen *ikke* har betydning, sier vi at du trekker et *uordnet utvalg*. Da er det ikke forskjell på LITE og LEIT, siden begge består av de fire bokstavene E, I, L og T.

Vi ser så nærmere på *ordnet utvalg med tilbakelegging*. Vi tar utgangspunkt i situasjonen i eksempel 6.3. Når du trekker med tilbakelegging, har du 29 bokstaver å velge mellom hver gang du trekker. Multiplikasjonssetningen gir at du kan velge de fire bokstavene på $29 \cdot 29 \cdot 29 \cdot 29 = 707281$ forskjellige måter når vi tar hensyn til rekkefølgen de trekkes i.

Generelt har vi en mengde med n elementer, og vi velger r elementer fra den. Resonnementet ovenfor gir da følgende resultat:

Fra en mengde med n elementer kan vi lage $n \cdot n \cdots n = n^r$ ordnede utvalg på r elementer når utvelgingen skjer med tilbakelegging.

Eksempel 6.4. På en tippekupong er det gitt 12 fotballkamper. For hver kamp skal en tippe om det blir hjemmeseier (H), uavgjort (U) eller borteseier (B). En tipperekke består av ett tips for hver av de 12 kampene. Hvor mange forskjellige rekker kan en tippe?

Vi kan se på en tipperekke som et ordnet utvalg med tilbakelegging: Mengden vi skal velge fra, er de $n = 3$ tippetegnene (H, U, B). Fra den skal vi velge ett tippetegn for hver av de $r = 12$ kampene. En kan derfor tippe $3^{12} = 531441$ forskjellige rekker.

Vi ser så nærmere på *ordnet utvalg uten tilbakelegging*. Igjen tar vi utgangspunkt i situasjonen i eksempel 6.3. Når du trekker uten tilbakelegging, kan du ikke velge den samme bokstaven flere ganger. Derfor har du

- 29 bokstaver å velge mellom første gang du trekker
- $29 - 1$ bokstaver å velge mellom andre gang du trekker
- $29 - 2$ bokstaver å velge mellom tredje gang du trekker
- $29 - 3$ bokstaver å velge mellom fjerde gang du trekker

Det betyr at du kan lage $29 \cdot (29 - 1) \cdot (29 - 2) \cdot (29 - 3) = 570024$ ordnede utvalg på fire bokstaver når trekningen skjer uten tilbakelegging.

Generelt har vi en mengde med n elementer, og vi velger r elementer fra denne uten tilbakelegging. Resonnementet ovenfor gir da følgende resultat:

Fra en mengde med n elementer kan vi lage

$$ {}_nP_r \stackrel{\text{def}}{=} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1) \tag{6.1} $$

ordnede utvalg på r elementer når utvelgingen skjer uten tilbakelegging.

Eksempel 6.5. Landslagstreneren i langrenn for menn har sju løpere å velge mellom til en World Cup-stafett over 4 x 10 km. På hvor mange måter kan han sette opp stafettlaget når vi tar hensyn til hvem som går de ulike etappene?

Vi kan se på dette som et ordnet utvalg uten tilbakelegging. Mengden det skal velges fra, er de $n = 7$ langrennsløperne. Fra denne mengden skal treneren velge en løper for hver av de $r = 4$ etappene. Siden en løper ikke kan gå flere enn én etappe, har vi utvalg uten tilbakelegging. Treneren kan derfor sette opp stafettlaget på ${}_7P_4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ måter.

Når vi lager utvalg uten tilbakelegging, må vi ha $r \leq n$. Hvis $r = n$, velger vi alle elementene. Da vil et ordnet utvalg svare til en bestemt rekkefølge (eller permutasjon) av de r elementene. Resultatet ovenfor gir da:

Vi kan ordne n elementer i rekkefølge på

$$ n! \stackrel{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n \tag{6.2} $$

måter.

Skrivemåten $n!$ leser vi "n fakultet".

Eksempel 6.6. Vi ser på eksempel 6.5. Anta at treneren har bestemt seg for hvilke fire løpere som skal gå stafetten, men ikke hvilken etappe hver av dem skal gå. Hvor mange mulige lagoppstillinger kan han da velge mellom? Treneren har nå fire løpere som skal fordeles på de fire etappene. Han kan derfor velge mellom $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ lagoppstillinger.

Vi kan bruke GeoGebra til å finne $n!$ og ${}_nP_r$.

6.3 Uordnet utvalg uten tilbakelegging

I forrige avsnitt så vi på ordnede utvalg. Nå vil vi se på uordnede utvalg, det vil si utvalg hvor vi ikke tar hensyn til rekkefølgen. Også for uordnede utvalg kan utvelgingen skje med eller uten tilbakelegging. Men vi vil nøye oss med å se på uordnede utvalg *uten* tilbakelegging.

Eksempel 6.7. Vi tar utgangspunkt i situasjonen i eksempel 6.5. Men vi er nå interessert i å finne ut hvor mange måter landslagstreneren kan velge ut de fire løperne (av de sju) som skal gå stafetten, når vi *ikke* bryr oss om hvem som går de ulike etappene.

La x være antall måter landslagstreneren kan velge ut de fire løperne på når vi ikke bryr oss om startrekkefølgen. Da er x antall *uordnede* utvalg av fire løpere blant sju når utvelgingen skjer uten tilbakelegging. Vi vil finne x ved å bestemme antall *ordnede* utvalg på to måter.

Fra eksempel 6.6 har vi at antall ordnede utvalg av fire løpere blant de sju er ${}_7P_4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$. Eksempel 6.6 gir videre at vi fra ett uordnet utvalg, kan lage $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ ordnede utvalg. Men det betyr at antall ordnede utvalg av fire løpere også kan gis som $x \cdot 4!$. Altså har vi at

$$x \cdot 4! = {}_7P_4$$

Det gir

$$x = \frac{{}_7P_4}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$$

Langrennstreneren kan velge ut de fire løperne som skal gå stafetten på 35 måter, når vi ikke bryr oss om hvem som går de ulike etappene.

Resonnementet i eksempel 6.7 gjelder generelt. Av ett *uordnet* utvalg på r elementer, kan vi lage $r!$ *ordnede* utvalg, jf. (6.2). Det fins derfor $r!$ ganger så mange ordnede utvalg som uordnede utvalg når utvelgingen skjer uten tilbakelegging. Antall *uordnede* utvalg er derfor lik antall ordnede utvalg dividert med $r!$. Av (6.1) får vi dermed følgende viktige resultat:

Fra en mengde med n elementer kan vi lage

$$ {}_nC_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdots (r-1) \cdot r} \tag{6.3}$$

uordnede utvalg på r elementer når utvelgingen skjer uten tilbakelegging.

Vi har ovenfor tenkt oss at vi velger ett element om gangen. Men vi merker oss at når vi er interessert i uordnede utvalg, spiller det ingen rolle om vi velger ett element om gangen, eller om vi velger alle på en gang.

Eksempel 6.8. I en klasse er det 25 elever. De skal arrangere en klassefest og vil oppnevne en komité med fire medlemmer til å forberede festen. På hvor mange måter kan de velge ut de fire elevene når vi ikke tar hensyn til rekkefølgen?

Merk at vi her spør vi om antall uordnede utvalg. Antall uordnede utvalg når vi velger ut 4 elever blant 25 elever, er

$$_{25}C_4 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 12650$$

Festkomiteen kan altså velges ut på 12 650 forskjellige måter.

Eksempel 6.9. Når du tipper én lottorekke, krysser du av sju tall fra 1 til 34. Hvor mange forskjellige lottorekker finnes det? En lottorekke er et uordnet utvalg av 7 tall valgt blant 34 tall. Det finnes derfor

$$_{34}C_7 = \frac{34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 5379616$$

forskjellige lottorekker.

Ved lottotrekningen trekkes det tilfeldig sju vinnertall (og tre tilleggstall). Førstepremie går til den eller de som har tippet alle de sju vinnertallene riktig. Hvis du har tippet én lottorekke, er sannsynligheten for at du vinner førstepremie

$$P(\text{førstepremie på én rekke}) = \frac{1}{5379616} = 0.000000186$$

Sannsynligheten er 0.000186 promille for å vinne førstepremie i Lotto når du tipper én rekke.

Eksempel 6.10. I poker får en spiller utdelt tilfeldig fem av kortstokkens 52 kort. Hva er sannsynligheten for at en pokerspiller bare får hjerterkort?

De fem kortene kan velges på

$$_{52}C_5 = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2598960$$

måter. Av dem er det

$$_{13}C_5 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1287$$

måter som gir bare hjerterkort. Dermed er

$$P(\text{bare hjerterkort}) = \frac{1287}{2598960} = 0.0005$$

Sannsynligheten for å få bare hjerterkort er 0.05%.

Vi kan bruke GeoGebra til å finne $_nC_r$.

6.4 Pascals talltrekant og binomialkoeffisientene

Talltrekanten nedenfor kalles vanligvis Pascals talltrekant, selv om trekanten var kjent lenge før Pascal skrev om den. Merk hvordan talltrekanten er bygd opp: Vi får et tall i trekanten ved å legge sammen de to nærmeste "nabotallene" i linja ovenfor.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc|l}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & & \text{(linje 0)} \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \text{(linje 1)} \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \text{(linje 2)} \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \text{(linje 3)} \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \text{(linje 4)} \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \text{(linje 5)} \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \text{(linje 6)} \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \text{(linje 7)}
\end{array}
$$

Det er tre utviklingslinjer som møtes i Pascals trekant: figurtallene fra antikkens Hellas, de kombinatoriske tallene med røtter i indisk matematikk og binomialkoeffisientene som blant annet arabiske matematikere var opptatt av. Viktige figurtall er trekanttallene $(1, 3, 6, 10, 15, \ldots)$ og pyramidetallene for trekantete pyramider $(1, 4, 10, 20, 35, \ldots)$. Disse finner vi langs "diagonaler" i Pascals trekant. Vi vil nedenfor se hvordan vi også kan finne de kombinatoriske tallene ${}_nC_r$ fra talltrekanten. Men først ser vi litt på binomialformelen og binomialkoeffisientene, og hvordan binomialkoeffisientene henger sammen med Pascals trekant.

Et *binom* er et utrykk med to ledd, som utrykket $a + b$. Binomialformelen er en formel for å regne ut potenser av binomer, dvs. uttrykk av formen $(a + b)^n$. For $n = 2$ svarer binomialformelen til første kvadratsetning

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1 \cdot a^2 b^0 + 2 \cdot a^1 b^1 + 1 \cdot a^0 b^2$$

mens vi for $n = 3$ og $n = 4$ har formlene

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 = 1 \cdot a^3 b^0 + 3 \cdot a^2 b^1 + 3 \cdot a^1 b^2 + 1 \cdot a^0 b^3$$

og

$$
\begin{aligned}
(a + b)^4 &= a^4 + 4a^3 b + +6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
&= 1 \cdot a^4 b^0 + 4 \cdot a^3 b^1 + 6 \cdot a^2 b^2 + 4 \cdot a^1 b^3 + 1 \cdot a^0 b^4
\end{aligned}
$$

Vi merker oss at:

- Koeffisientene i uttrykket for $(a + b)^2$ er 1, 2 og 1, og disse finner vi i linje 2 i Pascals talltrekant (når vi begynner nummereringen av linjene med linje nummer null slik vi har angitt ovenfor).

- Koeffisientene i uttrykket for $(a+b)^3$ er 1, 3, 3 og 1, og disse finner vi i linje 3 i Pascals talltrekant.

- Koeffisientene i uttrykket for $(a+b)^4$ er 1, 4, 6, 4 og 1, og disse finner vi i linje 4 i Pascals talltrekant.

Generelt får vi en formel for $(a+b)^n$ ved å bruke tallene i den n-te linja i Pascals trekant som koeffisienter. For å kunne skrive opp den generelle binomialformelen må vi ha en skrivemåte for tallene i Pascals talltrekant. Over startet vi nummereringen av linjene i Pascals trekant med linje nummer null. Hvis vi også begynner nummereringen innen en linje med plass nummer null, skriver vi tall nummer r i den n-te linja i Pascals talltrekant som $\binom{n}{r}$. Dette leser vi "n over r". For eksempel har vi at $\binom{4}{2} = 6$ og $\binom{5}{3} = 10$. Med denne skrivemåten kan Pascals talltrekant skrives som

$$\begin{array}{ccccccccccc l}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \text{(linje 0)} \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \text{(linje 1)} \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \text{(linje 2)} \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \text{(linje 3)} \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \text{(linje 4)} \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \text{(linje 5)}
\end{array}$$

mens den generelle binomialformelen får formen

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{r} a^{n-r} b^r + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Tallene $\binom{n}{r}$ i Pascals trekant er koeffisienter i binomialformelen. Derfor kalles de *binomialkoeffisienter*. For gitt verdi av n, finner vi binomialkoeffisientene $\binom{n}{r}$ for $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n$ i den n-te linja i Pascals talltrekant.

