Oppgaver i
Sannsynlighetsregning og kombinatorikk
MAT0100V våren 2016

Ørnulf Borgan

Matematisk institutt

Universitetet i Oslo

Oppgave 1 Et forsøk er deterministisk hvis vi kan forutsi resultatet. Hvis det ikke er slik, sier vi at forsøket er tilfeldig. Vi bruker ordet forsøk mer vidt enn en er vant til fra elevforsøkene i naturfag. Er disse forsøkene deterministiske eller tilfeldige?

a) Kast et kronestykke og se om du får mynt eller krone.

b) Varm opp vann til 70 grader og se om det koker.

c) Seks barnehagebarn skal leke sisten. De avgjør ved å "elle" hvem som skal "stå".

Oppgave 2 Du kaster en terning. Hvilke utfall er med i hendelsene: a) minst 4 øyne; b) høyst 4 øyne; c) mer enn 4 øyne; d) mindre enn 4 øyne?

Oppgave 3 Du kaster to terninger. Hvilke utfall er med i hendelsene: a) sum øyne lik fire; b) sum øyne lik seks; c) minst én firer; d) sum øyne minst ni?

Oppgave 4 En kortstokk har 52 kort. Kortene er delt inn i fire "farger" : kløver, ruter, hjerter og spar. I hver farge er det tretten kort: 2, 3, ..., 10, knekt, dame, konge og ess. Du trekker tilfeldig ett kort.

a) Hva er utfallsrommet for dette forsøket?

b) Hvilke utfall er med i hendelsene (i) "en kløver" (ii) "et ess" (iii) "et rødt kort" (dvs. ruter eller hjerter) (iv) "et honnørkort" (dvs. knekt, dame, konge eller ess)?

Oppgave 5 Du kaster en terning. Hva er sannsynligheten for at du får a) minst 4 øyne; b) høyst 4 øyne; c) mer enn 4 øyne; d) mindre enn 4 øyne?

Oppgave 6 Du kaster to mynter og ser hvilke sider de lander på. Hva er sannsynligheten for at du får a) to krone; b) to mynt; c) én krone?

Oppgave 7 Du kaster to terninger. Hva er sannsynligheten for at du får a) sum øyne lik fire; b) sum øyne lik seks; c) minst én firer; d) sum øyne minst ni?

Oppgave 8 Du trekker tilfeldig ett kort fra en kortstokk. Hva er sannsynligheten for at du får a) en kløver; b) et ess; c) ikke et ess; d) et rødt kort (dvs. ruter eller hjerter); e) et svart kort (dvs. kløver eller spar); f) et honnørkort (dvs. knekt, dame, konge eller ess)?

Oppgave 9 Vi kaster tre kronestykker og ser for hvert av dem om vi får mynt eller krone.

a) Hvor mange utfall har dette forsøket? Skriv ned alle utfallene.

b) Hva er sannsynligheten for hendelsen "tre mynt"?

c) Hva er sannsynligheten for hendelsen "to mynt"?

d) Hva er sannsynligheten for hendelsen "minst to mynt"?

Oppgave 10 Se på eksempel 2.15. Hva er sannsynligheten for at

a) Velgeren stemte på et "rød-grønt parti"(SV, Ap eller Sp)?

b) Velgeren stemte på et "blå-blått parti" (H eller Frp)?

Oppgave 11 Et menneske har en av blodtypene A, B, AB eller 0. I Norge har 48% blodtype A, 8% blodtype B, 4% blodtype AB og 40% blodtype 0. En lege undersøker blodtypen til en nordmann.

a) Skriv opp utfallsrommet og sannsynlighetsmodellen for dette forsøket.

b) Hva er sannsynligheten for at blodtypen er AB eller B? Hva er sannsynligheten for at blodtypen ikke er A?

Oppgave 12 Hvis vi har en sannsynlighetsmodell der alle utfallene er like sannsynlige, sier vi at modellen er uniform. I hvilke av disse situasjonene er det rimelig å bruke en uniform sannsynlighetsmodell:

a) I en eske ligger 34 kuler nummerert 1, 2, 3, ... , 34. Vi trekker tilfeldig en kule og ser hvilket nummer den har.

b) Vi ser om en fotballkamp ender med hjemmeseier (H), uavgjort (U) eller borteseier (B).

c) Vi kaster en tegnestift og ser om den lander med spissen opp eller spissen ned.

d) Vi kjøper ett lodd i et lotteri og sjekker om loddet vinner første premie.

Oppgave 13 Betrakt følgende spill. Et kronestykke kastes inntil to ganger. Hvis det blir krone i første kast vinner spilleren og spillet er slutt. Hvis det blir mynt i første kast gjøres et kast til. Hvis det nå blir krone vinner spilleren. Ellers taper spilleren.

a) Angi et utfallsrom for dette forsøket. Angi også en rimelig sannsynlighetsmodell. Er den uniform?

b) Hvilke utfall utgjør hendelsen A=“spilleren vinner”? Finn $P(A)$ utfra sannsynlighetsmodellen i punkt a.

Oppgave 14 Vi kaster et kronestykke inntil vi får krone første gang, og registrerer antall kast vi må gjøre.

a) Forklar hvorfor et utfallsrom for dette forsøket er gitt som $U = \{1, 2, 3, \ldots\}$

La $P(k)$ angi sannsynligheten for at vi får krone første gang i k-te kast. En sannsynlighetsmodell for forsøket er gitt ved $P(k) = (1/2)^k$ for $k = 1, 2, \ldots$.

b) Vis at dette faktisk blir en sannsynlighetsmodell, dvs. sjekk at $P(k)$-ene tilfredsstiller aksiomene for en sannsynlighetsmodell[1]. Syns du modellen ser rimelig ut?

c) Finn sannsynligheten for hendelsen “høyst fire kast”.

Oppgave 15 Se på eksempel 3.2.

a) Hva er sannsynligheten for at både medlem og varamedlem blir jenter?

[1]Du kan bruke at for $|a| < 1$ er $a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots = a/(1 - a)$.

b) Hva er sannsynligheten for at klassen får en gutt som medlem og en jente som varamedlem av elevrådet?

c) Hva er sannsynligheten for at det velges én av hvert kjønn (når vi ikke bryr oss om hvem som blir medlem og hvem som blir varamedlem)?

Oppgave 16 I en urne (eller krukke) er det tre røde kuler og to hvite kuler. Vi trekker tilfeldig en kule og registrerer hvilken farge den har. Deretter trekker vi tilfeldig en kule til og registrerer hvilken farge den har.

a) Hva er sannsynligheten for at begge kulene er røde? Hva er sannsynligheten for at den første er rød og den andre er hvit?

Vi trekker fortsatt tilfeldig to kuler fra urnen, men før vi trekker andre gang legger vi den første tilbake i urnen igjen.

b) Hva blir nå sannsynlighetene for hendelsene i punkt a?

Oppgave 17 Vi stokker en kortstokk godt og ser på de to øverste kortene. Hva er sannsynligheten for at vi får

a) to kløver

b) to røde kort (dvs. ruter eller hjerter)

c) to honnørkort (dvs. knekt, dame, konge eller ess)

d) ingen honnørkort

Oppgave 18 Du kaster en terning. La A = "minst fem øyne" og B = "antall øyne er et oddetall".

a) Bestem $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$ og $P(A \cap B)$.

b) Regn ut $P(A) + P(B)$ og $P(A \cup B) + P(A \cap B)$. Hva ser du?

