DEL 1.

1. Hvilken av funksjonene gir en anti-derivert for $f(x) = (x+1)^{-2}$?

Løsning. Vi setter $u = x + 1$, som gir $du = dx$,

$$\int (x+1)^{-2}\,dx = \int u^{-2}\,du = -u^{-1} = -(x+1)^{-1} = \underline{\underline{-\frac{1}{x+1}}}$$

a) $-\frac{1}{x+1}$ b) $-3(x+1)^{-3}$ c) $-\frac{1}{2(x+1)}$ d) $(\ln(x+1))^2$ e) $-\frac{1}{3}(x+1)^{-3}$

2. Hvilken av funksjonene gir en anti-derivert for $f(x) = x^2 \ln x$?

Løsning. Vi bruker delvis integrasjon og setter $u = \ln x$ og $v' = x^2$. Det gir $u' = \frac{1}{x}$ og $v = \frac{1}{3}x^3$, og vi får

$$\int x^2 \ln x\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \int \tfrac{1}{x}\cdot\tfrac{1}{3}x^3\,dx = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \tfrac{1}{9}x^3}}$$

a) $\frac{1}{3}x^3 \ln x$ b) $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3$ c) $\frac{1}{3}x^2(\ln x)^2$ d) $2x\ln x + x$ e) $2x \ln x - x$

3. Hvilken av funksjonene gir en anti-derivert for $f(x) = \sin^2 2x$?

Løsning. Vi bruker at $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = (1 - \sin^2 2x) - \sin^2 2x = 1 - 2\sin^2 2x$, og derfor $\sin^2 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)$. Det gir

$$\int \sin^2 2x\,dx = \int \tfrac{1}{2}(1 - \cos 4x)\,dx = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}\sin 4x}}$$

a) $\cos^2 2x$ b) $\frac{1}{3}\sin^3 2x$ c) $4\sin 2x \cos 2x$ d) $\frac{1}{8}\sin(4x) + \frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin(4x)$

4. Hvilken av funksjonene gir en anti-derivert for $f(x) = xe^{\frac{1}{2}x^2}$?

Løsning. Vi substituerer $u = \frac{1}{2}x^2$, $du = x\,dx$. Det gir

$$\int xe^{\frac{1}{2}x^2}\,dx = \int e^u\,du = e^u = \underline{\underline{e^{\frac{1}{2}x^2}}}$$

a) $e^{\frac{1}{2}x^2}$ b) $\frac{1}{2}x^2e^x + e^x$ c) $e^{\frac{1}{2}x^2} + x$ d) $\frac{1}{2}x^2e^x$ e) $e^{\frac{1}{2}x^2}(x-1)$

5. Vi betrakter en andre ordens homogen differenslikning

$$x_{n+2} + \sqrt{2}x_{n+1} + x_n = 0$$

med initialverdier $x_0 = 1$ og $x_1 = 0$. Det gir at x_{20} er lik

Løsning. Likningen har karakteristisk polynom $\lambda^2 + \sqrt{2}\lambda + 1$, med røtter

$$\lambda = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2-4}}{2} = -\tfrac{\sqrt{2}}{2} \pm i\tfrac{\sqrt{2}}{2} = e^{\pm i\frac{3\pi}{4}}$$

Det gir generell løsning

$$x_n = C\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) + D\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$$

Innseting gir

$$\begin{aligned} 1 &= x_0 = C\cos 0 + D\sin 0 = C \\ 0 &= x_1 = C\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + D\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-C + D) \end{aligned}$$

som gir $C = D = 1$, og spesiell løsning gitt ved

$$x_n = \cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$$

For $n = 20$ gir dette

$$x_{20} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}20\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4}20\right) = \cos(15\pi) - \sin(15\pi) = \underline{\underline{-1}}$$

a) $(\frac{\sqrt{2}}{2})^{20}$ b) 0 c) 1 d) $(\sqrt{2})^{20}$ e) -1

DEL 2.

Oppgave 1

En andre ordens differensiallikning er gitt ved

$$y'' + y' + \alpha y = 0$$

der α er en reell konstant.

a) (2 poeng) Regn ut det karakteristiske polynomet til differensiallikningen og skriv røttene uttrykt ved α.