Vi vil se litt nærmere på binomialkoeffisientene. Følgende formel gjelder generelt:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \tag{6.4}$$

Sjekk selv at denne formelen stemmer for en del av tallene i Pascals talltrekant. Merk at vi setter $0! = 1$ per definisjon slik at (6.4) også gjelder når $r = 0$ og når $r = n$.

Av uttrykket (6.4) har vi uten videre at

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \tag{6.5}$$

Det stemmer med at tallene i en linje i Pascals trekant er symmetriske om midten av linja. Videre har vi at

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!\,(n-r-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r-1)!} \cdot \left\{ \frac{1}{n-r} + \frac{1}{r} \right\} \\
&= \frac{(n-1)!}{(r-1)!\,(n-r-1)!} \cdot \frac{n}{r(n-r)} \\
&= \frac{!}{r!\,(n-r)!} \\
&= \binom{n}{r} \qquad (6.6)
\end{aligned}$$

som svarer til at vi får et tall i Pascals trekant som summen av de to “nabotallene” i linja ovenfor.

Hva er så sammenhengen mellom binomialkoeffisientene $\binom{n}{r}$ gitt ved (6.4) og de kombinatoriske tallene ${}_nC_r$ gitt ved (6.3)? Hvis vi ganger teller og nevner i (6.3) med $(n-r)! = (n-r)\cdot(n-r-1)\cdots 2\cdot 1$ finner vi at

$$\begin{aligned}
{}_nC_r &= \frac{{}_nP_r \cdot (n-r)!}{r!\,(n-r)!} \\
&= \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1)\cdot(n-r)\cdot(n-r-1)\cdots 2\cdot 1}{r!\,(n-r)!} \\
&= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \\
&= \binom{n}{r}
\end{aligned}$$

Altså er de kombinatoriske tallene ${}_nC_r$ de samme som binomialkoeffisientene $\binom{n}{r}$. Det er således ikke nødvendig å skille mellom dem. I det følgende vil vi derfor bruke skrivemåten $\binom{n}{r}$ også for antall uordnede utvalg på r elementer vi kan lage fra en mengde med n elementer når vi trekker uten tilbakelegging. Men vær oppmerksom på at GeoGebra bruker skrivemåten ${}_nC_r$ i stedet for $\binom{n}{r}$.

6.5 Flere eksempler

Eksempel 6.11. I en kartong er det 12 sikringer. Fire av dem er defekte. Vi trekker tilfeldig tre sikringer. Hva er sannsynligheten for at én av dem er defekt (og dermed to i orden)?

Vi kan velge tre sikringer på

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!\,9!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 220$$

måter. Det er antall mulige utfall. Vi må så finne hvor mange utfall som er gunstige for hendelsen "én defekt sikring". Av de fire defekte sikringene kan vi velge én på $\binom{4}{1} = 4$ måter. Av de 8 sikringene som er i orden, kan vi velge to på $\binom{8}{2} = 28$ måter. Hver av de 4 måtene vi kan velge én defekt sikring på, kan kombineres med hver av de 28 måtene vi kan velge to sikringer som er i orden. Til sammen kan vi derfor velge én defekt sikring og to som er i orden på $4 \cdot 28 = 112$ måter. Det er antall gunstige utfall. Dermed får vi at

$$P(\text{én defekt sikring}) = \frac{112}{220} = 0.509$$

Sannsynligheten er 50.9% for at vi får akkurat én defekt sikring.

Eksempel 6.12. I en klasse er det 11 jenter og 14 gutter. De skal arrangere en klassefest og vil oppnevne en komité med fire medlemmer til å forberede festen. Siden alle elevene gjerne vil være med i komiteen, blir de enig om å trekke lodd. Hva er sannsynligheten for at det blir to gutter og to jenter i komiteen?

De fire elevene til festkomiteen kan velges på

$$\binom{25}{4} = \frac{25!}{4!\,21!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 12650$$

mulige måter. Vi må så finne hvor mange av disse som er gunstige for hendelsen "to gutter og to jenter". Av de 14 guttene i klassen kan vi velge ut to på

$$\binom{14}{2} = \frac{14!}{2!\,12!} = \frac{14 \cdot 13}{1 \cdot 2} = 91$$

måter. Av de 11 jentene kan vi velge ut to på

$$\binom{11}{2} = \frac{11!}{2!\,9!} = \frac{11 \cdot 10}{1 \cdot 2} = 55$$

måter. Hvert enkelt av de 91 måtene vi kan velge to gutter på kan kombineres med de 55 forskjellige måtene vi kan velge to jenter på. Til sammen kan vi derfor velge to gutter og to jenter på $91 \cdot 55 = 5005$ måter. Det er antall gunstige utfall. Dermed får vi at

$$P(\text{to gutter og to jenter blir valgt}) = \frac{5005}{12650} = 0.396$$

Det er 39.6% sannsynlig at det blir valgt to gutter og to jenter til festkomiteen.

Eksempel 6.13. I poker får en spiller utdelt tilfeldig fem av kortstokkens 52 kort. Hvis spilleren får to kort med en verdi, to kort med en annen verdi og det siste kortet med en tredje verdi, sier vi at spilleren får to par. (Et eksempel på to par er kløver 9, hjerter 9, spar knekt, kløver knekt og ruter 3.) Hva er sannsynligheten for at en pokerspiller får to par?

Som i eksempel 6.10 kan de fem kortene velges på

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!\,47!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2598960$$

måter. Det er antall mulige utfall. Vi må så finne antall gunstige utfall, dvs. hvor mange måter som gir to par. Vi kan:

- Velge de to verdiene spilleren skal få par i blant de 13 mulige verdiene (2, 3, 4, ..., dame, konge, ess) på $\binom{13}{2}$ måter.
- Gitt de to verdiene spilleren skal få par i, kan vi for hver av dem velge to kort av de fire som har den aktuelle verdien på $\binom{4}{2}$ måter.
- Gitt de to verdiene spilleren skal få par i, kan vi velge ett kort blant de øvrige verdiene på $\binom{44}{1}$ måter.

Multiplikasjonssetningen gir dermed at spilleren kan få to par på

$$\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{44}{1} = 123552$$

måter. Det er antall gunstige utfall. Dermed får vi at

$$P(\text{to par}) = \frac{123552}{2598960} = 0.048$$

Sannsynligheten for å få to par er 4.8%.

Eksempel 6.14. I en klasse er det 25 elever. Hva er sannsynligheten for at minst to av dem har samme fødselsdag?

I beregningene vil vi se bort fra skuddår, og vi vil regne som om alle årets 365 dager er like sannsynlige fødselsdager. Vi finner først sannsynligheten for at ingen av elevene har samme fødselsdag. Antall mulige måter å velge de 25 fødselsdagene på er 365^{25} (når vi bryr oss om hvem som har hver av fødselsdagene, dvs. når vi betrakter et ordnet utvalg). Antall måter vi kan velge fødselsdagene på slik at ingen har samme fødselsdag er ${}_{365}P_{25}$. Vi har derfor at

$$P(\text{ingen har samme fødselsdag}) = \frac{{}_{365}P_{25}}{365^{25}} = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots 342 \cdot 341}{365^{25}} = 0.431$$

Det gir

$$\begin{aligned} &P(\text{minst to har samme fødselsdag}) \\ &\qquad = 1 - P(\text{ingen har samme fødselsdag}) = 1 - 0.431 = 0.567 \end{aligned}$$

Det er 56.7% sannsynlig at minst to av elevene har samme fødselsdag.

7 Tilfeldige variabler og sannsynlighetsfordelinger

I dette avsnittet skal vi forklare hva en tilfeldig variabel er, og hva vi forstår med sannsynlighetsfordelingen til en tilfeldig variabel. Vi skal også se nærmere på to viktige sannsynlighetsfordelinger: hypergeometrisk fordeling og binomisk fordeling.

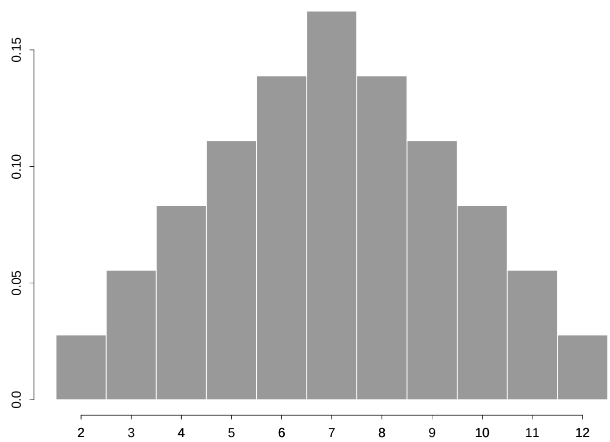
7.1 Generelt om tilfeldige variabler

Vi vil først gi en motivasjon ved hjelp av et eksempel. Når vi kaster to terninger er det 36 mulige utfall; jf. eksempel 2.9. Mange ganger er vi ikke interessert i hvert enkelt av disse utfallene. Vi kan for eksempel bare være interessert i summen av antall øyne. Vi setter X = "sum antall øyne". Siden antall øyne for de to terningene vil variere fra kast til kast, vil også verdien til X variere. Vi sier at X er en *tilfeldig variabel*.

Når vi kaster to terninger, kan summen av antall øyne bli 2, 3, 4, ..., 11 eller 12. Det er de *mulige verdiene* for den tilfeldige variabelen X. Ved å telle opp hvor mange av de 36 utfallene som er gunstige for hendelsen $X = k$, kan vi finne $P(X = k)$ for $k = 2, 3, ..., 11, 12$. Resultatet er oppsummert i tabellen:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Tabellen viser hva sannsynligheten er for alle de mulige verdiene av den tilfeldige variabelen X. Disse sannsynlighetene utgjør *sannsynlighetsfordelingen* for X. Merk at summen av alle sannsynlighetene i tabellen er lik én. Stolpediagrammet viser sannsynlighetsfordelingen:



Vi vil så gi en mer generell beskrivelse av hva en tilfeldig variabel er og hva vi forstår med dens sannsynlighetsfordeling. Som vist i eksemplet med kast med to terninger, er vi ikke alltid interessert i hvert enkelt utfall av et tilfeldig forsøk. Vi er ofte bare interessert i en tallstørrelse knyttet til utfallene (som sum antall øyne for kast med to terninger). En slik tallstørrelse kaller vi en tilfeldig variabel[8]. Som symbol på en tilfeldig variabel er det vanlig å bruke en stor bokstav fra slutten av (det engelske) alfabetet.

Sannsynlighetsfordelingen til en tilfeldig variabel gir sannsynligheten for hver av de mulige verdiene den tilfeldige variabelen kan anta. Summen av alle sannsynlighetene i sannsynlighetsfordelingen er lik én. Vi kan gi en sannsynlighetsfordeling ved en tabell eller ved et stolpediagram slik vi gjorde for kast med to terninger, eller vi kan gi den ved en formel som (7.1) og (7.2) nedenfor.

7.2 Hypergeometrisk fordeling

Vi skal i dette avsnittet se på en sannsynlighetsfordeling som ofte kan brukes når vi trekker et tilfeldig uordnet utvalg uten tilbakelegging. Vi starter med et motiverende eksempel.

Eksempel 7.1. Vi ser på situasjonen i eksempel 6.11. I en kartong er det 12 sikringer. Fire av dem er defekte. Vi trekker tilfeldig tre av sikringene og ser om de er defekte eller ikke. Dette er et uordnet utvalg på 3 sikringer av de 12 sikringene. Vi kan lage $\binom{12}{3}$ slike utvalg. Det er antall mulige utfall av trekningen.

Vi er interessert i hvor mange av sikringene som er defekte, og innfører den tilfeldige variabelen $X =$ "antall defekte sikringer". De mulige verdiene til X er 0, 1, 2 og 3. Vi vil finne sannsynlighetsfordelingen til X. Da må vi finne hvor mange uordnede utvalg som gir k defekte sikringer (og dermed $3 - k$ sikringer som er i orden) når $k = 0, 1, 2, 3$. Vi har at:

- Vi kan trekke k defekte sikringer av de 4 som er defekte på $\binom{4}{k}$ måter
- Vi kan trekke $3 - k$ ikke-defekte sikringer av de 8 som er i orden på $\binom{8}{3-k}$ måter.

Vi kan dermed trekke k defekte sikringer og $3 - k$ som er i orden på $\binom{4}{k} \cdot \binom{8}{3-k}$ måter. Det er antall gunstige utfall for hendelsen $X = k$. Siden vi trekker tilfeldig, har alle de $\binom{12}{3}$ mulige utfallene samme sannsynlighet. Sannsynlighetsfordelingen til X er dermed gitt ved formelen

$$P(X = k) = \frac{\binom{4}{k} \cdot \binom{8}{3-k}}{\binom{12}{3}} \qquad \text{for} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

[8]Hvis vi har et tilfeldig forsøk med utfallsrom U og en stokastisk variabel X knyttet til dette, vil det til hvert utfall i U svare én verdi av X. Det betyr at X er en funksjon som har utfallsrommet som definisjonsmengde og en delmengde av de reelle tall som verdimengde.

