UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1001 — Matematikk 1
Eksamensdag:	Fredag 13. desember 2013
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ett tosidig A4-ark med valgfri tekst, håndskrevet eller trykt, samt godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

For hver oppgave er det angitt en maksimal poengskår. Til sammen kan du oppnå 66 poeng. Poengene på dagens eksamen legges sammen med den poengsummen du fikk på midtveiseksamen, slik at maksimal samlet poengsum blir 100. Denne summen legges til grunn for karakteren du får i kurset.

Oppgave 1 (12 poeng)

En 2. ordens differenslikning er gitt ved

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 1$$

Finn den spesielle løsningen av differenslikningen som tilfredsstiller $x_0 = 1$ og $x_1 = 3$.

Løsning. Karakteristisk polynom $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ med rot

$$\lambda = 2$$

Det gir generell løsning av den homogene likningen

$$x_n^h = C \cdot 2^n + D \cdot n \cdot 2^n$$

Vi prøver med $x_n^s = A$, som gir

$$x_{n+2}^s - 4x_{n+1}^s + 4x_n^s = A - 4A + 4A = A = 1$$

Generell løsning,

$$x_n = x_n^h + x_n^s = C \cdot 2^n + D \cdot n \cdot 2^n + 1$$

Innsetting,

$$1 = x_0 = C \cdot 2^0 + D \cdot 0 \cdot 2^0 + 1 = C + 1$$

som betyr at $C = 0$, og

$$3 = x_1 = 0 \cdot 2^1 + D \cdot 1 \cdot 2^1 + 1 = 2D + 1$$

(Fortsettes på side 2.)

som gir $D = 1$ og løsning

$$\underline{\underline{x_n = n \cdot 2^n + 1}}$$

Oppgave 2 (12 poeng)

Endringen av barometertrykket p med hensyn på høyden x over havet er proporsjonal med barometertrykket ved denne høyden. Det gir en differensialliking

$$\frac{dp}{dx} = -kp$$

der $k = 1,26 \cdot 10^{-4}$. Løs denne likningen når vi setter $p(0) = p_0$. Hvis du vil sjekke om svaret ditt er riktig kan vi opplyse om at barometertrykket på Norges høyeste fjell, Galdhøpiggen (2469 moh.), er ca 73% av barometertrykket ved havoverflaten.

Løsning. Løser som en separabel likning,

$$\int \frac{dp}{p} = -\int k\,dx$$

Det gir $\ln|p| = -kt + C'$. Nå er trykk alltid en positiv størrelse, så vi kan fjerne absoluttverditegnet. Dette gir

$$p = e^{-kt+C'}$$

og med $C = e^{C'}$ får vi

$$p = Ce^{-kt}$$

Setter inn for $p(0) = C = p_0$. Det gir

$$\underline{\underline{p = p_0 e^{-kt}}}$$

Vi sjekker med høyden $x = 2469$, som gir

$$p = p_0 e^{-1{,}26 \cdot 10^{-4} \cdot 2469} = p_0 e^{-0{,}311} \approx 0,7326 p_0$$

Oppgave 3

a) (8 poeng) Skriv uttrykket $\sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{3}t\right) + \cos\left(\frac{1}{3}t\right)$ på formen $A\cos(\omega t - \phi)$.

b) (12 poeng) En funksjon $y = y(t)$ er bestemt av en 2. ordens differensiallikning

$$9y'' + y = 0$$

Vi vet at $y(\pi) = 2$ og $y'(\pi) = 0$. Finn y som en funksjon i t.

Løsning. a) Vi har $A = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$. Videre må $\omega = \frac{1}{3}$, og $\cos\phi = \frac{1}{2}$, $\sin\phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, dvs. $\phi = \frac{\pi}{3}$, og derfor

$$\underline{\underline{\cos\left(\tfrac{1}{3}t\right) + \sqrt{3}\sin\left(\tfrac{1}{3}t\right) = 2\cos\left(\tfrac{1}{3}t - \tfrac{\pi}{3}\right)}}$$

(Fortsettes på side 3.)

b) Karakteristisk polynom $9r^2 + 1 = 0$ med røtter $r = \pm i\frac{1}{3}$. Det gir løsning

$$y(t) = C\cos\left(\tfrac{1}{3}t\right) + D\sin\left(\tfrac{1}{3}t\right)$$

og den deriverte

$$y'(t) = -\tfrac{1}{3}C\sin\left(\tfrac{1}{3}t\right) + \tfrac{1}{3}D\cos\left(\tfrac{1}{3}t\right)$$