Oppgave 19 Du trekker ett kort fra en kortstokk. Hva er sannsynligheten for at du får

a) et honnørkort (dvs. knekt, dame, konge eller ess)

b) et svart kort (dvs. kløver eller spar)

c) et svart honnørkort

d) et svart kort eller et honnørkort (eller begge deler)

Oppgave 20 Du kaster en terning. Avgjør om hendelsene er disjunkte og finn sannsynligheten for unionen av dem:

a) "minst 5 øyne" og "høyst 3 øyne"

b) "høyst 5 øyne" og "minst 3 øyne"

c) "antall øyne er oddetall" og "mer enn 4 øyne"

d) "antall øyne er oddetall" og "antall øyne er partall"

Oppgave 21 Værmeldingen for helgen sier at det er 20% sannsynlig at det vil regne lørdag og 30% sannsynlig at det vil regne søndag. Er sannsynligheten 50% for regn i løpet av helgen?

Oppgave 22 Se på eksempel 3.2. Hva er sannsynligheten for at minst én av de to som velges er en jente?

Oppgave 23 I en klasse på 27 elever har 10 elever fransk og 7 elever spansk. Tre av elevene har begge fagene. En elev blir trukket ut tilfeldig.

a) Lag en krysstabell av samme type som i eksempel 3.6.

b) Hva er sannsynligheten for at eleven har minst ett av fagene fransk og spansk?

c) Hva er sannsynligheten for at eleven ikke har noen av fagene fransk og spansk?

d) Hva er sannsynligheten for at eleven har fransk, men ikke spansk?

Oppgave 24 Vi kaster en mynt tre ganger og observerer om den lander på krone eller mynt.

a) Angi et utfallsrom for dette forsøket. Er det rimelig å regne med en uniform sannsynlighetsmodell?

Betrakt hendelsene A="én kron" og B="mynt i første kast".

b) Hvilke utfall utgjør hendelsene A, B, $A \cup B$ og $A \cap B$? Er A og B disjunkte?

c) Bestem sannsynligheten for hver av hendelsene i punkt b. Kontroller spesielt at
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

d) Bestem $P(\overline{A} \cap B)$. Bemerk at $P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(B)$.

Oppgave 25 Vi ser på eksempel 4.3. Hva er den betingede sannsynligheten for at barnet

a) er fargeblindt gitt at det er en jente

b) er en gutt gitt at det er fargeblindt

c) er en jente gitt at det har normalt fargesyn

Oppgave 26 Vi ser på situasjonen i eksempel 3.6. I en klasse er det 25 elever. Av dem har 10 elever fransk og 12 elever tysk. Fire av elevene har både fransk og tysk. En elev blir trukket ut tilfeldig.

a) Hva er den betingede sannsynligheten for at eleven har fransk gitt at eleven har tysk?

a) Hva er den betingede sannsynligheten for at eleven har tysk gitt at eleven har fransk?

Oppgave 27 Fra en kortstokk velger vi fire røde kort (ruter, hjerter) og to svarte kort (kløver, spar) og legger i en bunke. Vi trekker så tilfeldig et kort fra bunken og ser hvilken farge det har. Uten å legge kortet tilbake trekker vi et kort til.

a) Hva er sannsynligheten for at begge kortene er røde?

b) Hva er sannsynligheten for at begge kortene er svarte?

c) Hva er sannsynligheten for at minst ett kort er rødt?

d) Bruk resultatene i a og c til å finne den betingede sannsynligheten for at begge kortene er røde gitt at minst ett av dem er rødt.

e) Forklar hvordan vi kan tolke den betingede sannsynligheten i d som en relativ frekvens.

Oppgave 28 I en urne er det tre røde og to hvite kuler. Vi trekker to kuler uten tilbakelegging slik det ble beskrevet i forbindelse med oppgave 16, punkt a. Definer hendelsene A="første kule er rød" og B="andre kule er hvit".

a) Finn $P(A \cap B)$ og $P(\overline{A} \cap B)$.

b) Hva blir $P(B)$, dvs. den *ubetingede* sannsynligheten for at den andre kulen som trekkes ut skal være hvit? Kommenter! (*Vink:* Vi kan skrive B som en union av de disjunkte hendelsene $A \cap B$ og $\overline{A} \cap B$.)

Oppgave 29 Sannsynligheten for at en gutt er fargeblind, er 8,0%.

a) Hva er sannsynligheten for at en gutt har normalt fargesyn?

b) Aleksander, Gaute og Mads er venner. Hva er sannsynligheten for at alle har normalt fargesyn?

c) Per, Pål og Espen er brødre. Kan vi finne sannsynligheten for at alle har normalt fargesyn på samme måte som i oppgave b? (Du skal ikke regne her.)

Oppgave 30 Etter offentlig statistikk er sannsynligheten

- 93% for at en 65 år gammel mann skal bli minst 70 år
- 89% for at en 70 år gammel mann skal bli minst 75 år
- 81% for at en 75 år gammel mann skal bli minst 80 år

Hva er sannsynligheten for at en 65 år gammel mann

a) skal bli minst 80 år

b) vil oppleve sin 75-årsdag, men ikke sin 80-årsdag

Oppgave 31 Vi kaster en mynt to ganger. La A="kron i første kast" og la B="kron i andre kast".

a) Bestem $P(A)$, $P(B)$ og $P(A \cap B)$.

b) Er A og B uavhengige? Kommenter.

Oppgave 32 Du trekker ett kort fra en kortstokk. Undersøk om hendelsene er uavhengige:

a) "konge" og "kløver"

b) "spar" og "svart" (kløver og spar er svarte farger)

c) "hjerter" og "ruter"

d) "honnørkort" og "hjerter" (knekt, dame, konge og ess er honnørkort)

Oppgave 33 Vi kaster en terning fire ganger.

a) Hvorfor er det rimelig å anta at resultatene for de ulike kastene er uavhengige? (Dette kan forøvrig også vises formelt ved et argument svarende til det i oppgave 31.)

b) Hva er sannsynligheten for at vi ikke får en eneste sekser?

c) Hva er sannsynligheten for at vi får nøyaktig en sekser?

Oppgave 34 Betrakt situasjonen i oppgave 14, og la som der $P(k)$ angi sannsynligheten for at vi får kron første gang i k-te kast. Vis at $P(k) = (1/2)^k$; $k = 1, 2, \ldots$.

Oppgave 35 I Ludo må en som kjent få en sekser for å få en brikke ut på brettet. Alle ludo-spillere har en eller gang sittet lenge og ventet på å få 6-er. Vi skal her se på hvor stor sannsynligheten er for at en må vente henholdsvis fem og ti omganger.

Vi kaster en terning om og om igjen.

a) Hva er sannsynligheten for at vi ikke får en eneste 6-er i løpet av 5 kast?

b) Hva er sannsynligheten for at vi ikke får en eneste 6-er i løpet av 10 kast?

c) Anta at vi har kastet 5 kast uten å få en eneste 6-er. Hva er da (den betingede) sannsynligheten for at vi ikke får en eneste 6-er i løpet av de 5 neste kastene? Kommenter.