Ved å sette inn de ulike verdiene av k i sannsynlighetsfordelingen finner vi

$$P(X=0)=\frac{56}{220}=0.255 \qquad P(X=1)=\frac{112}{220}=0.509$$
$$P(X=2)=\frac{48}{220}=0.218 \qquad P(X=3)=\frac{4}{220}=0.018$$

Generelt ser vi på følgende situasjon:

- Vi har en mengde med N elementer.
  (I eksempel 7.1 er dette mengden av de 12 sikringene.)
- Elementene i mengden kan deles inn i to delmengder D og $\overline{D}$.
  Det er m elementer i D og $N-m$ elementer i $\overline{D}$.
  (I eksempel 7.1 er de to delmengdene de defekte og de ikke-defekte sikringene. Det er 4 defekte sikringer og $12-4=8$ sikringer som er i orden.)
- Vi trekker tilfeldig n elementer fra mengden.
  (I eksempel 7.1 trekker vi 3 sikringer.)

Vi lar X være antall elementer vi trekker fra D. Ved samme resonnement som i eksemplet finner vi at den tilfeldige variabelen X har sannsynlighetsfordelingen:

$$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\cdot\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} \tag{7.1}$$

Vi sier at den tilfeldige variabelen X er *hypergeometrisk fordelt.*

Eksempel 7.2. Når du tipper én lottorekke, krysser du av sju tall fra 1 til 34. Ved lottotrekningen trekkes det tilfeldig sju vinnertall (og ett tilleggstall[9]). Du har tippet én lottorekke. La X være antall vinnertall du tipper riktig. Vi vil bestemme sannsynlighetsfordelingen til X.

Vi kan dele de $N=34$ tallene på lottokupongen inn i to delmengder, de $m=7$ tallene du har krysset av og de $N-m=34-7=27$ tallene du ikke har krysset av. Ved lottotrekningen trekkes det tilfeldig $n=7$ vinnertall. Av formel (7.1) får vi derfor at

$$P(X=k)=\frac{\binom{7}{k}\cdot\binom{27}{7-k}}{\binom{34}{7}}$$

Ved å sette inn de ulike verdiene for k i sannsynlighetsfordelingen får vi tabellen:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=k)$	0.165	0.385	0.315	0.114	0.019	0.0014	0.000035	0.00000019

[9]Før uke 12 i 2015 ble det trukket tre tilleggstall.

7.3 Binomisk fordeling

I eksempel 4.8 fant vi sannsynligheten for at det er én gutt i en familie med tre barn. Vi måtte da ta hensyn til at gutten kunne være det eldste, det nest eldste eller det yngste barnet. I dette avsnittet skal vi se nærmere på problemstillinger av denne typen. Vi ser først på en firebarnsfamilie.

Eksempel 7.3. En søskenflokk består av fire barn der ingen er eneggede tvillinger, trillinger eller firlinger. Hva er sannsynligheten for at det er to gutter og to jenter i søskenflokken? Hvis vi lar X stå for antall gutter i søskenflokken, er vi altså interessert i å finne $P(X = 2)$.

At de to eldste barna er gutter og de to yngste er jenter, skriver vi $GGJJ$. Tilsvarende skriver vi $GJJG$ hvis den eldste og den yngste er gutter og de to midterste er jenter. Andre rekkefølger som gir to gutter og to jenter, dvs. $X = 2$, er $GJGJ$, $JGGJ$, $JGJG$ og $JJGG$.

Vi antar at barnas kjønn er uavhengig av hverandre. Av produktsetningen for uavhengige hendelser har vi da

$$P(GGJJ) = 0.514 \cdot 0.514 \cdot 0.486 \cdot 0.486 = 0.514^2 \cdot 0.486^2$$

$$P(GJJG) = 0.514 \cdot 0.486 \cdot 0.486 \cdot 0.514 = 0.514^2 \cdot 0.486^2$$

Hver av de fire andre rekkefølgene som gir to gutter og to jenter har også sannsynligheten $0.514^2 \cdot 0.486^2$.

Vi finner sannsynligheten for at det er to gutter og to jenter i søskenflokken, dvs. $P(X = 2)$, ved å legge sammen sannsynligheten for de seks rekkefølgene. Dermed har vi at

$$P(X = 2) = 6 \cdot 0.514^2 \cdot 0.486^2 = 0.374$$

Sannsynligheten er 37.4% for at det er to barn av hvert kjønn i søskenflokken.

Ved å skrive opp alle mulige rekkefølger av to gutter og to jenter fant vi ovenfor at det er seks rekkefølger som gir to gutter og to jenter, dvs. som gir $X = 2$. Det kunne vi ha funnet på en enklere måte. For det å velge en bestemt rekkefølge av to G-er og to J-er er nemlig det samme som å velge ut to plasser av fire der det skal stå G. Og det kan gjøres på $\binom{4}{2} = 6$ måter.

Generelt ser vi på følgende situasjon:

- Vi gjør n forsøk.
  (I eksempel 7.3 er det ett forsøk å se hvilket kjønn et barn har.)

- I hvert forsøk er det to muligheter: Enten inntreffer en bestemt hendelse som vi kan kalle S, eller så inntreffer den ikke.
  (I eksempel 7.3 ser vi om barnet er en gutt.)

- I hvert forsøk er sannsynligheten for at S skal inntreffe lik p.
  (I eksempel 7.3 er sannsynligheten for gutt 0.514.)

- Forsøkene er uavhengige.
  (Siden vi ser bort fra tvillinger, trillinger og firlinger har vi i eksempel 7.3 antatt at barnas kjønn er uavhengig av hverandre.)

Vi lar den stokatiske variabelen X stå for antall ganger S inntreffer i de n forsøkene. (I eksempel 7.3 er X antall gutter.) Vi vil bestemme sannsynlighetsfordelingen til X. Det kan vi gjøre ved å bruke et tilsvarende resonnement som i eksempel 7.3:

- Sannsynligheten for at S inntreffer i k bestemte forsøk, for eksempel i de k første, er $p^k(1-p)^{n-k}$

- Av de n forsøkene kan vi velge ut k forsøk der S skal inntreffe på $\binom{n}{k}$ måter.

Sannsynligheten for at S vil inntreffe nøyaktig k ganger i de n forsøkene, dvs. $P(X = k)$, er dermed

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{7.2}$$

Vi sier at den tilfeldige variabelen X er *binomisk fordelt.*

Eksempel 7.4. En bestemt type frø spirer med 70% sannsynlighet. Du sår 20 frø. La X være antall frø som spirer. Hva er sannsynligheten for at nøyaktig 15 av frøene vil spire, dvs. hva er $P(X = 15)$?

Hvis frøene spirer uavhengig av hverandre, kan vi bruke (7.2) til å finne sannsynligheten. Vi har dermed

$$P(X = 15) = \binom{20}{15} \cdot 0.70^{15} \cdot 0.30^{5} = 0.179$$

Det er 17.9% sannsynlig at nøyaktig 15 frø vil spire.

8 Forventningsverdi og store talls lov

En tilfeldig variabel X er en tallstørrelse knyttet til utfallet av et tilfeldig forsøk. Sannsynlighetsfordelingen til X gir sannsynligheten for de ulike verdiene X kan anta. Sannsynlighetsfordelingen gir dermed en beskrivelse av hvordan X vil variere. I tillegg til sannsynlighetsfordelingen kan vi være interessert i å ha et summarisk mål som forteller oss hvor fordelingen er “plassert” på tallinja. Et slikt mål er *forventningsverdien.* For å motivere definisjonen av forventningsverdi ser vi først nærmere på et eksempel.

8.1 Et motiverende eksempel

Rulett er en klassiker blant hasardspillene. Ruletthjulet er formet som en skål og kan snurre om en akse. En liten kule spretter tilfeldig omkring i skåla mens den snurrer rundt, og når ruletthjulet stopper blir kula liggende på ett av 37 nummererte felt. Hvert av feltene $1, 2, \ldots, 36$ er merket med sort eller rød farge, mens feltet 0 ikke har noen slik farge[10].

Spilleren setter sin innsats på grupper av felt, for eksempel de røde feltene, feltene 1–6 eller ett enkelt felt. Det er ikke tillatt å satse på feltet nummerert 0. Hvis en spiller satser 10 euro på en gruppe av k felt, og kulen stopper på ett av dem, vinner spilleren, og hun får en gevinst på $10 \cdot (36/k)$ euro. Hvis kulen stopper på ett av de andre feltene, taper spilleren og hun får ingen ting. Uansett beholder kasinoet innsatsen på 10 euro. Spillerens *nettogevinst* blir derfor $10 \cdot \left(\frac{36}{k} - 1\right)$ euro hvis hun vinner, og den blir -10 euro hvis hun taper. Her svarer negativ nettogevinst til tap.

Vi betrakter nå en "forsiktig" person som spiller rulett tre ganger. I hver av de tre spilleomgangene satser hun 10 euro på 18 felt (for eksempel de røde feltene). Hennes nettogevinst i én omgang blir da 10 euro hvis hun vinner og -10 euro hvis hun taper. La Y være spillerens samlede nettogevinst i løpet av de tre omgangene. Vi vil finne sannsynlighetsfordelingen til Y. Vi merker oss at hvis spilleren:

- Taper i alle de tre omgangene, blir hennes nettogevinst -30 euro. Sannsynligheten for det er $(19/37)^3$
- Vinner i én av de tre omgangene, blir hennes nettogevinst -10 euro. Sannsynligheten for det er $3 \cdot (18/37) \cdot (19/37)^2$
- Vinner i to av de tre omgangene, blir hennes nettogevinst 10 euro. Sannsynligheten for det er $3 \cdot (18/37)^2 \cdot (19/37)$
- Vinner i alle de tre omgangene, blir hennes nettogevinst 30 euro. Sannsynligheten for det er $(18/37)^3$

Sannsynlighetsfordelingen til Y er dermed

$$P(Y = -30) = \left(\frac{19}{37}\right)^3 = 0.135$$

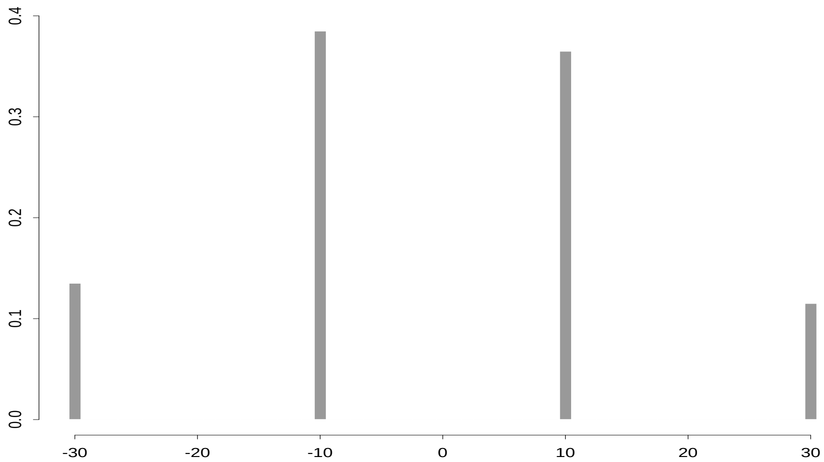
$$P(Y = -10) = 3 \cdot \frac{18}{37} \cdot \left(\frac{19}{37}\right)^2 = 0.385$$

$$P(Y = 10) = 3 \cdot \left(\frac{18}{37}\right)^2 \cdot \frac{19}{37} = 0.365$$

$$P(Y = 30) = \left(\frac{18}{37}\right)^3 = 0.115$$

[10] Det fins versjoner av rulett som har 38 felt. I tillegg til feltene $0, 1, 2, \ldots, 36$ har disse versjonene også et felt som er nummerert 00.

Stolpediagrammet viser denne sannsynlighetsfordelingen:



Anta nå at kvinnen kveld etter kveld går til kasinoet og spiller tre omganger rulett slik det er beskrevet ovenfor. Hva blir da hennes gjennomsnittlige nettogevinst per kveld i det lange løp?

Vi starter med å se på de 10 første kveldene. Vi antar at nettogevinstene disse kveldene blir henholdsvis -10 euro, 10 euro, 30 euro, 10 euro, 10 euro, 10 euro, -10 euro, -30 euro, -10 euro og 10 euro. Da blir den gjennomsnittlige nettogevinsten for de ti kveldene

$$\frac{1}{10}(-10+10+30+10+10+10-10-30-10+10) = 2$$

Ved å telle opp hvor mange av kveldene nettogevinsten blir henholdsvis -30 euro, -10 euro, 10 euro og 30 euro, kan vi skrive den gjennomsnittlige nettogevinsten på formen

$$-30 \cdot \frac{1}{10} - 10 \cdot \frac{3}{10} + 10 \cdot \frac{5}{10} + 30 \cdot \frac{1}{10}$$

Her er brøkene 1/10, 3/10, 5/10 og 1/10 de relative frekvensene av kvelder der nettogevinsten blir henholdsvis -30 euro, -10 euro, 10 euro og 30 euro.