Løsning. Det karakteristiske polynomet er gitt ved $\underline{\underline{r^2 + r + \alpha}}$, og dette gir

$$r = \underline{\underline{\frac{-1 \pm \sqrt{1-4\alpha}}{2}}}$$

b) (4 poeng) For hvilke verdier av α vil løsningen til differensiallikningen beskrive en dempet svingning og hvorfor?

Løsning. Vi får en svingning når diskriminanten $1-4\alpha<0$, dvs. $\alpha>\frac{1}{4}$. Vi har også at realdelen til røttene er negativ, noe som sikrer at vi har en dempingsfaktor (som faktisk går mot 0 når $x\to\infty$).

c) (2 poeng) I resten av oppgaven setter vi $\alpha=\frac{1}{4}$. Finn den generelle løsning av differensiallikningen i dette tilfellet.

Løsning. Den gitte verdien for α gir oss kun en rot, $r=-\frac{1}{2}$, med generell løsning

$$y=\underline{\underline{Ce^{-\frac{1}{2}x}+Dxe^{-\frac{1}{2}x}}}$$

d) (6 poeng) Finn den spesielle løsningen som tilfredsstiller $y(0)=1$ og $y'(0)=-\frac{1}{2}$.

Løsning. Den deriverte av løsningen er gitt ved

$$y'=-\tfrac{1}{2}Ce^{-\frac{1}{2}x}+De^{-\frac{1}{2}x}-\tfrac{1}{2}Dxe^{-\frac{1}{2}x}$$

Vi setter inn:

$$1=y(0)=Ce^{-\frac{1}{2}0}+D\cdot 0\cdot e^{-\frac{1}{2}0}=C$$

og

$$-\tfrac{1}{2}=y'(0)=-\tfrac{1}{2}Ce^{-\frac{1}{2}0}+De^{-\frac{1}{2}0}-\tfrac{1}{2}D\cdot 0\cdot e^{-\frac{1}{2}0}=-\tfrac{1}{2}C+D$$

som gir $C=1$ og $D=0$, eller

$$y=\underline{\underline{e^{-\frac{1}{2}x}}}$$

Oppgave 2

a) (6 poeng) Bruk delbrøkoppspalting til å vise at $\int\frac{dx}{x(B-x)}=\frac{1}{B}\ln\frac{x}{(B-x)}$ for $0<x<B$.

Løsning. Vi delbrøkoppspalter,

$$\frac{1}{x(B-x)}=\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{B-x}=\frac{\alpha(B-x)+\beta x}{x(B-x)}=\frac{(\beta-\alpha)x+\alpha B}{x(B-x)}$$

som gir $\alpha=\beta=\frac{1}{B}$. Dermed har vi

$$\int\frac{dx}{x(B-x)}\,dx=\frac{1}{B}\Big(\int\frac{1}{x}\,dx+\int\frac{1}{B-x}\,dx\Big)=\frac{1}{B}(\ln x-\ln(B-x))=\underline{\underline{\frac{1}{B}\ln\frac{x}{B-x}}}$$

b) (6 poeng) Løs den separable differensiallikningen $x' = kx(B-x)$ og finn et uttrykk for $x = x(t)$. Vi antar at k og B er positive konstanter og at $0 < x < B$.

Løsning. Vi separerer variable og integrerer begge sider av likningen,

$$\frac{1}{B}\ln\frac{x}{B-x} = \int \frac{dx}{x(B-x)}\,dx = \int k\,dt = kt + C$$

som gir

$$\frac{x}{B-x} = e^{B(kt+C)}$$

Vi løser mhp x og får

$$x(t) = \frac{Be^{B(kt+C)}}{1+e^{B(kt+C)}} = \underline{\underline{\frac{B}{e^{BC}\cdot e^{-Bkt}+1}}}$$

c) (2 poeng) Når $t \to \infty$ vil x stabilisere seg på en bestemt verdi. Finn denne verdien.

Løsning. Når $t \to \infty$, så vil $e^{-Bkt} \to 0$, og

$$\underline{\underline{\lim_{t\to\infty} x(t) = B}}$$

Oppgave 3 En første ordens lineær differensiallikning er gitt ved

$$xy' + 2y = -1, \quad x > 0$$

hvor $y(1) = 0$.

a) (2 poeng) En bestemt verdi av y vil gi oss en konstant løsning av denne differensiallikningen. Hvilken verdi?