Oppgave 36 Nye legemidler går gjennom en omfattende utprøving før de blir sluppet ut på markedet. Det er likevel mulig at sjeldne, men alvorlige, bivirkninger ikke blir oppdaget i utprøvingsstadiet. Eksempler på slike bivirkninger er visse livstruende skader på hvite eller røde blodlegemer. For å avsløre slike sjeldene bivirkninger følger en nøye bruken av nye legemidler etter at de er sluppet ut på markedet.

a) Anta at 1000 pasienter benytter et legemiddel i utprøvingsfasen, og at en viss alvorlig bivirkning har en sannsynlighet lik 1/5000 for å inntreffe hos en vilkårlig valgt pasient. Hva er sannsynligheten for at ingen av de 1000 pasientene blir rammet av den alvorlige bivirkningen?

b) Vi antar nå at legemiddelet er blitt godkjent og sluppet ut på markedet. En ønsker å registrere bruken hos så mange pasienter at en er 95% sikker på oppdage bivirkningen hvis den har sannsynlighet 1/5000. Hvor mange pasienter må inkluderes i en slik registrering?

Oppgave 37 En fransk adelsmann, Chevalier de Méré, henvendte seg i 1654 til den franske matematikeren og filosofen Blaise Pascal (1623-1662) for å få hjelp med et problem. De Méré var en lidenskapelig spiller. Han hadde erfart at det var mer fordelaktig å satse på å få minst én sekser i 4 kast med en terning enn å få to seksere minst én gang i 24 kast med to terninger. De Méré forstod imidlertid ikke hvordan dette kunne være tilfellet. Siden forholdene mellom antall kast og antall muligheter er det samme i de to tilfellene (4:6 og 24:36), mente han at de to spillene burde være like fordelaktige. Pascal ble interessert i det problemet de Méré reiste. Brevveksling mellom Pascal og matematikeren Pierre de Fermat (1601-1665), blant annet om de Mérés problem, blir regnet som det historiske gjennombruddet for sannsynlighetsregningen.

a) Hva er sannsynligheten for at vi får minst en sekser når vi kaster en terning fire ganger?

b) Hva er sannsynligheten for at vi får minst en dobbelsekser når vi kaster to terninger 24 ganger?

c) Diskuter de Mérés resonnement og erfaring.

Oppgave 38 Et lite teknisk system består av to komponenter som fungerer eller ikke uavhengig av hverandre. La A betegne hendelsen at den første komponenten ikke fungerer, og la B betegne hendelsen at den andre ikke fungerer. På grunnlag av lang erfaring med disse komponentene anslår en at $P(A) = 0.10$ og $P(B) = 0.20$. Finn sannsynligheten for at systemet fungerer i følgende to situasjoner:

a) Komponentene er koblet i serie slik at systemet fungerer såsant begge komponentene fungerer.

b) Komponentene er koblet i parallell slik at systemet fungerer såsant minst en av komponentene fungerer.

Oppgave 39 En astragalus er en slags terning som er laget av en knokkel i sauefoten. Den har fire sider som den kan lande på. Disse sidene er merket med tallene 1, 3, 4 og 6. I det følgende skal vi anta at for enhver astragalus er sannsynlighetene henholdsvis 0.1, 0.4, 0.4 og 0.1 for å lande på sidene 1, 3, 4 og 6.

En ener kalles noen ganger en “hund”. Dersom en kaster fire astragaluser samtidig og alle viser forskjellig, kalles det “venus”. (Det svarer til “straight” i dagens språk.)

Vi kaster først en astragalus alene.

a) Hva er sannsynligheten for å få et oddetall?

Så kaster vi to astragaluser samtidig.

b) Hva er sannsynligheten for at summen blir et oddetall?

c) Hva er sannsynligheten for å få to firere?

d) Hva er sannsynligheten for å få par (to like)?

e) Hva er sannsynligheten for å få par i to kast på rad?

Til slutt ser vi på kast med fire astragaluser samtidig.

f) Hva er sannsynligheten for å få minst en "hund"?

g) Hva er sannsynligheten for å få nøyaktig en "hund"?

h) Hva er sannsynligheten for å få "venus"?

i) Er "venus" den minst sannsynlige hendelsen?

Oppgave 40 I en eske er det fem hvite og tre grønne kuler. Du trekker en kule fra esken og ser hvilken farge den har. Uten å legge kula tilbake trekker du en kule til og ser hvilken farge denne har. Hva er sannsynligheten for at

a) begge kulene er grønne

b) første kule er hvit og andre grønn

c) andre kule er grønn

Oppgave 41 I en eske er det to mynter. Den ene er normal, mens den andre har krone på begge sider. Du trekker tilfeldig en mynt og kaster den. Hva er sannsynligheten for at den viser krone?

Oppgave 42 I september 1990 stod det et leserbrev i spalten "Ask Marilyn" i det amerikanske bladet "Parade Magazin". Leseren spør:

Suppose you're on a game show, and you're given the choice of three doors: Behind one door is a car; behind the others, goats. You pick a door, say No. 1, and the host, who knows what's behind the doors, opens another door, say No. 3, which has a goat. He then says to you "Do you want to pick door No. 2?" Is it to your advantage to switch your choice?

Redaktøren av spalten, Marilyn vos Savant, anbefalte deltakeren i showet å bytte dør. Da ville sannsynligheten for å vinne bilen bli 2/3, mens sannsynligheten for å vinne bare ville være 1/3 hvis deltakeren holdt fast ved dør nummer 1. Dette svaret førte til en storm av protester, også fra fagfolk, som mente at sannsynligheten for å vinne bilen ville være 50% uansett om deltakeren byttet dør eller ikke.

a) Gjør deg opp en intuitiv mening om hvem som har rett, Marilyn vos Savant eller hennes kritikere

b) Klarer du å gi et formelt argument for din oppfatning?

Oppgave 43 Se på oppgave 41. Mynten viser krone. Hva er sannsynligheten for at du har kastet med den normale mynten?

Oppgave 44 Ved å teste for et bestemt hormon i en urinprøve, kan en avgjøre om en kvinne er gravid. En graviditetstest er ikke helt sikker. I en undersøkelse fant en:

- Hvis en kvinne er gravid, er det 98% sannsynlig at testen vil vise det.
- Hvis en kvinne ikke er gravid, er det 1% sannsynlig at testen likevel vil indikere at kvinnen er gravid.

Vi antar at 20% av de kvinnene som tar en graviditetstest, er gravide. En kvinne tar en graviditetstest, og testen indikerer at hun er gravid. Hva er sannsynligheten for at hun virkelig er det?

Oppgave 45 En løgndetektor er et instrument som registrerer fysiologiske størrelser (bl.a. blodtrykk, puls og åndedrett) hos en person mens hun eller han svarer på spørsmål. Formålet er å bruke endringer i de fysiologiske størrelsene til å avgjøre om personen lyver eller ikke. I USA blir løgndetektor blant annet brukt i forbindelse med politiavhør av vitner og mistenkte. I en studie av løgndetektoren fant en at

- hvis en person lyver, er det 88% sannsynlig at løgndetektoren vil avsløre dette
- hvis en person snakker sant, er det 14% sannsynlig at løgndetektoren vil indikere at personen lyver

Et vitne i en kriminalsak testes med en løgndetektor. Testen indikerer at vitnet lyver.

a) Hva er sannsynligheten for at vitnet virkelig lyver hvis sannsynligheten for at vitnet snakker sant, er (i) 1% (ii) 50% (ii) 99%

b) I 1988 ble det forbudt å bruke løgndetektor ved ansettelser i private firmaer i USA. Kan du tenke deg en grunn til dette?

Oppgave 46 Tvillingpar kan være enten eneggede eller toeggede. Sannsynligheten for at det ved en tvillingfødsel blir født eneggede tvillinger er i Nord-Europa omtrent 0.30, og vi vil benytte denne sannsynligheten for enegget tvillingfødsel i denne oppgaven.