Vi ser så på de N første kveldene. Anta at de relative frekvensene av kvelder med nettogevinst -30 euro, -10 euro, 10 euro og 30 euro er henholdsvis $r_N(-30)$, $r_N(-10)$, $r_N(10)$ og $r_N(30)$. På samme måte som ovenfor kan den gjennomsnittlige nettogevinsten for de N kveldene skrives som

$$-30 \cdot r_N(-30) - 10 \cdot r_N(-10) + 10 \cdot r_N(10) + 30 \cdot r_N(30) \qquad (8.1)$$

Sannsynlighet er relativ frekvens i det lange løp. Så hvis kvinnen spiller veldig mange kvelder, vil de relative frekvensene

$$r_N(-30), \quad r_N(-10), \quad r_N(10) \quad \text{og} \quad r_N(30)$$

nærme seg sannsynlighetene

$$P(Y=-30), \quad P(Y=-10), \quad P(Y=10) \quad \text{og} \quad P(Y=30)$$

Den gjennomsnittlige nettogevinsten vil derfor nærme seg[11]

$$\begin{aligned}
-30 \cdot P(Y=-30) &- 10 \cdot P(Y=-10) + 10 \cdot P(Y=10) + 30 \cdot P(Y=30) \\
&= -30 \cdot 0.135 - 10 \cdot 0.385 + 10 \cdot 0.365 + 30 \cdot 0.115 \\
&= -0.81 \qquad (8.2)
\end{aligned}$$

Hvis kvinnen spiller mange kvelder, vil hun altså i det lange løp tape omtrent 81 cent per kveld.

Summen i (8.2) kalles *forventningsverdien* til Y, og den skriver vi $E(Y)$. Bokstaven "E" kommer av det engelske "expected value".

8.2 Definisjon av forventningsverdi

Resonnementet i avsnitt 8.1 gjelder tilsvarende for alle tilfeldige variabler som har endelig mange mulige verdier. Det motiverer definisjonen[12]:

La X være en tilfeldig variabel med mulige verdier $x_1, x_2, \ldots, x_m$.
Da er forventningsverdien til X er gitt ved

$$E(X) = x_1\, P(X=x_1) + x_2\, P(X=x_2) + \cdots + x_m\, P(X=x_m) \qquad (8.3)$$

Merk at vi ofte sier *forventning* i stedet for forventningsverdi. Merk også at det er vanlig å bruke den greske bokstaven μ ("my") til å betegne forventningsverdi. Altså $\mu = E(X)$.

Forventningen μ er "tyngdepunktet" i sannsynlighetsfordelingen til X i følgende forstand: På en vektstang henger vi lodd i posisjoner som svarer til de mulige verdiene for X. Vekten av et lodd er proporsjonal med sannsynligheten for at X skal få den aktuelle verdien. Da vil stanga være i balanse hvis vi henger den i en snor som er festet til vektstanga i en posisjon som svarer til μ.

Eksempel 8.1. Vi kaster to terninger, og lar X være summen av antall øyne. I avsnitt 7.1, fant vi at X har sannsynlighetsfordelingen:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

[11] Vi har oppgitt det svaret en får når en regner med de eksakte verdiene av sannsynlighetene, og altså ikke runder dem av til tre gjeldende siffer.

[12] Definisjonen av forventningsverdi gjelder på liknende måte for stokastiske variabler som har tellbart uendelig mange mulige verdier, men da består summen i (8.3) av uendelig mange ledd.

Vi ser av (8.3) at vi får forventningsverdien ved å multiplisere hver av de mulige verdiene for X med sannsynligheten for den aktuelle verdien, og så addere produktene. Det gir:

$$\begin{aligned} E(X) &= 2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+5\cdot\frac{4}{36}+6\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{6}{36} \\ &\quad +8\cdot\frac{5}{36}+9\cdot\frac{4}{36}+10\cdot\frac{3}{36}+11\cdot\frac{2}{36}+12\cdot\frac{1}{36} \\ &= \frac{252}{36}=7 \end{aligned}$$

Resultatet er ikke overraskende. Da sannsynlighetsfordelingen til X er symmetrisk om 7, må "tyngdepunktet" i fordelingen være lik 7. Og siden forventingsverdien svarer til "tyngdepunktet", må forventningsverdien også være lik 7.

Eksempel 8.2. Vi tipper én lottorekke, og lar X være antall vinnertall vi får. I eksempel 7.2 fant vi at X har sannsynlighetsfordelingen:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=k)$	0.165	0.385	0.315	0.114	0.019	0.0014	0.000035	0.00000019

Forventningen blir

$$\begin{aligned} E(X) &= 0\cdot 0.165+1\cdot 0.385+2\cdot 0.315+3\cdot 0.114 \\ &\quad +4\cdot 0.019+5\cdot 0.0014+6\cdot 0.000035+7\cdot 0.00000019 \\ &= 1.44 \end{aligned}$$

Forventet antall riktige vinnertall når vi tipper én lottorekke er 1.44.

8.3 Store talls lov

Vi motiverte definisjonen av forventningsverdi ved å ta utgangspunkt i gjennomsnittlig X-verdi når et forsøk gjentas mange ganger. Vi merker oss i denne forbindelse at det resonnementet vi brukte i ruletteksemplet for å vise at gjennomsnittet (8.1) vil nærme seg forventningen (8.2) når kvinnen spiller mange kvelder, gjelder generelt. Det gir oss *store talls lov*:

Vi har et tilfeldig forsøk med en tilfeldig variabel X. Hvis vi gjentar forsøket mange ganger, vil gjennomsnittet av verdiene til X nærme seg $\mu = E(X)$.

Av eksempel 8.1 følger det dermed at hvis vi kaster to terninger mange ganger, så vil summen av antall øyne i gjennomsnitt bli omtrent sju. På samme måte gir eksempel 8.2 at en lottospiller som uke etter uke tipper én rekke, i gjennomsnitt vil tippe omtrent 1.44 vinnertall riktig.

Store talls lov er grunnlaget for driften av kasinoene i Monte Carlo og Las Vegas. Hvis en person en kveld spiller tre omganger rulett slik det ble beskrevet i avsnitt 8.1, kan hun ikke på forhånd vite hvordan det vil gå. Hun kan være heldig og vinne 10 eller 30 euro, eller hun kan være uheldig og tape 10 eller 30 euro. Sett fra kasinoet side er det annerledes. Det er mange rulettspillere der hver kveld. Og hvis vi for enkelhets skyld tenker oss at alle spiller tre omganger slik det ble beskrevet i avsnitt 8.1, gir store talls lov at spillerne i gjennomsnitt vil tape (og kasinoet tjene) omtrent 81 cent per spiller per kveld.

En liknende tankegang gjelder for all forsikringsvirksomhet. Et forsikringsselskap selger mange forsikringer av en bestemt type i løpet av ett år. Selskapet kan ikke på forhånd vite hvilke kunder som vil få utbetalt erstatning eller hvor store erstatningsutbetalingene vil bli. Vi kan derfor se på erstatningen til en kunde som en tilfeldig variabel. På grunnlag av tidligere erfaringer med forsikringer av den aktuelle typen, vet forsikringsselskapet (omtrent) hvilken sannsynlighetsfordeling denne variabelen har. Selskapet kan derfor beregne forventet erstatningsbeløp, og ved store talls lov vet de at gjennomsnittlig erstatningsutbetaling per kunde vil bli omtrent lik denne forventningsverdien. Dette er informasjon som er helt avgjørende når selskapet skal bestemme hvor mye forsikringen skal koste.

8.4 Forventning for binomisk fordeling

I avsnitt 7.3 så vi på binomisk fordeling. Vi vil nå se nærmere på forventningsverdien til en binomisk fordelt tilfeldig variabel.

Eksempel 8.3. En søskenflokk består av fire barn der ingen er eneggede tvillinger, trillinger eller firlinger. Vi lar X stå for antall gutter i søskenflokken, og vil finne forventningen til X.

I avsnitt 7.3 fant vi at X er binomisk fordelt med $n = 4$ og $p = 0.514$. Dermed er

$$P(X = k) = \binom{4}{k} \cdot 0.514^k \cdot 0.486^{4-k}$$

Ved å sette inn de ulike verdiene for k i dette utrykket får vi at

$$P(X = 0) = 0.056 \qquad P(X = 1) = 0.236 \qquad P(X = 2) = 0.374$$

$$P(X = 3) = 0.264 \qquad P(X = 4) = 0.070$$

Forventningsverdien blir derfor

$$E(X) = 0 \cdot 0.056 + 1 \cdot 0.236 + 2 \cdot 0.374 + 3 \cdot 0.264 + 4 \cdot 0.070 = 2.06$$

Forventet antall gutter i en firebarnsfamilie er 2.06. Det betyr at hvis vi registrerer kjønnsfordelingen i mange firebarnsfamilier, så vil det i gjennomsnitt være omtrent 2.06 gutter i familiene.

Resultatet i eksempel 8.3 er ikke så overraskende. Vi har nemlig at $4 \cdot 0.514 = 2.06$, så forventningsverdien er lik antall barn i familien multiplisert med sannsynligheten for at et barn er en gutt.

En kan vise at et tilsvarende resultat gjelder generelt:

Anta at X er binomisk fordelt slik det er beskrevet i avsnitt 7.3.
Da er $\mu = E(X) = np$.

Eksempel 8.4. Vi ser på situasjonen i eksempel 7.4. En bestemt type frø spirer med 70% sannsynlighet. Vi sår 20 frø, og lar X være antall frø som spirer. Da er X binomisk fordelt med $n = 20$ og $p = 0.70$. Forventningen er dermed:

$$E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0.70 = 14$$

Forventet antall frø som spirer er 14, dvs. 70% av de 20 frøene.

8.5 Forventningen til $a + bX$

La X være en tilfeldig variabel knyttet til et forsøk, og la a og b være konstanter. Da er $Y = a + bX$ en ny tilfeldig variable knyttet til det samme forsøket som X. Hvis vi gjentar forsøket mange ganger, blir gjennomsnittet av X-verdiene omtrent lik $E(X)$. Da må gjennomsnittet av Y-verdiene bli omtrent lik $a + b\,E(X)$.

Det motiverer følgende resultat:

La X være en tilfeldig variabel, og la a og b være konstanter. Da er

$$E(a + bX) = a + b\,E(X) \tag{8.4}$$

Eksempel 8.5. Vi ser på den "forsiktige" rulettspilleren i avsnitt 8.1. La X være antall ganger hun vinner i løpet av de tre spilleomgangene. Da er X binomisk fordelt med $n = 3$ og $p = 18/37$. Forventningsverdien til X er dermed lik $n \cdot p = 3 \cdot (18/37) = 54/37$.

Spilleren får utbetalt 20 euro hver gang hun vinner, mens hun bruker 10 euro som innsats i hvert spill. Den samlete nettogevinsten Y i de tre spilleomgangene kan derfor skrives som

$$Y = -30 + 20X$$

Forventet nettogevinst blir dermed

$$E(Y) = E(-30 + 20X) = -30 + 20\,E(X) = -30 + 20 \cdot \frac{54}{37} = -\frac{30}{37} = -0.81$$

I (8.2) fant vi det samme resultatet ved å ta utgangspunkt i sannsynlighetsfordelingen til Y.

Eksempel 8.6. Vi vil nå se generelt på rulettspillet. Vi betrakter en person som spiller n ganger, og som i hver spilleomgang satser 10 euro på k felt. (For den "forsiktige" spilleren i eksempel 8.5 er $n = 3$ og $k = 18$.) La X være antall ganger denne spilleren vinner i de n omgangene. Da er X binomisk fordelt med $p = k/37$, så $E(X) = np = n \cdot (k/37)$.

Hvis spilleren vinner får han utbetalt $10 \cdot (36/k)$ euro, mens innsatsen er 10 euro i hvert spill. Den samlete nettogevinsten i de n spillene blir derfor

$$Y = -10 \cdot n + 10 \cdot \frac{36}{k} \cdot X$$

Dermed blir den forventete nettogevinsten:

$$\begin{aligned} E(Y) &= -10 \cdot n + 10 \cdot \frac{36}{k} \cdot E(X) \\ &= -10 \cdot n + 10 \cdot \frac{36}{k} \cdot n \cdot \frac{k}{37} \\ &= -\frac{10}{37} \cdot n \end{aligned}$$

Vi ser at den forventete nettogevinsten ikke avhenger av k, dvs. av hvor mange felt spilleren satser på. Vi ser videre at spilleren i det lange løp vil tape $10/37 = 0.27$ euro, dvs. 27 cent, for hver 10 euro han spiller for.

