UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1001 — Matematikk 1
Eksamensdag:	Mandag 12. desember 2016
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00

Oppgavesettet er på 6 sider.

Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ett tosidig A4-ark med valgfri tekst, håndskrevet eller trykt, samt godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Til sammen kan du oppnå 66 poeng. Poengene på dagens eksamen legges sammen med den poengsummen du fikk på midtveiseksamen, slik at maksimal samlet poengsum blir 100. Denne summen legges til grunn for karakteren du får i kurset.

Oppgavesettet har to deler. Første del består av 5 flervalgsoppgaver. Andre del består av 4 tekstoppgaver. I hver oppgave er det angitt maksimal skår på delspørsmålene.

KANDIDATNR. __________

Svarark for Del 1.

Oppgave	Alt. a)	Alt. b)	Alt. c)	Alt. d)	Alt. e)
1					
2					
3					
4					
5					

(Fortsettes på side 2.)

DEL 1.

Del 1 består av 5 flervalgsoppgaver; bruk vedlagte svarark. Hver deloppgave i del 1 gir 2 poeng for rett svar, til sammen maksimum 10 poeng.

1. Hvilken av funksjonene gir en anti-derivert til $f(x) = (x+1)^{-2}$?

a) $-\frac{1}{x+1}$ b) $-3(x+1)^{-3}$ c) $-\frac{1}{2(x+1)}$ d) $(\ln(x+1))^2$ e) $-\frac{1}{3}(x+1)^{-3}$

2. Hvilken av funksjonene gir en anti-derivert til $f(x) = x^2 \ln x$?

a) $\frac{1}{3}x^3 \ln x$ b) $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3$ c) $\frac{1}{3}x^2(\ln x)^2$ d) $2x \ln x + x$ e) $2x \ln x - x$

3. Hvilken av funksjonene gir en anti-derivert til $f(x) = \sin^2 2x$?

a) $\cos^2 2x$ b) $\frac{1}{3}\sin^3 2x$ c) $4\sin 2x \cos 2x$ d) $\frac{1}{8}\sin(4x) + \frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x)$

4. Hvilken av funksjonene gir en anti-derivert til $f(x) = xe^{\frac{1}{2}x^2}$?

a) $e^{\frac{1}{2}x^2}$ b) $\frac{1}{2}x^2e^x + e^x$ c) $e^{\frac{1}{2}x^2} + x$ d) $\frac{1}{2}x^2e^x$ e) $e^{\frac{1}{2}x^2}(x-1)$

5. Vi betrakter en andre ordens homogen differenslikning

$$x_{n+2} + \sqrt{2}x_{n+1} + x_n = 0$$

med initialverdier $x_0 = 1$ og $x_1 = 0$. Det gir at x_{20} er lik

a) $(\frac{\sqrt{2}}{2})^{20}$ b) 0 c) 1 d) $(\sqrt{2})^{20}$ e) -1

(Fortsettes på side 3.)

DEL 2.

Oppgave 1

En andre ordens differensiallikning er gitt ved

$$y'' + y' + \alpha y = 0$$

der α er en reell konstant.

a) (2 poeng) Regn ut det karakteristiske polynomet til differensiallikningen og skriv røttene uttrykt ved α.

b) (4 poeng) For hvilke verdier av α vil løsningen til differensiallikningen beskrive en dempet svingning og hvorfor?

c) (2 poeng) I resten av oppgaven setter vi $\alpha = \frac{1}{4}$. Finn den generelle løsningen av differensiallikningen i dette tilfellet.

d) (6 poeng) Finn den spesielle løsningen av likningen som tilfredsstiller $y(0) = 1$ og $y'(0) = -\frac{1}{2}$.