De to tvillingene i et enegget tvillingpar har alltid samme kjønn. Anta at sannsynligheten for to jenter ved enegget tvillingfødsel er 0.486. Anta videre at ved en fødsel av toeggede tvillinger er kjønnet til den ene tvillingen uavhengig av kjønnet til den andre, og at sannsynligheten for at en bestemt av tvillingene er jente er 0.486.

a) Hva er sannsynligheten for at begge tvillingene i et tvillingpar er jenter? Hva er sannsynligheten for at en er jente og en er gutt?

b) Begge tvillingene i et tvillingpar er jenter. Hva er (den betingede) sannsynligheten for at de er eneggede?

Oppgave 47 På en restaurant kan du velge mellom 5 forretter, 8 hovedretter og 4 desserter. På hvor mange måter kan du sette sammen en middag når den skal bestå av én forrett, én hovedrett og én dessert?

Oppgave 48 En kodelås har 5 taster. Hver av tastene kan plasseres i tre forskjellige stillinger. Hvor mange forskjellige koder kan det lages til denne låsen?

Oppgave 49 I det norske alfabetet er det 29 bokstaver. Hvor mange "ord" kan du lage som består av a) tre forskjellige bokstaver; b) fire forskjellige bokstaver; c) fem forskjellige bokstaver? (Vi bryr oss ikke om "ordene" gir mening.)

Oppgave 50 Treneren for en skiklubb kan velge mellom 5 løpere til NM-stafetten for kvinner over 3×5 km.

a) Hvor mange måter kan hun sette opp stafettlaget på? (Du skal ta hensyn til hvem som går hver av de tre etappene.)

b) Anta at hun har bestemt seg for hvilke tre løpere som skal gå stafetten, men ikke hvilke etapper hver av dem skal gå. Hvor mange mulige lagoppstillinger kan hun velge mellom?

Oppgave 51 I en urne (eller krukke) er det tre røde kuler og to hvite kuler. Vi trekker tilfeldig en kule og registrerer hvilken farge den har. Deretter trekker vi tilfeldig en kule til og registrerer hvilken farge den har.

a) Hva er sannsynligheten for at begge kulene er røde? Hva er sannsynligheten for at den første er rød og den andre er hvit?

Vi trekker fortsatt tilfeldig to kuler fra urnen, men før vi trekker andre gang legger vi den første tilbake i urnen igjen.

b) Hva blir nå sannsynlighetene for hendelsene i punkt a?

Anta nå at det er 300 røde kuler og 200 hvite kuler i urnen. Vi trekker fortsatt to kuler (h.h.v. uten og med tilbakelegging slik det er beskrevet over).

c) Hva blir nå sannsynlighetene i punktene a og b? Kommenter.

Oppgave 52 Mira er med i en spørrekonkurranse. Hun blir stilt ti spørsmål. For hvert spørsmål kan hun velge mellom tre svaralternativer der bare ett er riktig. Hvis Mira svarer riktig på alle spørsmålene, vinner hun 5000 kroner.

a) På hvor mange måter kan Mira svare på de ti spørsmålene?

b) Hva er sannsynligheten for at hun vinner 5000 kroner hvis hun bare gjetter?

c) Anta at Mira vet svaret på fem av spørsmålene, men bare gjetter på de fem øvrige. Hva er da sannsynligheten for at hun vinner 5000 kroner?

Oppgave 53 Martin påstår at han kan smake forskjell på fem typer cola. Mira tror ikke på det, og for å teste påstanden gir hun Martin de fem colatypene i hvert sitt umerkede glass. Martin skal så fortelle hvilken type cola han mener det er i hvert av glassene.

a) Hva er sannsynligheten for at Martin angir alle colatypene riktig hvis han bare gjetter?

b) Anta at Martin angir alle colatypene riktig. Syns du Mira bør skifte mening og begynne å tro på at Martin kan smake forskjell på colatypene?

Oppgave 54 I tipping skal en for hver av 12 fotballkamper gjette om det blir hjemmeseier (H), uavgjort (U) eller borteseier (B). En rekke består av ett tips for hver av de 12 kampene.

a) Når du fyller ut tippekupongen, kan du hel- eller halvgardere en kamp ved at du gir mer enn ett tippetegn for denne. Du leverer en tippekupong med tre hel- og to halvgarderinger. Hvor mange rekker har du tippet?

b) På baksiden av tippekupongen er det gitt en tabell som viser hvor mange rekker du tipper med et visst antall hel- og halvgarderinger. Forklar hvordan Norsk Tipping har kommet fram til denne tabellen.

Oppgave 55 I en klasse er det 25 elever. De skal velge to medlemmer til elverådet. Hvor mange måter kan de gjøre det på?

Oppgave 56 Et lokallag til et politisk parti har 40 medlemmer. Lokallaget skal velge tre delegater til partiets landsmøte. Hvor mange måter kan de velge delegatene på?

Oppgave 57 I et selskap er det 15 personer. Ved starten av selskapet presenterer de seg for hverandre to og to. Hvor mange slike presentasjoner blir det?

Oppgave 58 I eliteserien i fotball for menn er det 16 lag. I løpet av en sesong spiller et lag to ganger mot hvert av de andre, en gang på hjemmebane og en gang på bortebane. Hvor mange kamper spilles det i eliteserien i løpet av en sesong?

Oppgave 59 Per skriver hver av bokstavene i alfabetet på en lapp og putter de 29 lappene i en hatt. Han trekker så tilfeldig tre lapper, en etter en, og ser etter hvilken bokstav det står på lappene.

a) Hva er sannsynligheten for at de tre bokstavene, i den rekkefølgen de blir trukket, vil danne ordet PER?

b) Hva er sannsynligheten for at han kan lage ordet PER når han ikke tar hensyn til rekkefølgen lappene ble trukket i?

Oppgave 60 I en skuff ligger det fem sorte, sju blå og seks grønne sokker. Lyset har gått og du velger to sokker i mørket. Hva er sannsynligheten for at du får a) to blå sokker; b) to sokker i samme farge?

Oppgave 61 I Lotto kan du tippe system ved å krysse av mer enn sju tall på kupongen.

a) Hvor mange rekker tipper du hvis du krysser av ni tall?

b) Hvor mange rekker tipper du hvis du krysser av ti tall?

c) På lottokupongen er det angitt hvor mange lottorekker du tipper hvis du krysser av 8, 9, 10, 11 eller 12 tall. Forklar hvordan Norsk Tipping har kommet fram til disse tallene.

Oppgave 62 Du trekker tilfeldig tre kort fra en kortstokk. Hva er sannsynligheten for alle tre er spar?

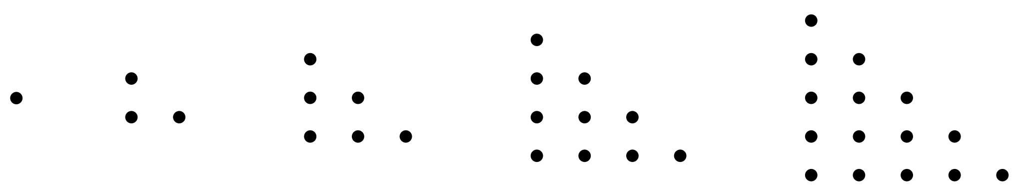
a) Du kan regne ut denne sannsynligheten på tre forskjellige måter. Hvilke?

b) Gjør beregningene for de tre måtene, og kontroller at de gir samme svar.

c) Kan du trekke noen allmenne lærdommer av oppgavene a og b?