9 Varians og standardavvik

Forventningsverdien til en tilfeldig variabel sier oss hva verdien til denne variabelen vil bli i gjennomsnitt hvis vi gjentar forsøket mange ganger. Men forventningen gir oss ingen informasjon om hvor mye verdien til variabelen vil variere fra forsøk til forsøk. Vi vil i dette avsnittet innføre to størrelser, varians og standardavvik, som sier oss noe om hvor mye verdien til en tilfeldig variabel vil variere. Som motivasjon ser vi igjen nærmere på ruletteksemplet.

9.1 Et motiverende eksempel

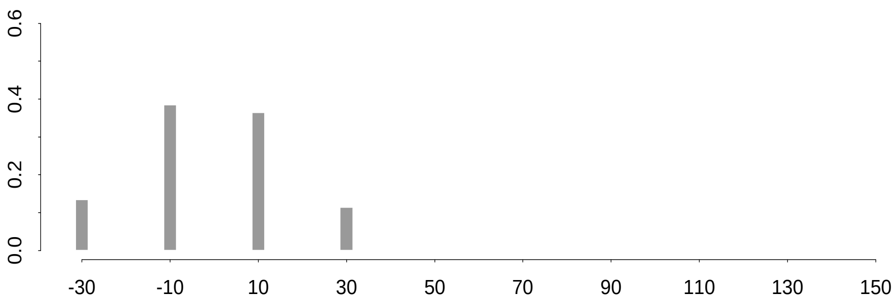
I avsnitt 8.1 så vi på en "forsiktig" rulettspiller som tre ganger satser 10 euro på 18 felt. Hennes samlede nettogevinst Y i løpet av de tre spilleomgangene har sannsynlighetsfordelingen

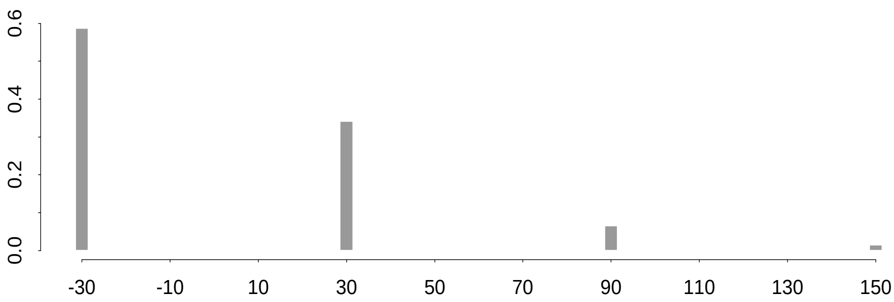
$$\begin{array}{ll} P(Y = -30) = 0.135 & P(Y = -10) = 0.385 \\ P(Y = 10) = 0.365 & P(Y = 30) = 0.115 \end{array}$$

Vi ser nå også på en litt "dristigere" spiller som tre ganger satser 10 euro på seks felt (for eksempel feltene 1–6). I henhold til beskrivelsen i avsnitt 8.1, blir hans nettogevinst i en omgang 50 euro hvis han vinner og -10 euro hvis han taper. La Z være den samlede nettogevinsten denne spilleren får i løpet av de tre spilleomgangene. Ved å resonnere på samme måte som i avsnitt 8.1, finner vi at Z har sannsynlighetsfordelingen:

$$\begin{aligned}
P(Z=-30) &= \left(\frac{31}{37}\right)^3 = 0.588 \\
P(Z=30) &= 3\cdot\frac{6}{37}\cdot\left(\frac{31}{37}\right)^2 = 0.342 \\
P(Z=90) &= 3\cdot\left(\frac{6}{37}\right)^2\cdot\frac{31}{37} = 0.066 \\
P(Z=150) &= \left(\frac{6}{37}\right)^3 = 0.004
\end{aligned}$$

Figuren viser sannsynlighetsfordelingene til Y (øverst) og Z (nederst):





Fra eksempel 8.6 følger det at både Y og Z har forventningsverdi $\mu = -30/37 = -0.81$. Men sannsynlighetsfordelingene er likevel nokså forskjellige. Spesielt ser vi at fordelingen til Z er mer "spredt ut" enn det fordelingen til Y er. Det er derfor mer sannsynlig at Z vil få verdier som avviker en god del fra forventningsverdien enn det er at Y vil få det.

For å få et mål på hvor mye fordelingen til Y er "spredt ut", kan vi se på hvordan Y-verdiene i gjennomsnitt vil "avvike" fra forventningsverdien $\mu = -30/37$ i det lange løp. Det er imidlertid ikke uten videre klart hva "avvik fra forventningsverdien" skal bety. En mulighet er å se på *absoluttavvik*. Hvis nettogevinsten Y får verdien -30 euro, er absoluttavviket $|-30-\mu| = |-30+30/37| = 29.19$. En annen mulighet er å se på *kvadratavviket* $(-30-\mu)^2 = (-30+30/37)^2 = 852.0$. Av grunner som vi kommer litt inn på i avsnitt 9.3, foretrekker vi å bruke kvadratavviket.

Den videre framgangsmåten ligner på den vi brukte i avsnitt 8.1 for å motivere definisjonen av forventningsverdi. Vi antar at den "forsiktige" spilleren kveld etter kveld går til kasinoet og spiller tre omganger rulett, og at hun hver gang satser på 18 felt. Vi antar som før at nettogevinstene hennes de 10 første kveldene blir -10 euro, 10 euro, 30 euro, 10 euro, 10 euro, 10 euro, -10 euro, -30 euro, -10 euro og 10 euro. Det gjennomsnittlige kvadratavviket fra forventningsverdien blir da for disse kveldene

$$\frac{1}{10}\big\{(-10-\mu)^2 + (10-\mu)^2 + (30-\mu)^2 + (10-\mu)^2 + (10-\mu)^2 \\ +(10-\mu)^2 + (-10-\mu)^2 + (-30-\mu)^2 + (-10-\mu)^2 + (10-\mu)^2\big\}$$

På lignende måte som i avsnitt 8.1 kan dette omformes til

$$(-30-\mu)^2\cdot\frac{1}{10} + (-10-\mu)^2\cdot\frac{3}{10} + (10-\mu)^2\cdot\frac{5}{10} + (30-\mu)^2\cdot\frac{1}{10}$$

Etter N kvelder er de relative frekvensene av kvelder med nettogevinst -30 euro, -10 euro, 10 euro og 30 euro lik henholdsvis $r_N(-30)$, $r_N(-10)$, $r_N(10)$ og $r_N(30)$. Det gjennomsnittlige kvadratavviket for de N kveldene kan da skrives som

$$(-30-\mu)^2\cdot r_N(-30) + (-10-\mu)^2\cdot r_N(-10) \\ +(10-\mu)^2\cdot r_N(10) + (30-\mu)^2\cdot r_N(30)$$

Hvis kvinnen spiller veldig mange kvelder, vil de relative frekvensene nærme seg de tilsvarende sannsynlighetene. Det gjennomsnittlige kvadratavviket vil da nærme seg

$$(-30-\mu)^2\cdot P(Y=-30) + (-10-\mu)^2\cdot P(Y=-10) \\ +(10-\mu)^2\cdot P(Y=10) + (30-\mu)^2\cdot P(Y=30) \qquad (9.1)$$

Vi setter inn for μ og sannsynlighetene i dette uttrykket og får[13]

$$(-30+30/37)^2\cdot 0.135 + (-10+30/37)^2\cdot 0.385 \\ +(10+30/37)^2\cdot 0.365 + (30+30/37)^2\cdot 0.115 \\ = 300$$

[13] Vi har her oppgitt det svaret en får når en regner med de eksakte verdiene av sannsynlighetene, og altså ikke runder de av til tre gjeldende siffer.

Hvis kvinnen spiller mange kvelder, vil altså det gjennomsnittlige kvadratavviket mellom de nettogevinstene hun får og forventet nettogevinst være omtrent 300. Dette gir et mål på hvor mye fordelingen til Y er "spredt ut".

Det tilsvarende regnestykket for den "dristige" spilleren blir[14]

$$\begin{aligned}
&(-30-\mu)^2 \cdot P(Z=-30) + (30-\mu)^2 \cdot P(Z=30) \\
&\quad +(90-\mu)^2 \cdot P(Z=90) + (150-\mu)^2 \cdot P(Z=150) \\
&= (-30+30/37)^2 \cdot 0.588 + (30+30/37)^2 \cdot 0.342 \\
&\quad +(90+30/37)^2 \cdot 0.066 + (150+30/37)^2 \cdot 0.004 \\
&= 1467
\end{aligned}$$

For den "dristige" spilleren vil dermed det gjennomsnittlige kvadratavviket mellom de nettogevinstene han får og forventet nettogevinst være omtrent 1467 i det lange løp. Det er en større verdi enn den vi fant for den "forsiktige" spilleren. Det kommer av at fordelingen til Z er mer "spredt ut" enn fordelingen til Y.

Gjennomsnittlig kvadratavvik i det lange løp kaller vi *varians*, og vi skriver $\text{Var}(Y)$ og $\text{Var}(Z)$ for variansene til Y og Z. Vi har altså funnet at $\text{Var}(Y) = 300$ og $\text{Var}(Z) = 1467$.

9.2 Definisjon av varians

Resonnementet i avsnitt 9.1 gjelder tilsvarende for alle tilfeldige variabler som har endelig mange mulige verdier. Det motiverer definisjonen[15]:

La X være en tilfeldig variabel med mulige verdier x_1, x_2 , ..., x_m og forventningsverdi lik μ. Da er variansen til X gitt ved

$$\begin{aligned}
&\text{Var}(X) \\
&= \quad (x_1-\mu)^2\, P(X=x_1) + (x_2-\mu)^2\, P(X=x_2) + \cdots + (x_m-\mu)^2\, P(X=x_m)
\end{aligned} \tag{9.2}$$

Eksempel 9.1. Vi kaster to terninger, og lar X være summen av antall øyne. Sannsynlighetsfordelingen til X er gitt ved tabellen i eksempel 8.1. I det eksemplet

[14]Også her har vi oppgitt det svaret en får når en regner med de eksakte verdiene av sannsynlighetene.

[15]Definisjonen av varians gjelder på liknende måte for stokastiske variabler som har tellbart uendelig mange mulige verdier, men da består summen i (9.2) av uendelig mange ledd.

fant vi også at $\mu = E(X) = 7$. Ved å bruke (9.2) finner vi nå variansen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= (2-7)^2 \cdot \frac{1}{36} + (3-7)^2 \cdot \frac{2}{36} + (4-7)^2 \cdot \frac{3}{36} + (5-7)^2 \cdot \frac{4}{36} \\
&\quad +(6-7)^2 \cdot \frac{5}{36} + (7-7)^2 \cdot \frac{6}{36} + (8-7)^2 \cdot \frac{5}{36} + (9-7)^2 \cdot \frac{4}{36} \\
&\quad +(10-7)^2 \cdot \frac{3}{36} + (11-7)^2 \cdot \frac{2}{36} + (12-7)^2 \cdot \frac{1}{36} \\
&= \frac{210}{36} = \frac{35}{6}
\end{aligned}$$

9.3 Standardavvik

Det kan være litt vanskelig å forstå hva varians gir uttrykk for. Hva betyr det for eksempel at variansen til nettogevinsten for den "forsiktige" spilleren er 300? For å forstå hvorfor variansen blir såpass stor i dette eksemplet i forhold til størrelsen av de nettogevinstene spilleren får, ser vi på hva benevningen for variansen er. Siden gevinsten er i euro, har kvadratavviket mellom gevinst og forventet gevinst benevningen "kvadrateuro". Det betyr at variansen til nettogevinsten er 300 euro^2, og dette er det vanskelig å forholde seg til.

For å få et mål for hvor mye en sannsynlighetsfordeling er "spredt ut" som har "riktig" benevning, definerer vi *standardavviket* som kvadratroten av variansen. For den forsiktige spilleren blir standardavviket til nettogevinsten 17.30 euro. Dette er et tall som det er lettere å forholde seg til enn variansen både når det gjelder størrelsesorden (i forhold til de nettogevinstene spillerne får) og benevning. Vi bruker ofte SD ("standard deviation") som betegnelse for standardavvik. Vi har altså:

Standardavviket til en en tilfeldig variabel X er gitt ved

$$SD(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} \tag{9.3}$$

Det kan virke bakvendt å definerer varians som gjennomsnittlig kvadratavvik i det lange løp for deretter å ta kvadratroten for å få standardavviket. Hvorfor bruker vi ikke i stedet det gjennomsnittlige absoluttavviket i det lange løp som mål på hvor "spredt ut" en fordeling er? Det er to grunner til det. For det første er det mulig å utlede flere nyttige regneregeler for varians, noe som ikke er mulig hvis vi hadde brukt absoluttavviket. For det andre er varians og standardavvik naturlige størrelser i forbindelse med normalfordelingen, som spiller en sentral rolle i sannsynlighetsregningen. (Men dette kurset fører ikke langt nok til at vi kan komme nærmere inn på disse begrunnelsene.)

