MAT 1001, Høsten 2016

Oblig 2

Innleveringsfrist: Torsdag 10. november kl. 1430

Det er lov til å samarbeide om løsning av oppgavene, men alle skal levere inn sin egen versjon. Husk å skrive på navn og kurskode (MAT 1001). Oppgaven leveres på ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt i 7. etg. i Niels Henrik Abels hus innen fristen. Se *http://www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html* for mer informasjon.

Ved rettingen gis hvert delspørsmål 0-5 poeng, dvs. maks poengsum 40. Grensen for å få godkjent settes til 20 poeng (altså minst halvparten av maks). I tillegg kreves det at man har forsøkt seg på alle delspørsmålene, dvs. at man normalt ikke får godkjent oppgaven dersom noen delspørsmål er helt blanke.

Oppgave 1. ***(Om harmoniske svingninger, med et overraskende svar)***

En harmonisk svingning er gitt som en sum av tre delsvingninger

$$H(x) = \cos\left(\tfrac{2\pi}{3}x\right) + \cos\left(\tfrac{2\pi}{3}(x-1)\right) + \cos\left(\tfrac{2\pi}{3}(x-2)\right)$$

Skriv $H(x)$ på formen $A\cos(\omega(x - x_0))$.

Oppgave 2. ***(Repetisjon av 2. ordens differenslikninger)***

a) En 2.ordens homogen differenslikning er gitt ved

$$x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$$

Finn den generelle løsningen av likningen.

b) Vi tar for oss differenslikningen i oppgave a), men i denne oppgaven skal vi variere midtleddet for å studere andre typer løsninger.

$$x_{n+2} + b \cdot x_{n+1} + x_n = 0$$

Beskriv hva slags løsninger vi får for varierende verdier av b. To verdier for b gir oss kun en rot i det karakteristiske polynomet. Skriv opp den generelle løsningen av likningen i disse tilfellene.

c) Vi går tilbake til likningen i a), men nå ser vi på en inhomogen variant,

$$x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = n^2 - n - 1$$

Finn løsningen av denne likningen som tilfredsstiller initialbetingelsene $x_0 = 1$ og $x_1 = -1$.

Oppgave 3. ***(Praktisk anvendelse av differenslikninger)***
Vi skal stille opp en enkel modell for en lukket økonomi (uten import eller eksport).

Brutto nasjonalprodukt (BNP) B_n i år n er gitt ved

$$B_n = I_n + C_n + G_n$$

hvor I_n utgjør investeringer i realkapital, C_n er verdien av det private forbruket, og G_n er verdien av det offentlige forbruket, alt i år n. I modellen skal vi anta at det offentlige forbruket er konstant over tid, det vil si at $G_n = G$ for alle n. Videre antar vi at det private forbruket i et år er proporsjonalt med BNP for det foregående året, dvs.

$$C_n = \alpha B_{n-1}$$

og at investeringene et år er proprosjonale med økningen i det private forbruket fra året før, dvs.

$$I_n = \beta(C_n - C_{n-1})$$

Konstantene α og β er begge positive reelle tall.

a) Vis at denne modellen beskriver en differenslikning

$$B_n - \alpha(\beta + 1)B_{n-1} + \alpha\beta B_{n-2} = G$$

b) Dersom uttrykket under rottegnet (diskriminanten) i løsningen av den karakteristiske likningen til differenslikningen er negativt, så vil løsningen av differenslikningen være gitt ved en periodisk funksjon. Vis at dette er tilfellet dersom

$$\alpha < \frac{4\beta}{(\beta + 1)^2}$$

Oppgave 4. ***(Integrasjonskonstanter til besvær!)***
Summeformelen for sinus til den doble vinkel sier at $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Regn ut

$$\int \sin 2x \, dx \qquad \text{og} \qquad 2 \int \sin x \cos x \, dx$$

ved henholdsvis substitusjon og delvis integrasjon. Svarene blir tilsynelatende forskjellige. Hva er hemmeligheten?

Oppgave 5. ***(Praktisk anvendelse av integrasjon)***
En vanntank er tilført vann med en netto tilstrømningsrate

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} V_0 e^{-kt} \sqrt{1 + e^{-kt}}$$

der $v(t)$ er en funksjon av tiden t og hvor V_0 og k er positive konstanter. Gi en tolkning av konstanten V_0 og regn ut det ubestemte integralet

$$\int \frac{1}{\sqrt{2}} V_0 e^{-kt} \sqrt{1 + e^{-kt}} \, dt$$

SLUTT