Oppgave 63 Bruk binomialformelen til å regne ut $(x+1)^4$ og $(x-2)^5$

Oppgave 64 Trekanttallene er gitt som 1, 3, 6, 10, 15, ... Figuren viser hvorfor:



a) Skriv opp de tre neste trekanttallene.

b) Hvor finner du trekanttallene i Pascals talltrekant?

c) Finn en formel for det n-te trekanttallet.

Oppgave 65 Pyramidetallene for trekantete pyramider er gitt som 1, 4, 10, 20, 35, ... Du får et geometrisk bilde av disse pyramidetallene ved "å stable" trekanttallene i forrige oppgave oppå hverandre i en pyramide. For eksempel får du et geometrisk bilde av det fjerde pyramidetallet (dvs. 20) ved "å stable" de fire første trekantene oppå hverandre (med den største trekanten i bunnen av pyramiden).

a) Skriv opp de tre neste pyramidetallene for trekantede pyramider.

b) Hvor finner du pyramidetallene i Pascals talltrekant?

c) Finn en formel for det n-te pyramidetallet.

Oppgave 66 Regn ut summen av tallene i linje 0, i linje 1, i linje 2, i linje 3 og i linje 4 i Pascals trekant.

a) Hva er mønsteret i disse summene? Kontroller at mønsteret også stemmer for summen i linje 5.

b) Bruk binomialformelen til å gi en begrunnelse for det mønsteret du har funnet. Klarer du også å gi et kombinatorisk argument for dette?

Oppgave 67 Se på eksempel 6.11. Hva er sannsynligheten for at vi får a) ingen defekte sikringer; b) to defekte sikringer?

Oppgave 68 Se på eksempel 6.12. Hva er sannsynligheten for at det a) bare blir jenter i festkomiteen; b) bare blir gutter i festkomiteen; c) blir én gutt og tre jenter i festkomiteen?

Oppgave 69 I en klasse er det 11 jenter og 14 gutter. Seks elever skal få være med på en tur til Berlin. De trekkes ut ved loddtrekning. Hva er sannsynligheten for at det trekkes ut a) 3 jenter og 3 gutter; b) 4 jenter og 2 gutter?

Oppgave 70 Ni jenter reiser sammen på sommerferie til syden. På hotellet har de bestilt ett firemannsrom, ett tremannsrom og ett tomannsrom.

a) På hvor mange måter kan jentene velge ut de fire som skal bo på firemannsrommet?

b) Anta at jentene har bestemt seg for hvem som skal bo på firemannsrommet. På hvor mange måter kan de da velge ut de tre som skal bo på tremannsrommet?

c) På hvor mange måter kan jentene fordele seg på de tre rommene?

Oppgave 71 I en klasse er det 25 elever. Til et prosjektarbeid skal de deles inn i fem grupper med fem elever i hver gruppe. Hvor mange måter kan det gjøres på?

Oppgave 72 Med jevne mellomrom dukker det opp forslag til måter en kan tippe "system" på i Lotto, og det blir hevdet en ved å bruke slike system får økte vinnersjanser. Men får en egentlig det? I denne oppgaven skal vi se nærmere på et slikt system.

I Dagbladet kunne en i september 1992 lese følgende: "Power 7 heter det nye Lottosystemet som lurer trekkemaskinen hos Norsk Tipping på Hamar. Stryk 7 av de 34 tallene og fyll ut kupongen med de 27 gjenstående etter en matematisk formel. Teoretisk skal du gå overskudd etter 5 ukers spill." "Hemmeligheten" med Power 7 er å stryke sju tall, som en tror ikke vil bli trukket ut som vinnertall, og deretter tippe vinnertallene riktig blant de 27 andre. Vi skal her se nærmere på dette systemet. Vi nøyer oss med å se på situasjonen der du tipper én rekke, og vi konsentrerer oss om sannsynligheten for å vinne førstepremie.

a) Hvis du klarer å stryke riktig sju tall som ikke blir trukket ut som vinnertall, hva er da sannsynligheten for å vinne førstepremie?

b) Sannsynligheten du finner oppgave a er større sannsynligheten for å vinne førstepremie når du tipper én lottorekke. Betyr dette at Power 7 gir økt sjanse for å vinne førstepremie? Hvorfor eller hvorfor ikke?

Oppgave 73 I poker får en spiller delt ut fem av kortstokkens 52 kort. En slik samling av fem kort kaller vi en "pokerhånd". En pokerhånds verdi avhenger av hvor ofte den opptrer. Her følger en beskrivelse av ulike pokerhender:

- Royal straight flush: De fem høyeste kortene i samme farge, dvs. ess-konge-dame-knekt-10.
- Straight flush: Fem kort i rekkefølge i samme farge, f.eks. 6-7-8-9-10.
- Fire like: Fire kort med samme verdi, f.eks. fire 5-ere.
- Fullt hus: Tre kort av samme verdi (tre like) sammen med et par (to like) av en annen verdi.
- Flush: Fem kort i samme farge uansett verdi.
- Straight: Fem kort i rekkefølge uansett farge.
- Tre like: Tre kort med samme verdi.
- To par: To kort (par) av en verdi sammen med et par av en annen verdi.
- Ett par: To kort (par) av en verdi.

Hvis en pokerhånd passer til to eller flere av beskrivelsene, er det den mest verdifulle (dvs. den øverste på lista) som gjelder. For eksempel regnes en pokerhånd med tre kort av en verdi og to av en annen som fullt hus og ikke som tre like, to par eller ett par. Videre er det slik at ess gjelder både som laveste (1) og høyeste (14) kort i straight og straight flush.

a) På hvor mange måter kan en pokerspiller få 1) royal straight flush; 2) straight flush; 3) fire like; 4) fullt hus; 5) flush; 6) straight; 7) tre like; 8) to par; 9) ett par?

b) Hva er sannsynligheten for å få delt ut hver av pokerhendene i oppgave a? Må du gjøre noen forutsetninger for å beregne disse sannsynlighetene?

Oppgave 74 Ved lotto-trekningen trekkes det tilfeldig og uten tilbakelegging sju vinnertall og ett tilleggstall[2] fra tallene $1, 2, \ldots, 34$. For å vinne andre premie må du tippe riktig seks av vinnertallene og tilleggstallet. Du har tippet en lottorekke. Hva er sannsynligheten for at du vinner andre premie?

Oppgave 75 Du kaster en femtiøring, et kronestykke og en femkrone og ser hvilke sider de lander på.

a) Skriv opp utfallene for dette forsøket. Hva er sannsynligheten for hvert av utfallene?

b) La X være antall mynt du får. Hvilke verdier kan denne tilfeldige variabelen få? Skriv opp de utfallene som gir hver av disse verdiene.

c) Bestem sannsynlighetsfordelingen til X.

Oppgave 76 I en eske ligger det fire lapper som har numrene 1, 2, 3 og 4. Du trekker tilfeldig to lapper uten tilbakelegging.

a) Skriv opp alle utfallene for dette forsøket. Hva er sannsynligheten for hvert av utfallene?

b) La X være det høyeste tallet du får på en av lappene. Hvilke verdier kan denne tilfeldige variabelen få? Skriv opp de utfallene som gir hver av disse verdiene.

c) Bestem sannsynlighetsfordelingen til X.

[2]Før uke 12 i 2015 ble det trukket tre tilleggstall.