9.4 Varians og standardavvik for binomisk fordeling

I avsnitt 7.3 så vi på binomisk fordeling. Vi vil nå se nærmere på varians og standardavvik for en binomisk fordelt tilfeldig variabel.

Eksempel 9.2. En søskenflokk består av fire barn der ingen er eneggede tvillinger, trillinger eller firlinger. Vi lar X stå for antall gutter i søskenflokken. Da er X binomisk fordelt med $n = 4$ og $p = 0.514$. I eksempel 8.3 fant vi at X har sannsynlighetsfordelingen:

$$P(X = 0) = 0.056 \qquad P(X = 1) = 0.236 \qquad P(X = 2) = 0.374$$

$$P(X = 3) = 0.264 \qquad P(X = 4) = 0.070$$

Der fant vi også at $\mu = E(X) = 2.06$.

Vi finner nå variansen:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= (0-2.06)^2 \cdot 0.056 + (1-2.06)^2 \cdot 0.236 + (2-2.06)^2 \cdot 0.374 \\ &\quad +(3-2.06)^2 \cdot 0.264 + (4-2.06)^2 \cdot 0.070 \\ &= 1.00\end{aligned}$$

Når vi runder av til to desimaler, blir variansen 1.00.

I eksempel 9.2 ble variansen (avrundet) lik 1.00. Det er ikke lett å ha en intuitiv forståelse av hvordan dette svaret framkommer, slik tilfellet var for forventningsverdien i eksempel 8.3. Men vi merker oss at $4 \cdot 0.514 \cdot (1 - 0.514) = 1.00$ (avrundet). Det er ingen tilfeldighet at de to uttrykkene blir like. Generelt kan vi nemlig vise følgende resultat:

Anta at X er binomisk fordelt slik det er beskrevet i avsnitt 7.3.
Da er $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$, og dermed $SD(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Eksempel 9.3. Vi ser på situasjonen i eksempel 8.4. En bestemt type frø spirer med 70% sannsynlighet. Vi sår 20 frø, og lar X være antall frø som spirer. Da er X binomisk fordelt med $n = 20$ og $p = 0.70$. Dermed er

$$\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 20 \cdot 0.70 \cdot 0.30 = 4.20$$

Standardavviket blir $SD(X) = \sqrt{4.20} = 2.05$.

9.5 Variansen til $a + bX$

La X være en tilfeldig variabel med forventningsverdi μ_X, og la a og b være konstanter. Da har den tilfeldige variabelen $Y = a + bX$ forventningsverdi $\mu_Y = a + b\mu_X$ (jf. avsnitt 8.5). Vi vil se hvordan variansen til Y kan uttrykkes ved variansen til X.

Variansen til X er den gjennomsnittlige verdien av $(X - \mu_X)^2$ når forsøket gjentas mange ganger, mens variansen til Y er den gjennomsnittlige verdien av $(Y - \mu_Y)^2$ i det lange løp. Nå er

$$(Y - \mu_Y)^2 = (a + bX - \{a + b\mu_X\})^2 = b^2 (X - \mu_X)^2$$

Det motiverer følgende resultat:

La X være en tilfeldig variabel, og la a og b være konstanter. Da er

$$\mathrm{Var}(a + bX) = b^2 \,\mathrm{Var}(X) \tag{9.4}$$

Eksempel 9.4. Vi ser igjen på den "forsiktige" rulettspilleren i avsnitt 8.1, og lar X være antall ganger hun vinner i løpet av de tre spilleomgangene. Da er X binomisk fordelt med $n = 3$ og $p = 18/37$, og vi har at

$$\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 3 \cdot \frac{18}{37} \cdot \frac{19}{37} = 0.749$$

I eksempel 8.5 forklarte vi at nettogevinsten Y kan skrives som $Y = -30 + 20X$. Variansen til nettogevinsten blir dermed

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(-30 + 20X) = 20^2 \cdot \mathrm{Var}(X) = 400 \cdot 0.749 = 300$$

Nettogevinsten har varians 300 euro^2 og standardavvik $\sqrt{300} = 17.30$ euro.

Eksempel 9.5. Vi ser så generelt på rulettspillet. Som i eksempel 8.6 betrakter vi en person som spiller n ganger, og som i hver spilleomgang satser 10 euro på k felt. La X være antall ganger denne spilleren vinner i de n omgangene. Da er X binomisk fordelt med $p = k/37$, og

$$\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = n \cdot \frac{k}{37} \cdot \frac{37-k}{37}$$

I eksempel 8.6 fant vi at spillerens samlede nettogevinsten i de n spillene er

$$Y = -10 \cdot n + 10 \cdot \frac{36}{k} \cdot X$$

Dermed blir variansen til nettogevinsten:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{Var}\left(-10 \cdot n + 10 \cdot \frac{36}{k} \cdot X\right) \\ &= \left(10 \cdot \frac{36}{k}\right)^2 \cdot \mathrm{Var}(X) \\ &= n \cdot \left(\frac{360}{37}\right)^2 \cdot \frac{37-k}{k}\end{aligned}$$

Vi ser at variansen er størst når k er liten. Dess færre felt spilleren satser på, dess mer variabel blir altså nettogevinsten. Vi merker oss videre at de variansene vi fant i avsnitt 9.1 for nettogevinstene til den "forsiktige" og den "dristige" spilleren kan fås direkte av det generelle resultatet i dette eksemplet (med $n = 3$ og $k = 18$ for den "forsiktige" spilleren, og $n = 3$ og $k = 6$ for den "dristige" spilleren).

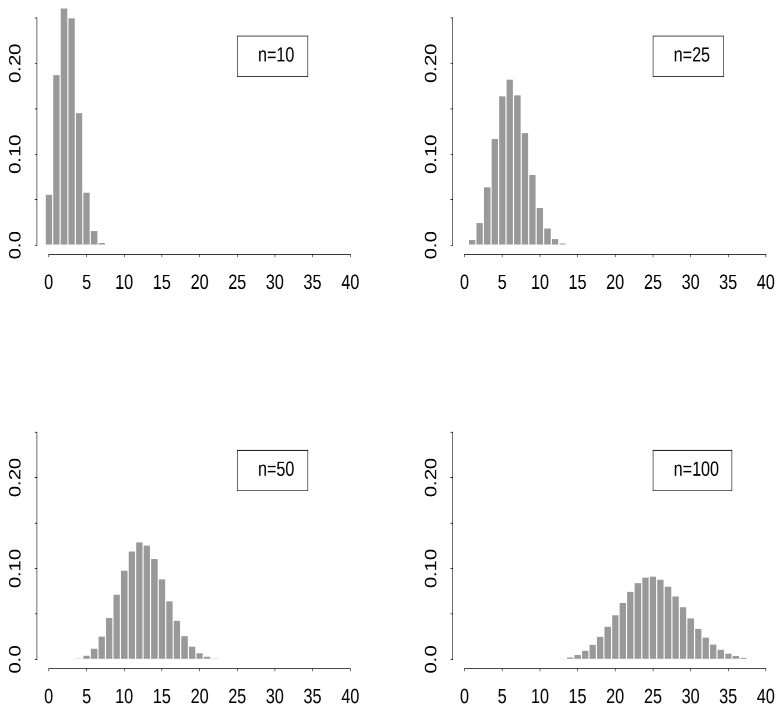
10 Tilnærming av binomiske sannsynligheter

Det kan være vanskelig å bruke (7.2) for å beregne sannsynligheter for den bionomiske fordelingen når n er stor. Alt for over 250 år siden ble det funnet en måte for å beregne tilnærmingsverdier for slike sannsynligheter. Abraham de Moivre (1667-1754) var født i Frankrike, men levde nesten hele sitt voksne liv i London. I 1733 viste de Moivre at en kan bruke standardnormalfordelingen (jf. formel (10.3) nedenfor) til å finne tilnærmingsverdier for sannsynligheter knyttet til den binomiske fordelingen. Vi vil her se nærmere på de Moivres tilnærming.

Vi begynner med å se på hvordan den binomiske sannsynlighetsfordelingen endrer seg når n vokser. Figuren øverst på neste side viser stolpediagram for den binomiske sannsynlighetsfordelingen for $n = 25, 50, 100, 200$ når $p = 1/4$:

Vi merker oss at fordelingen forskyves mot høyre når n øker samtidig som fordelingen blir mer "spredt ut". Det er ikke overraskende siden både forventningsverdien $np = n/4$ og variansen $np(1-p) = 3n/16$ øker med n.

For å finne en tilnærming til den binomiske fordelingen er det hensiktsmessig å forskyve den langs x-aksen slik at den får "tyngdepunktet" i origo. Det er videre hensiktsmessig å "skalere" fordelingen slik at den blir like mye "spredt ut" for alle verdier av n. Formelt får vi til dette ved å *standardisere* den binomiske variablen.



La X være binomisk fordelt med gitte verdier av n og p. Da har X forventningsverdi np og standardavvik $\sqrt{np(1-p)}$. Den *standardiserte* binomiske variabelen er da gitt ved

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \tag{10.1}$$

Ved å bruke resultatene i avsnittene 8.5 og 9.5 kan vi finne forventningsverdi og varians for den standardiserte variabelen:

$$\begin{aligned}
E(Z) &= E\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
&= E\left(-\frac{np}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}X\right) \\
&= -\frac{np}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}E(X) \\
&= -\frac{np}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}np \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{Var}\left(-\frac{np}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}X\right) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}\right)^2 \mathrm{Var}(X) \\
&= \frac{1}{np(1-p)}\, np(1-p) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

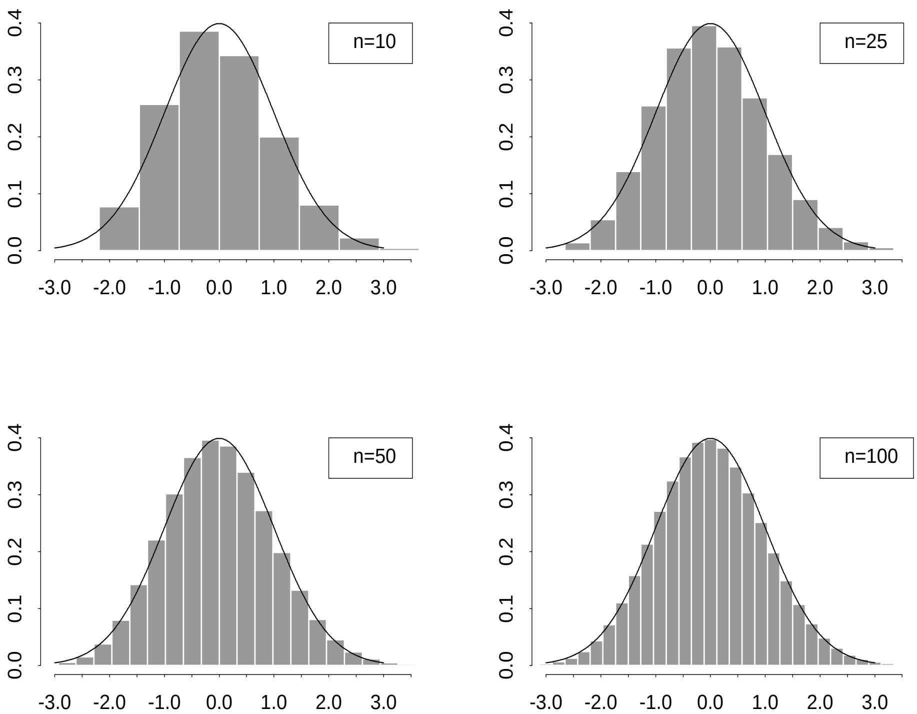
Den standardiserte binomiske variabelen (10.1) har altså forventningverdi 0 og varians 1 (og dermed også standardavvik 1).

For å finne sannsynlighetsfordelingen til Z merker vi oss at hvis $X = k$, så er $Z = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}$. Vi får derfor sannsynlighetsfordelingen til Z direkte av sannsynlighetsfordelingen til X:

$$
P\left(Z = \frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \text{for } k = 0, 1, \ldots, n \tag{10.2}
$$

Vi har tidligere vist stolpediagram for tilfeldige variabler som kan anta *heltallsverdier*. Da har vi latt bredden av en stolpe være lik én, mens vi har latt høyden være lik sannsynligheten for den verdien stolpen representerer. Det betyr at *arealet* av en stolpe er lik sannsynligheten for den verdien stolpen representerer. De mulige verdiene av den standardiserte variabelen Z er *ikke* heltallsverdier. Når vi skal tegne et stolpediagram for fordelingen til Z er det hensiktsmessig å gjøre det slik at det er *arealet* av en stolpe[16] som er lik sannsynligheten for den aktuelle verdien. Figuren øverst på neste side viser stolpediagram tegnet på denne måten for den standardiserte binomiske sannsynlighetsfordelingen for $p = 1/4$ og for de samme verdiene av n som ovenfor.

