MAT 1001, Høsten 2013

Oblig 1

Innleveringsfrist: Torsdag 19. september kl. 1430

Det er lov til å samarbeide om løsning av oppgavene, men alle skal levere inn sin egen versjon. Husk å skrive på navn og kurskode (MAT 1001). Oppgaven leveres på ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt i 7. etg. i Niels Henrik Abels hus innen fristen.

Ved rettingen gis hvert delspørsmål inntil 2-8 poeng og maks poengsum er 40. Grensen for å få godkjent settes til 20 poeng (altså minst halvparten av maks), men det kreves i tillegg at man har gjort et forsøk på å løse alle deloppgavene under del 1 og del 2.

Oppgaven dreier seg om et konstruert strategispill for 3 eller flere spillere. Spillereglene for spillet er som følger:
1. Alle spillerne får før start utdelt like mange poeng, f.eks. 1.
2. Uavhengig og skjult for hverandre bestemmer hver spiller seg for en fordelingsnøkkel for hvordan spillerens poeng skal fordeles på de andre spillerne. Man beholder ingenting selv.
3. For hver runde av spillet fordeler hver spiller sine poeng til de andre spillerne etter fordelingsnøkkelen i punkt 2. Dette gjentas et passende antall ganger, f.eks. 10.
4. Den som har flest poeng etter de 10 rundene vinner spillet.

Del 1.

Vi skal se på et eksempel på hvordan spillet kan forløpe. Vi antar at vi har tre spillere, A, B og C. Spiller A bestemmer seg for å fordele sine poeng med 60% på B og 40% på C. B gir 30% til A og 70% til C, mens C gir 40% til A og 60% til B. Vi starter med en fordeling

$$P(0) = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der a_n generelt står for poengsummen til A etter n runder, og tilsvarende for b_n og c_n.

Etter en runde av spillet har vi fordelingen

$$P(1) = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hvor

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0,3 & 0,4 \\ 0,6 & 0 & 0,6 \\ 0,4 & 0,7 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (2 poeng) Før du går videre, sørg for at du forstår hva oppsettet over innebærer, og hvorfor det ser ut akkurat slik det ser ut. Regn ut $P(1)$.

b) (3 poeng) Vi har at

$$P(n) = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M \cdot P(n-1)$$

Forklar hvorfor dette gir

$$P(n) = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) (6 poeng) Finn egenverdiene λ_1, λ_2, λ_3 og egenvektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ til M. Du kan bruke at $\lambda_1 = 1$ er en egenverdi og finne de andre ved polynomdivisjon slik det er beskrevet på slutten av dette oppgavesettet.

Vi er interessert i å finne ut hva som skjer med poengfordeligen mellom de tre spillerne etter hvert som vi gjennomfører stadig flere runder. Det betyr at vi må kunne regne ut $P(n)$ for store n.

d) (5 poeng) Skriv først $P(0)$ som en sum av egenvektorer, dvs. på formen

$$P(0) = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3$$

der $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ er egenvektorene du fant i oppgave c) og α_1, α_2 og α_3 er tall.

e) (8 poeng) Vis at

$$P(n) = \frac{1}{11,2} \begin{pmatrix} 8,7 - 0,7 \cdot (-0,6)^n + 3,2 \cdot (-0,4)^n \\ 12,6 - 1,4 \cdot (-0,6)^n \\ 12,3 + 2,1 \cdot (-0,6)^n - 3,2 \cdot (-0,4)^n \end{pmatrix}$$

Hva blir grensen P_∞ av vektorene $P(n)$ når $n \to \infty$? Hva er sammenhengen mellom dette uttrykket og svarene i oppgave c)?

f) (2 poeng) Hvem vant dette spillet?

Del 2.