Løsning. En konstant løsning betyr at $y' = 0$. Det betyr at $2y = -1$ og $\underline{\underline{y = -\frac{1}{2}}}$.

Merk. Her er det en trykkfeil i oppgaven. Initialbetingelsen $y(1) = 0$ skulle ha stått under delspørsmål b). Slik det står nå finner man en konstant løsning $y = -\frac{1}{2}$ ved å sette $y' = 0$, men samtidig skal $y(1) = 0$, noe som selvfølgelig ikke er mulig. Slik den står har derfor oppgaven ikke noen løsning.

b) (8 poeng) Løs likningen og finn et uttrykk for $y = y(x)$.

Løsning. Vi deler hele likningen på x for å få den på standardform;

$$y' + \frac{2}{x}y = -\frac{1}{x}$$

Den integrerende faktoren vil være $e^{\int \frac{2}{x}\,dx} = x^2$. Vi multipliserer den standardiserte likningen med den integrerende faktoren og får

$$\frac{d}{dx}(x^2 \cdot y) = x^2y' + 2xy = -x$$

som gir

$$x^2 \cdot y = -\int x\,dx = -\tfrac{1}{2}x^2 + C$$

eller løst mhp y;

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{C}{x^2}$$

Vi vet at $y(1) = 0$, som gir $0 = -\frac{1}{2} + \frac{C}{1} = -\frac{1}{2} + C$, og $C = \frac{1}{2}$. Dermed blir løsningen

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2}}}$$

c) (2 poeng) Hva skjer med løsningen når $x \to \infty$?

Løsning. Når $x \to \infty$, så vil $\frac{1}{x^2} \to 0$, og derfor

$$\underline{\underline{\lim_{x\to\infty} y(x) = -\tfrac{1}{2}}}$$

(Sammenlikn svaret med oppgave a).

Oppgave 4

a) (6 poeng) Skriv uttrykket $\sin\left(\frac{1}{3}t\right) - \cos\left(\frac{1}{3}t\right)$ på formen $A\cos(\omega t - \phi)$.

Løsning. Vi vet at $A = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, og videre at

$$\sqrt{2}\cos(\omega t - \phi) = \sqrt{2}\cos(\omega t)\cos\phi + \sqrt{2}\sin(\omega t)\sin\phi = \sin\left(\tfrac{1}{3}t\right) - \cos\left(\tfrac{1}{3}t\right)$$

Det betyr at $\omega = \frac{1}{3}$ og $\cos\phi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, og følgelig $\phi = \frac{3\pi}{4}$. Altså

$$\sin\left(\tfrac{1}{3}t\right) - \cos\left(\tfrac{1}{3}t\right) = \underline{\underline{\sqrt{2}\cos\left(\tfrac{1}{3}t - \tfrac{3\pi}{4}\right)}}$$

b) (4 poeng) En funksjon $y = y(t)$ er bestemt av en 2. ordens differensiallikning

$$y'' + \frac{1}{9}y = 0$$

Finn en generell løsning av likningen.

Løsning. Røttene til det karakteristiske polynomet $r^2 + \frac{1}{9}$ er gitt ved $r = \pm i\frac{1}{3}$. Det gir generell løsning av differensiallikningen

$$\underline{\underline{y = C\cos\left(\tfrac{1}{3}t\right) + D\sin\left(\tfrac{1}{3}t\right)}}$$

c) (6 poeng) Vi vet at $y(0) = 1$ og $y'(0) = -\frac{1}{3}$. Finn den spesielle løsningen som tilfredsstiller disse initialbetingelsene.

Løsning. Den deriverte til den generelle løsningen er

$$y' = -\tfrac{1}{3}C\sin\left(\tfrac{1}{3}t\right) + \tfrac{1}{3}D\cos\left(\tfrac{1}{3}t\right)$$

Vi setter inn de oppgitte initialverdiene og får

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = C\cos 0 + D\sin 0 = C \\ -\tfrac{1}{3} &= y'(0) = -\tfrac{1}{3}C\sin 0 + \tfrac{1}{3}D\cos 0 = \tfrac{1}{3}D \end{aligned}$$

som gir $C = 1$ og $D = -1$. Den spesielle løsningen blir da

$$\underline{\underline{y = \cos\left(\tfrac{1}{3}t\right) - \sin\left(\tfrac{1}{3}t\right)}}$$

SLUTT