Oppgave 77 Du kaster to terninger. La Y være det laveste antall øyne du får på en av de to terningene. Hva er de mulige verdiene til Y? Bestem sannsynlighetsfordelingen til Y.

Oppgave 78 Se på eksempel 6.12. La X stå for antall gutter i festkomiteen. Skriv opp en formel for sannsynlighetsfordelingen til X.

Oppgave 79 I en eske er det 6 røde og 4 blå kuler. Vi trekker tilfeldig fire av kulene. La X stå for antall røde kuler vi får.

a) Skriv opp en formel for sannsynlighetsfordelingen til X.

b) Bruk formelen til å finne sannsynligheten for at vi får (i) bare røde kuler; (ii) 3 røde kuler og 1 blå kule; (iii) 2 røde kuler og 2 blå kuler

Oppgave 80 Per trekker tilfeldig tre bokstaver fra alfabetet. La X være antall konsonanter han får.

a) Skriv opp en formel for sannsynlighetsfordelingen til X.

b) Bruk formelen til å finne sannsynligheten for at Per vil få (i) bare konsonanter; (ii) to konsonanter og én vokal; (iii) én konsonant og to vokaler; (iv) bare vokaler.

Oppgave 81 Vi kaster en terning fem ganger. At vi får sekser (S) i de to første kastene og fem eller mindre (F) i de tre siste, skriver vi SSFFF. Tilsvarende skriver vi SFFFS hvis vi får sekser i første og siste kast og fem eller mindre i de øvrige kastene.

a) De to rekkefølgene ovenfor gir begge to seksere. Hvilke andre rekkefølger gjør det?

b) Hva er sannsynligheten for rekkefølgen SSFFF?

c) Hva er sannsynligheten for hver av de andre rekkefølgene som gir to seksere?

d) Hva er sannsynligheten for at vi får to seksere?

Oppgave 82 Du kaster 8 kronestykker. La X være antall mynt du får.

a) Skriv opp en formel for sannsynlighetsfordelingen til X.

b) Bruk formelen til å finne sannsynligheten for at du vil få nøyaktig
(i) tre krone
(ii) fire krone
(iii) fem krone

Oppgave 83 I en klasse holdes en flervalgsprøve med 10 spørsmål. Prøven gjennomføres ved at elevene krysser av ved ett av tre alternativ (hvorav ett er riktig) for hvert spørsmål. Læreren bestemmer seg for å gi karakteren 6 hvis alle spørsmålene er riktig besvart og karakteren 5 hvis 8 eller 9 spørsmål er riktig besvart.

Per har ikke lest på leksene og krysser helt tilfeldig av for hvert spørsmål.

a) La X være antall riktige svar Per får. Forklar hvorfor X er binomisk fordelt med $n = 10$ og $p = 1/3$.

b) Hva er sannsynligheten for at Per får karakteren 6?

c) Hva er sannsynligheten for at Per får karakteren 5?

Oppgave 84 Fra offentlig statistikk vet vi at 1% av fødslene i Norge er tvillingfødsler. Anta at et lite sykehus har 100 fødsler i løpet av ett år. Hva er sannsynligheten for at det

a) ikke blir født noen tvillingpar

b) blir født ett tvillingpar

c) blir født to tvillingpar

d) blir født tre eller flere tvillingpar

Oppgave 85 I en urne er det tre røde kuler og to hvite kuler. To kuler trekkes tilfeldig ut, henholdsvis uten og med tilbakelegging. La X angi antall røde kuler vi trekker.

a) Hva gir binomisk fordeling for X, trekking med eller uten tilbakelegging?

b) Beregn $P(X = x)$ for $x = 0, 1, 2$ både for trekning med og uten tilbakelegging.

Anta så at det er 300 røde kuler og 200 hvite kuler i urnen. Vi lar fortsatt X angi antall røde kuler i to trekninger.

c) Beregn også nå $P(X = x)$ for $x = 0, 1, 2$ for trekning med og uten tilbakelegging. Sammenlign med det du fant i punkt a.

Resultatet i punkt c illustrerer at hvis vi trekker et (relativt sett) lite utvalg fra en (relativt sett) stor populasjon, så er det ubetydelig forskjell på trekning med og uten tilbakelegging.

Ved en meningsmåling om holdningen til norsk EU-medlemskap trekkes det tilfeldig (og uten tilbakelegging) et utvalg på 1000 av befolkningen over 18 år. La X være antallet i utvalget som er mot norsk EU-medlemskap.

d) Hvorfor er det rimelig å anta at X er binomisk fordelt med $n = 1000$ og p lik (den ukjente) andelen av den voksne befolkningen som er mot norsk EU-medlemskap?

Oppgave 86 Et politisk parti har ved et bestemt tidspunkt støtte av 25% av befolkningen. Tjue personer blir trukket ut tilfeldig. La X angi hvor mange av de uttrukne som støtter partiet.

a) Forklar hvorfor vi kan regne som om X er binomisk fordelt med $n = 20$ og $p = 0.25$.

b) Skriv opp en formel for sannsynlighetsfordelingen til X.

c) Bruk formelen til å finne sannsynligheten for at (i) akkurat 3 støtter partiet; (ii) akkurat 4 støtter partiet; (iii) akkurat 5 støtter partiet.

Oppgave 87 Du kaster én terning. La X angi antall øyne du får. Finn forventningsverdien til X.

Oppgave 88 I en eske ligger det fire lapper som har numrene 1, 2, 3 og 4. Du trekker tilfeldig to lapper uten tilbakelegging. La X være det høyeste tallet du får på en av lappene. I oppgave 76 fant vi at X har sannsynlighetsfordelingen

k	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

Finn forventningsverdien til X.

Oppgave 89 Du kaster to terninger. La Y være det laveste antall øyne du får på en av de to terningene. I oppgave 77 fant vi at Y har sannsynlighetsfordelingen

k	1	2	3	4	5	6
$P(Y = k)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

Finn forventningen til Y.

Oppgave 90 En rekke personer forsikrer sine sykler i et forsikringsselskap. Vi antar for enkelhets skyld at en person bare kan få erstatning av selskapet av to grunner: *(i)* sykkelen blir stjålet og dukker ikke opp igjen, eller *(ii)* den blir stjålet, men kommer senere til rette delvis ramponert. I det første tilfellet får den forsikrede en erstatning på 3500 kroner (etter at egenandel er trukket fra), mens han i det andre tilfellet får 1000 kroner. Vi antar at sannsynligheten for *(i)* er 2%, mens sannsynligheten for *(ii)* er 5%.

a) Forklar hvorfor *forventet* erstatningsutbetaling er en rettferdig nettopremie for forsikringen (dvs. når vi ser bort fra administasjonsomkostninger, fortjeneste, o.l.).

b) Finn denne nettopremien.

Oppgave 91 Et enkelt terningspill har disse reglene: For å få spille må du satse 15 kroner. Du spiller ved å kaste to terninger. Hvis summen av antall øyne blir minst ti, får du utbetalt ti ganger denne summen. Hvis summen blir mindre enn ti får du ingen ting. La Y være den *netto*gevinsten du få når du spiller én gang.

a) Hva er de mulige verdiene for Y?

b) Finn sannsynlighetsfordelingen til Y.

c) Bestem forventningsverdien til Y.

d) Lønner det seg å ta del i dette spillet? Begrunn svaret ditt.