Oppgave 2

a) (6 poeng) Bruk delbrøkoppspalting til å vise at

$$\int \frac{dx}{x(B-x)}\,dx = \frac{1}{B}\ln\frac{x}{(B-x)}$$

for $0 < x < B$.

b) (6 poeng) Løs den separable differensiallikningen $x' = kx(B-x)$ og finn et uttrykk for $x = x(t)$. Vi antar at k og B er positive konstanter og at $0 < x < B$.

c) (2 poeng) Når $t \to \infty$ vil x stabilisere seg på en bestemt verdi. Finn denne verdien.

Oppgave 3

En første ordens lineær differensiallikning er gitt ved

$$xy' + 2y = -1, \quad x > 0$$

hvor $y(1) = 0$.

a) (2 poeng) En bestemt verdi av y vil gi oss en konstant løsning av denne differensiallikningen. Hvilken verdi?

b) (8 poeng) Løs likningen og finn et uttrykk for $y = y(x)$.

c) (2 poeng) Hva skjer med løsningen når $x \to \infty$?

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 4

a) (6 poeng) Skriv uttrykket $\sin\left(\frac{1}{3}t\right) - \cos\left(\frac{1}{3}t\right)$ på formen $A\cos(\omega t - \phi)$.

b) (4 poeng) En funksjon $y = y(t)$ er bestemt av en 2. ordens differensiallikning

$$y'' + \tfrac{1}{9}y = 0$$

Finn en generell løsning av likningen.

c) (6 poeng) Vi vet at $y(0) = 1$ og $y'(0) = -\frac{1}{3}$. Finn den spesielle løsningen av likningen som tilfredsstiller disse initialbetingelsene.

SLUTT

Noen aktuelle formler

Komplekse tall:

$$z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{Realdel}: \ Re(z) = a, \quad \text{Imaginærdel}: \ Im(z) = b$$

$$\text{Kompleks konjugert}: \overline{z} = a - ib = re^{-i\theta}$$

$$\text{De Moivres formel}: \ (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Derivasjonsregler

Spesielle:
$(x^n)' = nx^{n-1}$
$(a^x)' = a^x \ln a$ spesielt $(e^x)' = e^x$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Generelle:
$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
$(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$
$(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Spesielle funksjoner

Eksponensialfunksj.: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Logaritmer:
$\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$
$\ln\frac{1}{x} = -\ln x$ $\ln(x^a) = a\ln x$

Trigonometriske:
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin 2x = 2\sin x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$-$

(Fortsettes på side 6.)

Integrasjonsregler

Spesielle: $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad n \neq -1 \quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C,\ x > 0$
$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$ spesielt $\int e^x\,dx = e^x + C$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C$

Generelle: $\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$
$\int f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(x)) + C$

Differens- og differensiallikninger

Første ordens differensiallikning, $y' + f(x)y = g(x)$:

$$y(x) = e^{-\int f\,dx}\int e^{\int f\,dx}g(x)\,dx$$

Andre ordens differensiallikning, $y'' + py' + qy = 0$:

$$y(x) = \begin{cases} Ce^{r_1x} + De^{r_2x} & \text{hvis to reelle røtter } r_1 \neq r_2 \\ Ce^{rx} + Dxe^{rx} & \text{hvis én reell rot } r \\ Ce^{ax}\cos(bx) + De^{ax}\sin(bx) & \text{hvis to komplekse røtter } r = a \pm ib \end{cases}$$

Første ordens homogen differenslikning;

$$x_n - kx_{n-1} = 0 \ : \quad x_n = Ck^n$$

Andre ordens homogen differenslikning;

$$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0, \quad \text{karakteristisk polynom: } r^2 + br + c,$$

$$x_n = \begin{cases} Cr_1^n + Dr_2^n & \text{hvis to reelle røtter } r_1 \neq r_2 \\ Cr^n + Dnr^n & \text{hvis én reell rot } r \\ C\rho^n\cos(n\theta) + D\rho^n\sin(n\theta) & \text{hvis to komplekse røtter } r = \rho e^{\pm i\theta} \end{cases}$$