Vi skal i denne delen bruke MATLAB til å illustrere noen av de samme problemstillingene vi så på i første del.

a) (2 poeng) Bruk MATLAB til å regne ut $P(1)$ og $P(2)$. Bruk også MATLAB til å regne ut egenverdier og -vektorer for M. Legg ved en utskrift som dokumentasjon.

b) (8 poeng) Regn ut noen høyere potenser av M og godtgjør at $P(n)$ går mot en fast grense når n vokser, mao. vis f.eks. at $P(n)$ og $P(n+1)$ er svært like for et passende valg av stor n. Sammenlign dette svaret med det du har funnet for egenvektorene til M.

c) (4 poeng) Sett opp et eksempel hvor spillet spilles av 5 spillere, dvs. la M være en 5×5-matrise med ikke-negative elementer, med 0-er på diagonalen og der summen av tallene i hver kolonne er 1. Bruk MATLAB til å regne ut

$$M^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

for noen store n og avgjør hvilken spiller som vinner, dvs. får flest poeng. Forandre på fordelingsnøkkelen til noen av spillerne og se hva som skjer. Kan du klare å forutse hva som vil skje?

Del 3. (Frivillig, tatt med fordi noen helt sikkert synes slike ting er gøy.)

a) Matrisa M har en litt spesiell egenskap, nemlig at summen av tallene i hver kolonne er 1. Dette medfører faktisk at verdien 1 må være en egenverdi for den samme matrisa. Kan du gi et teoretisk argument for dette?

b) I tilfellet med 3 spillere kan vi stille opp en helt generell matrise,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & q & 1-r \\ 1-p & 0 & r \\ p & 1-q & 0 \end{pmatrix}$$

Vi vet fra a) at denne matrisa har $\lambda_1 = 1$ som egenverdi. Finn en tilhørende egenvektor, uttrykt ved p, q og r.

c) Anta at q og r er gitt og at du kjenner verdien av disse. Kan du finne noen betingelser for at du som spilleren som styrer verdien av p kan sette på denne for at du skal vinne spillet? Eventuelt fastslå at du ikke har noen mulighet til å vinne?

Vi skal vise polynomdivisjon ved et konkret eksempel.

Vi ønsker å utføre polynomdivisjonen $(x^3 - 2x^2 + 4x + 7) : (x + 1)$. Svaret skal bli et 2. grads polynom. Vi begynner med høyeste potens av x, i dette tilfellet x^3 og ser "hvor mange ganger" $x + 1$ går opp i $x^3 - 2x^2 + 4x + 7$. Vi holder oss hele tiden til de høyeste potensene og da blir svaret x^2. Vi ganger ut og får på samme måte som for vanlig divisjon

$$\begin{array}{l}
x^3 - 2x^2 + 4x + 7 : (x+1) = x^2 \\
\underline{x^3 + \ x^2}
\end{array}$$

Vi trekker fra slik vi gjør ved vanlig divisjon av tall, og trekker samtidig ned det neste leddet i polynomet

$$\begin{array}{l}
x^3 - 2x^2 + 4x + 7 : (x+1) = x^2 \\
\underline{x^3 + \ x^2} \\
\quad\ - 3x^2 + 4x
\end{array}$$

Nå ser vi at $x + 1$ går opp en $-3x$-gang i $-3x^2 + 4x$. Vi ganger derfor $x + 1$ med $-3x$ og får $-3x^2 - 3x$, som vi trekker fra $-3x^2 + 4x$ og får

$$\begin{array}{l}
x^3 - 2x^2 + 4x + 7 : (x+1) = x^2 - 3x \\
\underline{x^3 + \ x^2} \\
\quad\ - 3x^2 + 4x \\
\quad\ \underline{-3x^2 - 3x} \\
\qquad\qquad\ 7x + 7
\end{array}$$

Til slutt ser vi at $x + 1$ må ganges med 7 for å få $7x + 7$. Det gir

$$\begin{array}{l}
x^3 - 2x^2 + 4x + 7 : (x+1) = x^2 - 3x + 7 \\
\underline{x^3 + \ x^2} \\
\quad\ - 3x^2 + 4x \\
\quad\ \underline{-3x^2 - 3x} \\
\qquad\qquad\ 7x + 7 \\
\qquad\qquad\ \underline{7x + 7} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$