Oppgave 92 Vi vil se på noen binomiske situasjoner:

a) Du kaster et kronestykke 75 ganger. Finn forventet antall mynt.

b) Du kaster en terning 30 ganger. Finn forventet antall seksere.

c) Ved et sykehus blir det en uke født 20 barn. Finn forventet antall gutter.

Oppgave 93 I en klasse holdes en flervalgsprøve med 10 spørsmål. Prøven gjennomføres ved at elevene krysser av ved ett av tre alternativ (hvorav ett er riktig) for hvert spørsmål. Per har ikke lest på leksene og krysser helt tilfeldig av for hvert spørsmål. La X være antall riktige svar Per får. Bestem $E(X)$

Oppgave 94 I en eske er det 6 røde og 4 blå kuler. Vi trekker tilfeldig fire av kulene. La X stå for antall røde kuler vi får. I oppgave 79 fant vi at X har sannsynlighetsfordelingen

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{210}$	$\frac{24}{210}$	$\frac{90}{210}$	$\frac{80}{210}$	$\frac{15}{210}$

a) Finn forventningen til X.

Formel (7.1) i kompendiet gir sannsynlighetsfordelingen til en tilfeldig variabel som er hypergeometrisk fordelt. For denne fordelingen kan en vise at forventningsverdien er lik $n \cdot (m/N)$

b) Bruk denne formelen til å kontrollere svaret du fikk i oppgave a.

Oppgave 95 Per trekker tilfeldig tre bokstaver fra alfabetet. La X være antall konsonanter han får. Bruk det generelle resultatet i oppgave 94 til å finne forventningsverdien til X.

Oppgave 96 Du kaster én terning. La X være antall øyne du får, og la Y være det dobbelte av antall øyne.

a) Bestem sannsynlighetsfordelingen til Y.

b) Bruk sannsynlighetsfordelingen fra oppgave a til å finne forventningsverdien til Y.

c) Hva er sammenhengen mellom $E(X)$ og $E(Y)$?

Oppgave 97 En bedrift produserer pastiller. La X være antall pastiller i en eske. Tabellen gir sannsynlighetsfordelingen til X:

k	23	24	25	26
$P(X = k)$	0.10	0.30	0.40	0.20

a) Finn forventningsverdien til X.

En pastill veier 0.8 gram. Esken pastillene ligger i, veier 4.0 gram. Vekten av en eske med pastiller er da $V = 4.0 + 0.8 \cdot X$ gram.

b) Finn forventet vekt av en eske med pastiller.

Oppgave 98 Du kaster én terning. La X angi antall øyne du får. Vi fant i Oppgave 87 at $E(X) = 7/2$. Bestem $\mathrm{Var}(X)$.

Oppgave 99 I en eske ligger det fire lapper som har numrene 1, 2, 3 og 4. Du trekker tilfeldig to lapper uten tilbakelegging. La X være det høyeste tallet du får på en av lappene. I oppgave 76 fant vi at X har sannsynlighetsfordelingen

k	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

I oppgave 88 fant vi at $E(X) = 10/3$. Finn variansen til X.

Oppgave 100 Du kaster to terninger. La Y være det laveste antall øyne du får på en av de to terningene. I oppgave 77 fant vi at Y har sannsynlighetsfordelingen

k	1	2	3	4	5	6
$P(Y = k)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

I oppgave 89 fant vi at $E(Y) = 91/36$. Finn variansen til Y.

Oppgave 101 Se på oppgave 90. Finn variansen og standardavviket til den erstatningen en forsikret sykkeleier vil få fra selskapet i løpet av ett år. Hvilken benevning har variansen og standardavviket?

Oppgave 102 Vi vil se på noen binomiske situasjoner:

a) Du kaster et kronestykke 75 ganger. Finn varians og standardavvik for antall mynt.

b) Du kaster en terning 30 ganger. Finn varians og standardavvik for antall seksere.

c) Ved et sykehus blir det en uke født 20 barn. Finn varians og standardavvik for antall gutter.

Oppgave 103 Et politisk parti har ved et bestemt tidspunkt støtte av 25% av befolkningen. Tjue personer blir trukket ut tilfeldig. La X angi hvor mange av de uttrukne som støtter partiet. Bestem forventningsverdi, varians og standardavvik for X.

Oppgave 104 I en eske er det 6 røde og 4 blå kuler. Vi trekker tilfeldig fire av kulene. La X stå for antall røde kuler vi får. I oppgave 33 i del II fant vi at X har sannsynlighetsfordelingen.

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{210}$	$\frac{24}{210}$	$\frac{90}{210}$	$\frac{80}{210}$	$\frac{15}{210}$

I oppgave 94 fant vi at $E(X) = 12/5$.

a) Finn variansen til X.

Formel (7.1) i kompendiet gir sannsynlighetsfordelingen til en tilfeldig variabel som er hypergeometrisk fordelt. For denne fordelingen kan en vise at variansen er lik $n \cdot \frac{m}{N}\left(1 - \frac{m}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$.

b) Bruk denne formelen til å kontrollere svaret du fikk i oppgave a.

Oppgave 105 Per trekker tilfeldig tre bokstaver fra alfabetet. La X være antall konsonanter han får. Bruk det generelle resultatet i oppgave 104 til å finne variansen til X.

Oppgave 106 Du kaster en terning. La X være antall øyne du får, og la Y være det dobbelte av antall øyne. Du fant sannsynlighetsfordelingen til Y og $E(Y)$ i oppgave 96.

a) Bruk sannsynlighetsfordelingen til Y til å finne $\mathrm{Var}(Y)$.

b) Hva er sammenhengen mellom $\mathrm{Var}(X)$ og $\mathrm{Var}(Y)$?

Oppgave 107 Se på oppgave 97. La X være antallet pastiller i en eske og la $V = 4.0 + 0.8 \cdot X$ være vekten til esken med innhold (i gram).

a) Finn variansen til X.

b) Finn variansen til V. Hvilken benevning har denne variansen?

c) Finn standardavviket til V. Hvilken benevning har dette standardavviket?

Oppgave 108 La X være en tilfeldig variabel med forventningsverdi μ og standardavvik σ. Vi innfører den *standardiserte* variablen $Z = (X - \mu)/\sigma$. Vis at $E(Z) = 0$ og $SD(Z) = 1$.

Oppgave 109 Tenk deg at du kaster en mynt 10000 ganger. Hva er sannsynligheten for at du får krone a) høyst 4930 ganger; b) minst 5100 ganger?

Oppgave 110 En bestemt type frø spirer med 80% sannsynlighet. På et gartneri sår de 2000 frø og ser om de spirer. Hva er sannsynligheten for at a) høyst 1570 frø vil spire; b) minst 1630 frø vi spire c) mellom 1570 og 1630 frø vil spire?

Oppgave 111 Ved Stortingsvalget i 2013 stemte 30.8% av velgerne på Arbeiderpartiet. Tenk deg at du var med på å gjennomføre en valgdagsmåling det året, der et tilfeldig utvalg på 5000 velgere ble spurt om hvilket parti de nettopp stemte på. Hva er sannsynligheten for at a) høyst 1500 av dem hadde stemt Arbeiderpartiet; b) minst 1600 av dem hadde stemt Arbeiderpartiet?

Oppgave 112 Tenk deg at Høyre på et tidspunkt har oppslutning av 25.0% av velgerne. Et meningsmålingsinstitutt spør et tilfeldig utvalg på 1000 personer over 18 år hvilket parti de ville ha stemt på hvis det hadde vært stortingsvalg i morgen. Hva er sannsynligheten for at Høyre vil få en oppslutning på meningsmålingen som er mellom 23.0% og 27.0% ? (Vi forutsetter at alle de spurte ville ha stemt hvis det hadde vært valg.)

