# MAT 1001: Obligatorisk oppgave 1, H-14'

Innleveringsfrist: Torsdag 18. september kl 14:30

Det er lov til å samarbeide om løsning av oppgavene, men alle skal levere inn sin egen versjon. Husk å skrive på navn og kurskode (MAT 1001). Oppgaven leveres på ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt i 7. etg. i Niels Henrik Abels hus innen fristen. Ved rettingen gis hvert delspørsmål inntil 2-8 poeng og maks poengsum er 40. Grensen for å få godkjent settes til 20 poeng (altså minst halvparten av maks), men det kreves i tillegg at man har gjort et hederlig forsøk på å løse alle oppgavene.

**Oppgave 1.**

**a)** (maks 2 poeng) For hvilke verdier av $a$ har det homogene ligningssystemet

$$\begin{aligned} (a-1)x + 2y &= 0 \\ 2x + (a-1)y &= 0 \end{aligned}$$

en ikke-triviell (dvs. $(x, y) \neq (0, 0)$) løsning?

**b)** (maks 6 poeng) Finn løsningsmengden til det lineære ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 13 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 1. \end{aligned}$$

**Oppgave 2.**

Oslos innbyggere kan deles i 3 kategorier; Vålerengasupportere, Lynsupportere og de som støtter andre fotballag, eller ikke er interessert i fotball.

Etter hver sesong vil 20% av Vålerengasupporterne bli skuffet over lagets innsats, og miste interessen for fotball, mens de resterende 80% fortsatt vil støtte Vålerenga neste år.

Vi har at 20% av Lynsupporterne vil gå over til å bli Vålerengasupportere og 30% av Lynsupporterne vil miste interessen for fotball, mens 50% fortsatt vil støtte Lyn neste sesong.

Blant de som ikke er interessert i fotball, eller støtter andre lag, vil 20% støtte Vålerenga og 10% støtte Lyn neste sesong. Resten vil hverken støtte Lyn eller Vålerenga.

La $\boldsymbol{p}_n$ være vektoren

$$\boldsymbol{p}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{andel Vålerengasupportere i sesong } n \\ \text{andel Lynsupportere i sesong } n \\ \text{andel andre i sesong } n \end{pmatrix},$$

og la $M$ være matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.2 \\ 0.0 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

**a)** (maks 6 poeng) Forklar hvorfor $\boldsymbol{p}_{n+1} = M\boldsymbol{p}_n$. Dersom $x_0 = y_0 = 0$ og $z_0 = 1$, finn $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ og $\boldsymbol{p}_3$.

**b)** (maks 6 poeng) Vis at $x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1} = x_n + y_n + z_n$.

**c)** (maks 6 poeng) Vi har at $\lambda_1 = 1$ er en egenverdi til $M$. Finn den tilsvarende egenvektoren $\boldsymbol{r}_1$.

**d)** (maks 8 poeng) Finn de to andre egenverdiene $\lambda_2$ og $\lambda_3$. Du *behøver ikke* finne de to andre egenvektorene $\boldsymbol{r}_2$ og $\boldsymbol{r}_3$.

**e)** (maks 6 poeng) Anta at vi allerede er i sesong $n$, hvor $n$ er stor, og større enn 70. Hvor stor andel (ca.) av Oslos befolkning tror du støtter henholdsvis Vålerenga, Lyn, eller noe annet (enn fotball)? Svaret skal begrunnes ved å bruke modellen.