Setter vi inn for $t = \pi$ får vi

$$y(\pi) = C\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) + D\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \tfrac{1}{2}C + \tfrac{\sqrt{3}}{2}D = 2$$

og

$$y'(\pi) = -\tfrac{1}{3}C\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right) + \tfrac{1}{3}D\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = -\tfrac{\sqrt{3}}{6}C + \tfrac{1}{6}D = 0$$

som gir $C = 1$ og $D = \sqrt{3}$, og vi får løsning

$$\underline{\underline{y(t) = \cos\left(\tfrac{1}{3}t\right) + \sqrt{3}\sin\left(\tfrac{1}{3}t\right)}}$$

Oppgave 4 (12 poeng)

En første ordens lineær differensiallikning er gitt ved

$$y' + \frac{y}{x} = -2, \quad x > 0$$

hvor $y(1) = 0$. Løs likningen og finn et uttrykk for $y = y(x)$.

Løsning. Integrerende faktor, husk at $x > 0$,

$$e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

Vi setter inn i formelen og får

$$y(x) = \frac{1}{x}\int x(-2)\,dx = \frac{1}{x}(-x^2 + C) = -x + \frac{C}{x}$$

Innsatt $0 = y(1) = -1 + \frac{C}{1}$ gir $C = 1$ og

$$\underline{\underline{y(x) = -x + \frac{1}{x}}}$$

Oppgave 5

En bakteriepopulasjon $P = P(t)$ vokser i henhold til differensiallikningen

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}2P\left(1 - \frac{P}{200}\right)$$

Ved tiden $t = 0$ er populasjonen på 100 gram.

a) (6 poeng) Vis at funksjonen

$$P(t) = \frac{200}{e^{-0{,}2t} + 1}$$

gir en løsning av denne likningen.

(Fortsettes på side 4.)

b) (4 poeng) Når $t \to \infty$ vil populasjonen stabilisere seg på en bestemt verdi. Finn denne.

Løsning. a) Dette er en separabel likning. Vi separerer variable

$$\int \frac{dP}{P(1-\frac{P}{200})} = \int 0,2\,dt = 0,2t + C'$$

Venstresiden splitter vi opp ved delbrøkoppspalting

$$\frac{1}{P(1-\frac{P}{200})} = \frac{A}{P} + \frac{B}{1-\frac{P}{200}} = \frac{A(1-\frac{P}{200}) + BP}{P(1-\frac{P}{200})} = \frac{A + P(B - \frac{A}{200})}{P(1-\frac{P}{200})}$$

som gir $A = 1$ og $B = \frac{1}{2}$. Dette gir

$$\int \frac{dP}{P(1-\frac{P}{200})} = \int \frac{dP}{P} + \int \frac{dP}{200-P} = \ln\Big(\frac{P}{200-P}\Big)$$

Setter vi sammen får vi

$$\frac{P}{200-P} = Ce^{0,2t}$$

hvor vi har satt $C = e^{C'}$. Dette uttrykket kan vi løse mhp P, og får

$$P(t) = \frac{200Ce^{0,2t}}{1+Ce^{0,2t}}$$

Setter vi inn $P(0) = 100$ får vi

$$P(0) = \frac{200Ce^{0}}{1+Ce^{0}} = 100C = 100$$

som gir $C = 1$. Løsningen blir da

$$\underline{\underline{P(t) = \frac{200e^{0,2t}}{1+e^{0,2t}} = \frac{200}{e^{-0,2t}+1}}}$$

Alternativt kan vi derivere det oppgitte uttrykket og sjekke at det passer inn. Vi får

$$P'(t) = -\frac{200}{(e^{-0,2t}+1)^2}e^{-0,2t}(-0,2) = \frac{40e^{-0,2t}}{(e^{-0,2t}+1)^2}$$

Samtidig har vi at

$$0,2P(1-\frac{P}{200}) = 0,2\frac{200}{e^{-0,2t}+1}(1-\frac{1}{e^{-0,2t}+1}) = \frac{40}{e^{-0,2t}+1}\frac{e^{-0,2t}+1-1}{e^{-0,2t}+1}$$

som gir oss samme svar.

b) Fra uttrykket

$$P(t) = \frac{200e^{0,2t}}{1+e^{0,2t}} = \frac{200}{e^{-0,2t}+1}$$

er det lett å se at for $t \to \infty$, så vil $P(t) \to 200$. Alternativt kan vi se det direkte fra likningen, ved å sette den deriverte $P'(t) = 0$, og få $0,2P(1-\frac{P}{200}) = 0$, som betyr at $P = 200$, siden vi antar at $P > 0$.

SLUTT