Oppgave 113 Et tilfeldig utvalg på 500 personer i aldersgruppen 50–59 år har blitt intervjuet om bruk av Internett. 420 av dem hadde brukt Internett minst en gang i løpet av den siste uka. Finn et estimatet for andelen av aldersgruppen 50–59 år som bruker Internett i løpet av en uke. Bestem også et 95% konfidensintervall for denne andelen.

Oppgave 114 En frøprodusent ønsker å bestemme spireprosenten av en bestemt type Kornblomstfrø. For dette formålet vil han så 500 frø og registrere hvor mange av dem som spirer.

a) Gjør deg noen tanker om hvordan frøprodusenten bør velge ut de 500 frøene.

b) Anta at 337 av frøene spirer. Gi estimatet for spireprosenten og bestem et 95% konfidensintervall for denne.

Oppgave 115 Etter et diskusjonsprogram på TV ble seerne bedt om å ringe inn sin mening om følgende spørsmål: “Tror du norske skiløpere doper seg?”. I alt ringte 2461 inn sin mening, og av dem var det 841 som svarte “ja” på spørsmålet. Hva kan du slutte av dette?

Oppgave 116 I 2010 var det i Norge 60 608 fødsler hvorav 1002 resulterte i flerfødsler (tvillinger, trillinger, osv.). De tilsvarende tallene for 1987 var (ca.) 53 500 og 599. Bestem (tilnærmete) 95% konfidensintervall for sannsynligheten for at et svangerskap skal resultere i en flerfødsel for hver av disse to årene. Er det noen grunn til å tro at det har vært en reell endring i sannsynligheten for at et svangerskap skal resultere i en flerfødsel fra 1987 til 2010?

Oppgave 117 Ved den politiske meningsmålingen for NRK for januar 2016 fikk Arbeiderpartiet en oppslutning på 29.7%, Fremskrittspartiet en oppslutning på 16.3%, Miljøpartiet de grønne en oppslutning på 4.3% og Rødt en oppslutning på 1.7%. Undersøkelsen er basert på intervju med 721 personer over 18 år som ville ha stemt hvis det hadde vært stortingsvalg.

a) Bestem et (tilnærmet) 95% konfidensintervall for oppslutningen om Arbeiderpartiet. Klargjør hvilke forutsetninger dette bygger på. Er disse forutsetningene noenlunde realistiske?

b) Bestem også (tilnærmete) 95% konfidensintervall for oppslutningen til Fremskrittspartiet, Miljøpartiet de grønne og Rødt.

c) Det opplyses at "resultatene må tolkes innenfor feilmarginer som varierer mellom 0.9 og 3.3 prosentpoeng." Hvordan stemmer dette med det du fant i a og b?

Oppgave 118 Et farmasøytisk firma prøver ut en ny smertestillende medisin for migrenepasienter, som de mener at er bedre enn den medisinen som vanligvis brukes. Forsøket utføres ved at 150 pasienter prøver både den gamle og den nye medisinen og rapporterer hvilken av de to som hadde best smertestillende virkning. Anta at den nye medisinen fungerte best for 83 av pasientene. Hvilken konklusjon vil du trekke av forsøket?

(For å unngå at rekkefølgen medisinene tas i skal påvirke resultatet på en systematisk måte, vil en i praksis trekke lodd for hver pasient om hvilken medisin som skal tas først. Videre vil en, for å unngå at psykologiske effekter skal spille inn, utføre et forsøket "blindt", dvs. pasientene får ikke vite i hvilken rekkefølge medisinene gis.)

Oppgave 119 På British Museum i London fins det mange gamle terninger, blant annet en marmorterning fra romertiden. Tidsskriftet Biometrika ga i 1955 resultatet av 204 kast med denne marmorterningen. Av de 204 kastene ga 54 av kastene en sekser. Er det grunn til å tro at sannsynligheten for å få sekser med marmorterningen avviker fra 1/6?

Oppgave 120 I astrologien antar en at et menneskes personlighet er påvirket av himmellegemers posisjon i forhold til hverandre på fødselstidspunktet. Det har vært gjennomført flere forsøk for å teste astrologenes påstand. La oss se nærmere på et slik (tenkt) forsøk.

Det blir inkludert 200 personer i forsøket. Det forutsettes at alle disse kjenner sitt fødselstidspunkt nøyaktig fra f.eks. fødejournal. Alle personene blir undersøkt med en veletablert, standardisert psykologisk test som er anerkjent både av astrologene og psykologene. Resultatet av denne testen er en såkalt personlighetsprofil.

For hver forsøksperson får astrologene utdelt fem personlighetsprofiler. En av disse tilhører den virkelige forsøkspersonen. De fire andre gjelder personer som ikke har noe med forsøket å gjøre. Anta at astrologene klarte å angi 47 personlighetsprofiler riktig. Hvilken konklusjon vil du trekke av forsøket?

Oppgave 121 Nå og da dukker det opp situasjoner hvor det er en "opphopning" av sykdomstilfeller (eller lignende). Det kan for eksempel være uvanlig mange krefttilfeller blant lærerne på en skole, eller det kan være mistenkelig mange barn av menn som har arbeidet samme sted som blir født med misdannelser. I slike situasjoner må en selvfølgelig undersøke nøye om en kan finne en årsak til "opphopningen". Men hvis en ikke kan det, er det naturlig å spørre om "opphopningen" kan skyldes en tilfeldighet. I denne oppgaven skal vi se nærmere på en slik situasjon.

I Bømlo kommune i Hordaland ble det i 1980-81 registrert hele tre tilfelle av alvorlige medfødte misdannelser i sentralnervesystemet hos nyfødte barn i løpet av et halvt års tid. Det totale antallet fødsler i perioden var (omtrent) 80. På landsbasis er sannsynligheten for at et barn skal bli født med en slik misdannelse 0,16%.

a) Beregn sannsynligheten for å få minst tre tilfeller av misdannelser i løpet av 80 fødsler hvis sannsynligheten for misdannelse er 0.16%. Hva forteller denne sannsynligheten deg?

Det ble satt i gang undersøkelser for å se om det kunne være noen spesielle årsaker til misdannelsene i Bømlo. En fant ikke noen slike årsaker. Men kunne det ha vært en ukjent årsak som førte til misdannelsene?

Før en bruker resultatet i punkt a til å konkludere med at det kan være en ukjent årsak til misdannelsene, må en tenke over hvorfor tallene fra Bømlo vakte interesse og ble underkastet en nærmere analyse. Dette skjedde nettopp fordi det ble registrert så mange misdannelser dette halvåret. Alle de kommunene der det ikke skjedde noe oppsiktsvekkende i denne henseende, var det ingen som brydde seg om. I stedet for sannsynligheten vi beregnet i punkt a, kan det derfor være mer relevant å beregne sannsynligheten for at vi en gang i blant i en eller annen kommune vil observere noe så påfallende som det som skjedde i Bømlo.

Tenk deg som et regneeksempel at vi har 50 kommuner av samme størrelse som Bømlo (dvs. med 80 fødsler på et halvår), og anta at hver av dem observeres over fem år (=10 halvår).

b) Hva er sannsynligheten for at vi i minst ett av de 500 (kommune)halvårene observerer minst tre misdannelser av den aktuelle typen. Hva forteller denne sannsynligheten deg?