Oppgaver.

Oppgave 1.

Avgjør om det finnes hele tall x, y slik at

a) $7x + 4y = 1$
b) $9x + 15y = 4$
c) $28x + 7y = -42$

Oppgave 2.

Blant tallene $1, 2, 3, \cdots, 2n$ velger man ut $n+1$ vilkårlige tall. Vis at blant disse må det nødvendigvis finnes to tall a og b slik at $a|b$.

(Hint: Skriv de utvalgte tallene på formen $x = 2^k y$ med odde y. Hvor mange forskjellige slike oddetall kan det høyst finnes?)

Oppgave 3.

Bruk Euklids algoritme til å finne største felles divisor til 297 og 176 og skriv denne som en lineær kombinasjon av 297 og 176.

Oppgave 4.

Kan 21 skrives som en lineær kombinasjon av 455 og 2772? Hvis ja, finn en slik kombinasjon.

Oppgave 5.

En rikmann sendte sin slave til markedet for å kjøpe sauer og geiter, og sendte med ham 170 drakmer. Slaven kom tilbake med innkjøpte dyr. "Hva var prisene?" spurte rikmannen. "En sau kostet 30 drakmer og en geit 18 drakmer," svarte slaven. "Har du noen penger igjen?" spurte rikmannen. "Nei, jeg handlet for alle sammen," svarte slaven. "Du lyver," sa rikmannen. Og ganske riktig, da de ransaket slaven, fant de 8 drakmer.

a) Hvordan kunne rikmannen vite at slaven løy?
b) Hvor mange sauer og hvor mange geiter hadde slaven kjøpt?

Oppgave 6.

To oppgaver om innbyrdes primiske tall:

a) Vis at dersom a og b er innbyrdes primisk og $a|mb$, så vil $a|m$
b) Vis at dersom a og b er innbyrdes primiske tall som begge deler c, så vil ab også dele c.

Oppgave 7.

Lag en addisjons- og en multiplikasjonstabell for $\mathbf{Z}/(7)$.

Oppgave 8.

a) Vis at hvis n er odde, så er $n^2 \equiv 1(mod\ 4)$ og hvis n er like, så er $n^2 \equiv 0(mod\ 4)$
b) Vis at en sum $m^2 + n^2$ aldri kan være kongruent med 3 (mod 4)

Oppgave 9.

Vis at dersom $7|(a^2 + b^2)$, så må både $7|a$ og $7|b$.

(Hint: Betrakt a^2 og b^2 modulo 7)

Oppgave 10.

a) Vis at 9 deler et tall hvis og bare hvis det deler tverrsummen.
b) Den *alternerende tverrsummen* til et naturlig tall n er definert som

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \cdots + (-1)^k \alpha_k$$

der $n = \alpha_k \alpha_{k-1} \alpha_{k-2} \cdots \alpha_1 \alpha_0$ er tallet skrevet i titallsystemet. Vis at 11 deler n hvis og bare hvis 11 deler den alternerende tverrsummen.
c) Undersøk om 778431276659113 er delelig med 3, 9 eller 11.

Oppgave 11.

Vis at likningen $3x^2 + 2 = y^2$ ikke har noen heltallige løsninger x, y.
(Hint: Vurder de mulige verdiene y kan ha modulo 3).

Oppgave 12.

a) Vis at kvadratet av et oddetall er kongruent med 1 modulo 8.
b) Vis at ingen heltall $k \equiv 7(mod\ 8)$ kan skrives som en sum av tre kvadrattall.

Oppgave 13.

a) Bevis følgende påstand, ofte kalt "Det kinesiske restteorem": Anta at $r_1, r_2, \cdots, r_n$ er hele tall, at $m_1, m_2, \cdots, m_n$ er naturlige tall, og at m_i, m_j er innbyrdes primiske for $i \neq j$. Vis at det fins ett og bare ett helt tall x slik at $0 \leq x < m_1 \cdots m_n$ og

$$\begin{aligned} x &\equiv r_1(mod\ m_1) \\ x &\equiv r_2(mod\ m_2) \\ &\vdots \\ x &\equiv r_n(mod\ m_n) \end{aligned}$$

(Hint: Vis ved induksjon på k at det fins et tall x_k på formen

$$x_k = a_1 + a_2 m_1 + a_3 m_1 m_2 + \cdots + a_k m_1 m_2 \cdots m_{k-1}$$

med $a_i < m_i$, og slik at $x_k \equiv r_1(mod\ m_1), x_k \equiv r_2(mod\ m_2), \cdots, x_k \equiv r_k$ $(mod\ m_k)$).
b) Finn det minste positive tallet x slik at $x \equiv 5(mod\ 7), x \equiv 7(mod\ 11), x \equiv 3(mod\ 13)$.
c) Anta at $m_1, m_2 \in \mathbf{N}$ *ikke* er innbyrdes primiske. Vis at det finnes tall r_1, r_2 slik at ligningssystemet

$$\begin{aligned} x &\equiv r_1(mod\ m_1) \\ x &\equiv r_2(mod\ m_2) \end{aligned}$$

ikke har løsning.

Oppgave 14.

La n være et helt tall.

a) Vis at dersom n ikke er delelig med 5, så er $n^8 + 2n^6 + 3n^2 + 4$ delelig med 5.
b) Vis at $\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}$ er et helt tall.
c) Vis at $5n^7 - 7n^5 + 2n$ er delelig med 35 for alle $n \in \mathbf{N}$.
d) Vis at $n^7 - n$ er delelig med 42 for alle $n \in \mathbf{Z}$.

Oppgave 15.

La a være et helt tall. Vis at

$$n|(a^{13} - a)$$

gjelder for $n = 2, 3, 5, 7, 13$. Hva kan du si om dette uttrykket for $n = 1, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12$?

Oppgave 16.

Vis at for ethvert primtall p, bortsett fra 2 og 5, så fins det et tall av formen 111...1 (dvs. med alle sifrene lik 1) som p går opp i. (Hint: Bruk Fermats "lille" sats til først å finne tall av typen 999...9)

Oppgave 17.

Beregn $\phi(n)$ for $n = 1, 2, 3, \cdots, 24$.

Oppgave 18.

a) Vis at dersom p er et primtall så er $\phi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$.
b) Vis at dersom m og n er innbyrdes primiske, så er $\phi(m \cdot n) = \phi(m) \cdot \phi(n)$.
c) Finn $\phi(4851)$.
d) Dersom n har primtallsfaktorisering $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdot ... \cdot p_k^{m_k}$, hva er $\phi(n)$?