[16]Høyden av en stolpe er dermed lik sannsynligheten (10.2) multiplisert med $\sqrt{np(1-p)}$.



Vi ser at når n vokser, så nærmer stolpediagrammet seg mer og mer en glatt, symmetrisk kurve. Det gir en illustrasjon av de Moivres resultat.

Mer presist viste de Moivre (ved et matematisk resonnement) at for gitt verdi av p vil stolpediagrammet til den standardiserte binomiske variabelen (10.1) nærme seg funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2} \tag{10.3}$$

når n vokser over alle grenser. Denne funksjonen, som kalles *standardnormalfordelingsfunksjonen*, er også tegnet inn på figuren ovenfor. En kan vise at *arealet under standardnormalfordelingsfunksjonen er lik én.*

Når vi skal bruke de Moivres resultat til å finne en tilnærmingsverdi for binomiske sannsynligheter, går vi fram på følgende måte. Anta at X er binomisk fordelt med $p = 0.25$ og $n = 100$, og at vi er interessert i å finne $P(X \leq 33)$. Først merker vi oss at

$$P(X \leq 33) = P\left(Z \leq \frac{33 - 100 \cdot 0.25}{\sqrt{100 \cdot 0.25 \cdot 0.75}}\right) = P(Z \leq 1.85)$$

For å finne $P(Z \leq 1.85)$ skal vi egentlig summere arealene av alle søylene i stolpediagrammet for Z til venstre for 1.85. Men siden n er stor gir de Moivres resultat at denne summen er omtrent like stor som arealet under standardnormalfordelingsfunksjonen til venstre for 1.85. Dette arealet kan vi finne ved å bruke tabellen bakerst i kompendiet (eller GeoGebra). Det gir $P(X \leq 33) = P(Z \leq 1.85) \approx 0.968$.

Vi antar fortsatt at X er binomisk fordelt med $p = 0.25$ og $n = 100$, men vi er nå interessert i å finne $P(X \geq 19)$. På liknende måte som over merker vi oss at

$$P(X \geq 19) = P\left(Z \geq \frac{19 - 100 \cdot 0.25}{\sqrt{100 \cdot 0.25 \cdot 0.75}}\right) = P(Z \geq -1.39)$$

Ved de Moivres resultat er $P(Z \geq -1.39)$ omtrent lik arealet under standardnormalfordelingsfunksjonen til høyre for -1.39. Siden arealet under hele standardnormalfordelingsfunksjonen er lik én, finner vi *arealet til høyre for* -1.39 *som én minus arealet til venstre for* -1.39. Av tabellen ser vi at arealet under standardnormalfordelingsfunksjonen til venstre for -1.39 er 0.082. Dermed er $P(X \geq 19) = P(Z \geq -1.39) \approx 1 - 0.082 = 0.918$.

Eksempel 10.1. Hva er sannsynligheten for å få høyst 150 seksere hvis vi kaster en terning 1000 ganger? La X være antall seksere i de 1000 kastene. Da er X binomisk fordelt med $n = 1000$ og $p = 1/6$. Nå har vi at

$$P(X \leq 150) = P\left(Z \leq \frac{150 - 1000 \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}}\right) = P(Z \leq -1.41)$$

Tabellen bak i kompendiet gir at $P(Z \leq -1.41) \approx 0.079$. Sannsynligheten er omtrent 8% for å få høyst 150 seksere.

Eksempel 10.2. En bestemt type frø spirer med 70% sannsynlighet. På et gartneri sår de 500 frø og ser om de spirer. Hva er sannsynligheten for at minst 330 frø vil spire? La X være antall frø som spirer. Hvis frøene spirer uavhengig av hverandre, er X binomisk fordelt med $n = 500$ og $p = 0.70$. Dermed er

$$P(X \geq 330) = P\left(Z \geq \frac{330 - 500 \cdot 0.70}{\sqrt{500 \cdot 0.70 \cdot 0.30}}\right) = P(Z \geq -1.95)$$

Ved de Moivres resultat er $P(Z \geq -1.95)$ tilnærmet lik arealet under standardnormalfordelingsfunksjonen til *høyre* for -1.95. Av tabellen finner vi at arealet til *venstre* for -1.95 er 0.026. Det gir at $P(Z \geq -1.95) \approx 1 - 0.026 = 0.974$ Sannsynligheten er omtrent 97% for at minst 330 frø vil spire.

Eksempel 10.3. Vi tenker oss at Arbeiderpartiet på et tidspunkt har oppslutning av 32.0% av velgerne. Et meningsmålingsinstitutt spør et tilfeldig utvalg på 1000 personer over 18 år hvilket parti de ville ha stemt på hvis det hadde vært stortingsvalg i morgen. Hva er sannsynligheten for at mellom 300 og 340 av de spurte ville ha stemt Arbeiderpartiet? Eller sagt på en annen måte, hva er sannsynligheten for at Arbeiderpartiets oppslutning på meningsmålingen vil bli mellom 30.0% og 34.0% ? (Vi regner med at alle de spurte ville ha stemt hvis det hadde vært valg.)

Vi lar X være antallet av de spurte som ville ha stemt på Arbeiderpartiet. Da vi trekker uten tilbakelegging, er hendelsene "første person ville ha stemt på Arbeiderpartiet", "andre person ville ha stemt på Arbeiderpartiet", osv. egentlig avhengige. Men siden meningsmålingsinstituttet bare spør en liten brøkdel av alle personer over 18 år, kan vi se på hendelsene som uavhengige. Vi kan derfor regne som om X er binomisk fordelt med $n = 1000$ og $p = 0.32$.

Nå har vi at

$$\begin{aligned} & P(300 \leq X \leq 340) \\ = \;& P\left(\frac{300 - 1000 \cdot 0.32}{\sqrt{1000 \cdot 0.32 \cdot 0.68}} \leq Z \leq \frac{340 - 1000 \cdot 0.32}{\sqrt{1000 \cdot 0.32 \cdot 0.068}}\right) \\ = \;& P(-1.36 \leq Z \leq 1.36) \end{aligned}$$

Ved de Moivres resultat er den sannsynligheten vi er ute etter omtrent lik arealet under standardnormalfordelingsfunksjonen *mellom* -1.36 og 1.36. Men dette arealet er lik arealet under standardnormalfordelingsfunksjonen til venstre for 1.36 minus arealet til venstre for -1.36. Av tabellen finner vi at disse arealene er lik 0.913 og 0.087, henholdvis. Det gir

$$P(300 \leq X \leq 340) = P(-1.36 \leq Z \leq 1.36) \approx 0.913 - 0.087 = 0.826$$

Sannsynligheten er omtrent 83% for at Arbeiderpartiet vil få en oppslutning på meningsmålingen mellom 30.0% og 34.0% .

Hvor stor må n være for at de Moivres resultat skal gi en brukbar tilnærming? Det er ikke mulig å gi noe "fasitsvar" på dette. Svaret vil avhenge av hvor god vi forlanger at tilnærmingen skal være. Men en vanlig "tommelfingerregel" er at vi kan bruke tilnærmingen hvis både np og $np(1-p)$ er minst lik ti[17].

11 Konfidensintervall og hypotesetesting

Vi har i de forrige avsnittene sett på tilfeldige variabler og deres sannsynlighetsfordelinger, og på størrelser som forventning, varians og standardavvik. Dette er

[17] Tilnærmingen er ikke veldig god hvis np og/eller $np(1-p)$ er nær ti. I slike situasjoner fins det teknikker som gjør tilnærmingen bedre. Men det vil føre for langt å komme inn på dette her.

en del av sannsynlighetsregningen. I dette avsnittet skal vi se litt på hvordan sannsynlighetsregningen danner grunnlaget for statistiske metoder.

I sannsynlighetsregningen forutsetter vi at fordelingen til den tilfeldige variabelen er kjent. Hvis for eksempel X er binomisk fordelt, kjenner vi sannsynligheten p for at hendelsen S vil inntreffe i et forsøk, jf. avsnitt 7.3. Da kan vi regne ut sannsynligheten for at X vil få bestemte verdier, og vi kan finne forventning, varians og standardavvik.

I statistikken er det annerledes. Her vet vi ikke hvilken verdi p har. Men på grunnlag av en observert verdi av X ønsker vi å anslå verdien av p (avsnitt 11.1) eller å avgjøre om en bestemt verdi av p er forenelig med det vi har observert (avsnitt 11.2).

11.1 Estimering og konfidensintervall

I mange situasjoner er vi interessert i å anslå ("estimere" på statistiker-språket) verdien av p ut fra det resultatet vi har observert i et forsøk, og også å si noe om hvor presist anslaget er.

Eksempel 11.1. Ved meningsmålingen for NRK for januar 2016 ble 955 personer spurt om de ville ha stemt hvis det hadde vært stortingsvalg i morgen og hvilket parti de såfall ville ha stemt på. Av de spurte var det 721 som ville ha stemt hvis det hadde vært valg og av dem ville 180 ha stemt på Høyre[18]. Andelen som ville ha stemt på Høyre er altså 180/721=0.297, dvs. 25.0%. Dette er et anslag på Høyres oppslutning. Men hvor sikkert er dette anslaget? Kan vi finne en "feilmargin" som anslaget må tolkes innenfor?

Generelt ser vi på følgende situasjon. I en stor populasjon er det et ukjent antall individer som har et bestemt "kjennetegn". I eksempel 11.1 er populasjonen alle personer over 18 år som ville ha brukt stemmeretten hvis det hadde vært stortingsvalg, og kjennetegnet er at en person ville ha stemt på Høyre. Vi lar p være den ukjente andelen av individer i populasjonen som har kjennetegnet.

For å estimere p trekker vi et tilfeldig utvalg på n individer fra populasjonen. I eksemplet er de 721 et tilfeldig utvalg av alle over 18 år som ville ha stemt hvis det hadde vært valg i morgen. Vi forutsetter at størrelsen av utvalget er liten i forhold til størrelsen av hele populasjonen, og lar X være antall individer i utvalget med kjennetegnet. Til å anslå p bruker vi andelen i utvalget som har kjennetegnet, det vil si

$$\widehat{p} = \frac{X}{n} \tag{11.1}$$

[18]Tallene er rekonsruert ut fra opplysninger gitt på NRK.no.

Vi sier at $\widehat{p}$ (som vi leser "p hatt") er en *estimator* for p. Det anslaget vi kommer fram til når vi bruker (11.1), kaller vi et *estimat*. I eksempel 11.1 er estimatet 25.0%.

Den tilfeldige variabelen X er antall individer i utvalget med kjennetegnet. Da vi trekker uten tilbakelegging, er hendelsene "første individ vi trekker har kjennetegnet", "andre individ vi trekker har kjennetegnet", osv. egentlig avhengige. Men siden utvalget er lite i forhold til hele populasjonen, kan vi se på hendelsene som uavhengige. Vi kan derfor regne som om X er binomisk fordelt med p lik den ukjente andelen av individer i populasjonen som har kjenneteget.

Ved å bruke de Moivres resultat kan vi vise at (sjekk selv!)

$$P\left(-1.96 \leq \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq 1.96\right) \approx 0.95$$

Nå er

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

slik at vi også har

$$P\left(-1.96 \leq \frac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq 1.96\right) \approx 0.95 \qquad (11.2)$$

Det er mulig å vise at (11.2) fortsatt gjelder om vi erstatter p i nevneren med $\widehat{p}$. Det betyr at

$$P\left(-1.96 \leq \frac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}} \leq 1.96\right) \approx 0.95 \qquad (11.3)$$

Ved å omforme ulikehetene

$$-1.96 \leq \frac{\widehat{p} - p}{\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}} \leq 1.96$$

finner vi at de er oppfylt hvis og bare hvis ulikhetene

$$\widehat{p} - 1.96\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}} \leq p \leq \widehat{p} + 1.96\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}$$

er oppfylt. Men da følger det av (11.3) at

$$P\left(\widehat{p} - 1.96\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}} \leq p \leq \widehat{p} + 1.96\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right) \approx 0.95$$

Det er altså tilnærmet 95% sannsynlig at vi vil få et resultat som er slik at p vil ligge i intervallet

$$\left[\widehat{p} - 1.96\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\ ,\ \widehat{p} + 1.96\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right] \tag{11.4}$$

Vi sier at intervallet (11.4) er et (tilnærmet) 95% *konfidensintervall* for p.

Eksempel 11.2. Vi ser igjen på meningsmålingen i eksempel 11.1. Vi fant der at $\widehat{p} = 180/721 = 0.250$. Av (11.4) finner vi nå at et tilnærmet 95% konfidensintervall for Høyres oppslutning er

$$\left[0.250 - 1.96\sqrt{\frac{0.250(1-0.250)}{721}}\, ,\, 0.250 + 1.96\sqrt{\frac{0.250(1-0.250)}{721}}\right]$$

dvs.

$$[0.218\, ,\, 0.282]$$

Ut fra konfidensintervallet vil vi "regne med" at Høyres oppslutning på det aktuelle tidspunktet ligger mellom 21.8% og 28.2%. Dette gir en "feilmargin" for resultatet av meningsmålingen.

