

MAT 1001: Obligatorisk oppgave 2, H-14'

Innleveringsfrist: Torsdag 6. november kl 14:30

Det er lov til å samarbeide om løsning av oppgavene, men alle skal levere inn sin egen versjon. Husk å skrive på navn og kurskode (MAT 1001). Oppgaven leveres på ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt i 7. etg. i Niels Henrik Abels hus innen fristen. Ved rettingen gis hvert delspørsmål inntil 2-8 poeng og maks poengsum er 42. Grensen for å få godkjent settes til 21 poeng (altså minst halvparten av maks), men det kreves i tillegg at man har gjort et hederlig forsøk på å løse alle oppgavene.

Oppgave 1. *Repetisjon av komplekse tall og differensligninger*

a) (1 poeng) Bruk identiteten

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}$$

til å vise formlene

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).\end{aligned}$$

b) (4 poeng) Finn den generelle løsningen på differensligningen

$$x_{n+2} - \frac{1}{2}x_{n+1} + \frac{1}{8}x_n = 0.$$

c) (8 poeng) Finn en spesiell løsning på differensligningen

$$(1) \quad x_{n+2} - \frac{1}{2}x_{n+1} + \frac{1}{8}x_n = \cos(n\pi/2).$$

Hint: Gjett på en løsning på formen $A \cos(n\pi/2) + B \sin(n\pi/2)$ der A og B er konstanter.

d) (4 poeng) Finn løsningen på (1) som tilfredsstiller $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

Oppgave 2. *Derivasjon og integrasjon*

La f være en deriverbar funksjon som har en deriverbar invers g for x i et åpent intervall (a, b) . Da har vi at $g(f(x)) = x$ for alle $x \in (a, b)$.

a) (1 poeng) Vis formelen $g'(f(x))f'(x) = 1$, for $x \in (a, b)$.

b) (1 poeng) Vis formelen

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

c) (4 poeng) Sett $f(x) = \tan(x)$. Finn $f'(x)$. Bruk formelen fra punkt b) for å finne $(\tan^{-1})'$, $(\sin^{-1})'$ og $(\cos^{-1})'$.

d) (8 poeng) Finn de ubestemte integralene

i) $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx,$

ii) $\int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dx.$

Oppgave 3. *Fritt fall med luftmotstand*

Akselerasjon er definert som den deriverte av hastighet med hensyn på tiden. Altså hvis vi kjenner hastigheten (til et legeme) $v(t)$, så er akselerasjonen lik $v'(t)$.

Newtons 2. lov sier at “kraft=masse·akselerasjon”, eller $F = mv'(t)$, der m er massen til legemet. Når en ball med masse m faller rett nedover, er den påvirket av gravitasjonskraften, som vi skriver G og setter lik $9m \text{ kg m/s}^2$, samt av luftmotstanden $R = 0.25m(v(t))^2 \text{ kg m/s}^2$. Luftmotstanden virker mot fartsretningen (som er rett nedover).

a) (2 poeng) Forklar hvorfor hastigheten til ballen tilfredstiller differensialligningen

(2)
$$v'(t) = \frac{1}{m}(G - R) = 9 - \frac{1}{4}(v(t))^2.$$

b) (8 poeng) Anta at ballen starter i ro, dvs. $v(0) = 0$. Løs differensialligningen (2) og finn $v(t)$.

c) (1 poeng) Hva blir $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$?