Prøveeksamen, MAT 0100V

Oppgavesettet har 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål teller 10 poeng. For å bestå må man ha minst 40 poeng.

Oppgave 1. La f være gitt ved $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$. Finn stigningstallet til tangenten til f i punktet $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Oppgave 2. La f være gitt ved $f(x) = xe^x$.

a) Finn eventuelle null-, topp- og bunnpunkter til f.

b) Finn eventuelle vendepunkter til f og hvor f er konveks og konkav. Skisser grafen til f.

c) Finn arealet avgrenset av grafen til f og x-aksen pÂ intervallet $[-1, 1]$.

d) Finn volumet til omdreiningslegemet som fremkommer når vi dreier området avgrenset av grafen til f og x-aksen på intervallet $[0, 1]$ om x-aksen.

Oppgave 3. Løs initialverdiproblemet

$$y' = 3y^2, \qquad y(0) = 1$$

Oppgave 4.

a) Bruk Euklids algoritme til å finne største felles faktor for tallene 363 og 195.

b) Finn en løsning av den lineære kongruensen $195x \equiv 3 \pmod{363}$, slik at $0 \leq x < 363$.

Oppgave 5. I denne oppgaven kan du få bruk for at Eulers ϕ-funksjon oppfyller

- $\phi(n \cdot m) = \phi(n) \cdot \phi(m)$ når $SFF(n, m) = 1$
- $\phi(p^r) = p^r - p^{r-1}$ når p er et primtall, og $r > 0$

Bruk Eulers generalisering av Fermats lille sats til å forklare hvorfor

$$125^{192} - 1$$

er delelig med 64. Du kan bruke at $192 = 6 \cdot 32$.

Oppgave 6. Bruk Diofants teorem til å finne et primitivt pythagoreisk trippel der den ene kateten er 84. Kan du finne flere, og i så fall hvor mange?