I de fleste intervjuundersøkelser er populasjonen klart definert. For en politisk meningsmåling er for eksempel populasjonen alle personer over 18 år som ville ha brukt stemmeretten hvis det hadde vært stortingsvalg. Men det er ikke alltid like klart hvordan populasjonen er definert.

Eksempel 11.3. En hudlege ønsker å finne ut hvor stor andel av pasienter med psoreasis som vil bli kvitt utslettene hvis de bruker en ny salve. Hun lar 150 pasienter som nettopp har fått psoreasis, prøve den nye salven. Av dem blir 54 kvitt utslettene. Hva kan hun slutte av dette?

Legen er ikke bare interessert i hvordan det går med de 150 pasientene som får den nye salven. Hun er også interessert i hvordan salven vil virke for psoreasispasienter generelt. Hun tenker seg derfor at de 150 pasientene er et tilfeldig utvalg av populasjonen av alle nåværende og framtidige pasienter. Det er et rimelig utgangspunkt hvis det ikke skjer endringer i sammensetningen av denne pasientgruppen. Med denne forutsetningen finner legen at et estimat for andelen p som vil bli kvitt utslettene når de bruker salven er $\widehat{p} = 54/150 = 0.360$, dvs. 36.0%. Et 95% konfidensintervall blir

$$\left[0.360 - 1.96\sqrt{\frac{0.360(1-0.360)}{150}}\, ,\, 0.360 + 1.96\sqrt{\frac{0.360(1-0.360)}{150}}\right]$$

dvs.

$$[0.283\, ,\, 0.437]$$

Ut fra konfidensintervallet vil legen "regne med" at mellom 28.3% og 43.7% av psoreasis-pasienter vil bli kvitt utslettene hvis de bruker den nye salven.

Vi fant konfidensintervallet (11.4) ved å ta utgangspunkt i de Moivres tilnærming. Denne tilnærmingen er brukbar når både np og $n(1-p)$ er minst lik 10 (jf. avsnitt 10). Siden vi ikke kjenner p, får vi nå "tommelfingerregelen" at $n\widehat{p} = X$ og $n(1-\widehat{p}) = n - X$ begge må være minst lik 10 for at vi skal kunne bruke konfidensintervallet (11.4).

Hva betyr det egentlig at (11.4) er et 95% konfidensintervall for p? For å forstå det er det viktig å legge merke til at (11.4) er et stokastisk intervall, det vil si et intervall der øvre og nedre grense er tilfeldige variabler. Som alle andre sannsynligheter kan 95% her tolkes som en relativ frekvens i det lange løp.

For å forklare dette tar vi for oss meningsmålingseksemplet igjen. Vi tenker oss da at det på et tidspunkt blir utført veldig mange meningsmålinger, og at vi for hver måling regner ut et 95% konfidensintervall for Arbeiderpartiets oppslutning. Da vil omtrent 95% av disse intervallene inneholde den virkelige oppslutningen om Arbeiderpartiet. Etter at vi har regnet ut intervallgrensene på grunnlag av én bestemt måling, har det ingen mening å snakke om sannsynligheten for at intervallet skal inneholde den virkelige oppslutningen om Arbeiderpartiet. For enten er den med i intervallet eller så er den ikke det.

11.2 Litt om hypotesetesting

I en del sammenhenger er vi interessert i å undersøke om det resultatet vi har observert i et forsøk er forenelig med en bestemt hypotese om verdien til p. Vi vil forklare tankegangen med slik hypotesetesting ved hjelp av et eksempel.

Et farmasøytisk firma ønsker å finne ut om en ny salve mot eksem er bedre enn den gamle. For å gjøre det, utfører de et forsøk – en såkalt klinisk prøving. Hundre pasienter, som har eksem på begge hendene (omtrent like alvorlig på hver hånd), tar del i forsøket. Hver pasient får ved loddtrekning den nye salven på en hånd og den gamle salven på den andre.

For å unngå at subjektive vurderinger skal påvirke resultatet, gjøres forsøket "dobbelt blindt". Det betyr at hverken pasienten eller behandlende lege vet hvilken salve som brukes på hver hånd. Det er det bare det farmasøytiske firmaet som kjenner til. Det får en til ved at firmaet pakker salvene i nøytrale tuber som bare er merket med pasientnummer og hvilken hånd tuben skal brukes på.

Etter fire uker avgjør legen hvilken av de to hendene som nå er best, og det farmasøytiske firmaet finner ut av sine lister om denne hånden har blitt behandlet med den gamle eller den nye salven. De teller så opp antall pasienter der den nye salven ga best resultat[19]. La oss si at den nye salven ga best resultat for

[19] Vi forutsetter her at en alltid klarer å avgjøre hvilken hånd som er best. I praksis vil det

61 av pasientene. Kan det farmasøytiske firmaet *med rimelig grad av sikkerhet* konkludere med at den nye salven er bedre enn den gamle?

For å avgjøre det går vi fram på følgende måte. Vi setter opp en hypotese – kalt *nullhypotesen* – om at de to salvene er like gode. Alternativet til nullypotesen – kalt den *alternative hypotesen* – er at den nye salven er bedre enn den gamle[20]. Vi finner så ut om resultatet av forsøket er et resultat som "godt kan ha oppstått bare på grunn av tilfeldigheter" *hvis* nullhypotesen er sann, eller om resultatet da er "såpass uvanlig" at det gir oss grunn til å tvile på nullhypotesen.

Mer presist går vi fram på følgende måte. La X være antall pasienter hvor den nye salven er best. *Hvis* nullhypotesen er sann, dvs. hvis det egentlig ikke er noen forskjell på salvene, er X binomisk fordelt med $n = 100$ og $p = 0.50$. I det konkrete forsøket fikk X verdien 61. Men hvis vi hadde gjentatt forsøket ville nok X ha fått en annen verdi. For å finne ut om den verdien vi har observert er "uvanlig", regner vi ut sannsynligheten for at X vil bli minst lik 61 *hvis* nullhypotesen er sann. For å gjøre det, innfører vi

$$Z_0 = \frac{X - 100 \cdot 0.50}{\sqrt{100 \cdot 0.50 \cdot 0.50}}$$

og merker oss at

$$P(X \geq 61) = P\left(Z_0 \geq \frac{61 - 100 \cdot 0.50}{\sqrt{100 \cdot 0.50 \cdot 0.50}}\right) = P(Z_0 \geq 2.20)$$

Hvis nullhypotesen er sann, er X binomisk fordelt med $n = 100$ og $p = 0.50$. Da gir de Moivres resultat at $P(Z_0 \geq 2.20)$ er tilnærmet lik arealet under standardnormalfordelingsfunksjonen til høyre for 2.20. Ved å bruke tabellen bak i kompendiet (til å finne arealet til venstre for 2.20) finner vi at $P(X \geq 61) = P(Z_0 \geq 2.20) \approx 1 - 0.986 = 0.014$. Det er altså bare 1.4% sannsynlig at den nye salven vil bli best for minst 61 pasienter *hvis* de to salvene egentlig er like gode. Siden denne sannsynligheten er såpass liten, er det liten grunn til å tro at salvene egentlig er like gode og at det observerte resultatet "bare skyldes tilfeldigheter". Det farmasøytiske firmaet kan derfor med rimelig grad av sikkerhet konkludere med at den nye salven er bedre enn den gamle.

Før vi oppsummerer hovedtrekkene i framgangsmåten, ser vi på et eksempel til:

Eksempel 11.4. En produsent påstår at en bestemt type frø har en spireprosent på 70%. Du har mistanke om at spireprosenten ikke er så høy, og bestemmer deg for å utføre et forsøk for å test produsentens påstand. Det gjør du ved å så 80 frø i hagen og se hvor mange av dem som spirer. Anta at 50 av frøene spirer.

---

imidlertid alltid være noen pasienter hvor en ikke klarer å gjøre dette.

[20]For enkelhets skyld ser vi her bort fra muligheten for at den nye salven er dårligere enn den gamle.

Gir dette deg et overbevisende grunnlag for å påstå at spireprosenten faktisk er mindre enn 70%?

For å avgjøre dette går vi fram på liknende måte som ovenfor. Nullhypotesen er produsentens påstand om at spireprosenten er 70%, mens den alternative hypotesen[21] er at spireprosenten er lavere enn 70%. La X være antall frø som spirer. *Hvis* nullhypotesen er sann, er X binomisk fordelt med $n = 80$ og $p = 0.70$. I det konkrete forsøket fikk X verdien 50. Men hvis vi hadde gjentatt forsøket ville nok X ha fått en annen verdi. For å finne ut om den verdien vi har observert er "uvanlig", regner vi ut sannsynligheten for at X vil bli høyst lik 50 *hvis* nullhypotesen er sann. Vi innfører

$$Z_0 = \frac{X - 80 \cdot 0.70}{\sqrt{80 \cdot 0.70 \cdot 0.30}}$$

og merker oss at

$$P(X \leq 50) = P\left(Z_0 \leq \frac{50 - 80 \cdot 0.70}{\sqrt{8 \cdot 0.70 \cdot 0.30}}\right) = P(Z_0 \leq -1.46)$$

Hvis nullhypotesen er sann, er X binomisk fordelt med $n = 80$ og $p = 0.70$. Da gir de Moivres resultat at $P(Z_0 \leq -1.46)$ er tilnærmet lik arealet under standardnormalfordelingsfunksjonen til venstre for -1.46. Ved å bruke tabellen bak i kompendiet finner vi dermed at $P(X \leq 50) = P(Z_0 \leq -1.46) \approx 0.072$. Det er altså 7.2% sannsynlig at høyst 50 frø vil spire *hvis* spireprosenten er 70%. Siden denne sannsynligheten er såpass stor, gir forsøket ikke et overbevisende grunnlag for å påstå at spireprosenten er mindre enn 70%. Men vi merker oss at det i virkeligheten likevel godt kan være slik at spireprosenten er mindre enn 70%, men at vårt forsøk ikke har nok "beviskraft" til å påvise dette.

Vi vil til slutt i dette avsnittet oppsummere det som er felles for de to eksemplene. Det gir også en beskrivelse av den generelle framgangsmåten ved hypotesetesting i binomiske situasjoner.

- Vi observerer verdien til en binomisk fordelt tilfeldig variabel X, men vi kjenner ikke p i den binomiske fordelingen.
- Det vi er interessert i å finne ut kan formuleres som hypoteser om p. Konkret en *nullhypotese* om at p antar en bestemt verdi p_0 og en *alternativ hypotese*[22] om at p er større/mindre enn p_0. (I eksem-eksemplet er nullhypotesen $p = 0.50$, mens den alternative hypotesen er $p > 0.50$. I frø-eksemplet er nullypotesen $p = 0.70$, mens den alternative hypotesen er $p < 0.70$.)

[21] For enkelhets skyld ser vi her bort fra muligheten av at spireprosenten er større enn 70%.

[22] En kan også være interessert i en såkalt tosidig alternativ hypotese om at p er forskjellig fra p_0. Vi vil ikke se på tosidige alternative hypoteser i dette kurset.

- Vi beregner sannsynligheten, når nullhypotesen er sann, for å få en verdi av X som er minst like mye i favør av den alternative hypotesen som den verdien vi fikk i forsøket. Denne sannsynligheten kaller vi *P-verdien.* (I eksem-eksemplet er store verdier av X i favør av alternativet, så der er P-verdien lik $P(X \geq 61)$. I frø-eksemplet er små verdier av X i favør av alternativet, så der er P-verdien lik $P(X \leq 50)$.)

- Vi *forkaster* nullhypotesen hvis P-verdien er liten (tradisjonelt mindre enn 5% eller 1%). Konklusjonen er da at p er *signifikant* større/mindre enn p_0, dvs. vi aksepterer den alternative hypotesen. (I eksem-eksemplet forkastet vi nullhypotesen $p = 0.50$, og vi aksepterte derfor den alternative hypotesen $p > 0.50$.)

- Hvis nullhypotesen *ikke* forkastes, gir ikke undersøkelsen oss grunnlag for å trekke sikre konklusjoner. Det at nullhypotesen ikke forkastes, er altså ikke et "bevis" for at nullhypotesen er sann. (I frø-eksemplet forkastet vi ikke nullhypotesen $p = 0.70$. Vi hadde derfor ikke et overbevisende grunnlag for å påstå at spireprosenten er mindre enn 70%.)

Tabellen gir arealet under standardnormalfordelings-funksjonen til venstre for z for negative z-verdier

	Siste desimal i z									
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−3	0.0013	0.0010	0.0007	0.0005	0.0003	0.0002	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Tabellen gir arealet under standardnormalfordelings-funksjonen til venstre for z for positive z-verdier

	Siste desimal i z									
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	1.0000	1.0000