MAT1012 Matematikk 2,
Torsdag 6. juni 2013
Løsningsforslag

Oppgave 1
(15 poeng) La A være 3×3-matrisen gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 & -3 \\ 12 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vis at vektorene $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er egenvektorer for matrisen A. Finn egenverdiene til A og angi deres multiplisitet. Finn de tilhørende egenrommene og skriv opp en matrise P som diagonaliserer A.

Løsning.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 32 \\ 0 \end{pmatrix} = 16\mathbf{v}_1, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\mathbf{v}_2$$

som betyr at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er egenvektorer med egenverdier $\lambda_1 = 16$ og $\lambda_2 = 4$.
Karakteristisk polynom:

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 10-\lambda & 3 & -3 \\ 12 & 10-\lambda & -6 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} &= (4-\lambda)((10-\lambda)^2 - 36) \\
&= (4-\lambda)(10-\lambda-6)(10-\lambda+6) \\
&= (4-\lambda)^2(16-\lambda)
\end{aligned}$$

som betyr at $\lambda_1 = 16$ har multiplisitet 1, og $\lambda_2 = 4$ har multiplisitet 2.
Egenrom for $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{pmatrix} 10-4 & 3 & -3 \\ 12 & 10-4 & -6 \\ 0 & 0 & 4-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6A + 3B - 3C \\ 12A + 6B - 6C \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som gir $B = C - 2A$, og egenvektorer

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C - 2A \\ C \end{pmatrix}$$

Setter vi $A = C = 1$ får vi tilbake $\mathbf{v}_2$. Mange muligheter for den siste egenvektoren, sett f.eks. $A = 0$, $C = 1$, som gir $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Konklusjon: Egenrom for $\lambda_1 = 16$; $E_1 = \text{Span}(\mathbf{v}_1)$, egenrom for $\lambda_2 = 4$; $E_2 = \text{Span}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

OPPGAVE 2

(12 poeng) Et homogent differensiallikningssystem er gitt ved

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x + y \\ y'(t) &= -5x - 2y \end{aligned}$$

Finn løsningen av systemet som oppfyller initialbetingelsen $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Løsning. Koeffisientmatrisen $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ har karakteristisk polynom:

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -5 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) - 1 \cdot (-5) = \lambda^2 + 1$$

som gir egenverdier $\lambda = \pm i$, og egenvektorer $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \mp i \end{pmatrix}$. Det gir løsning

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} (C\cos t + D\sin t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} (D\cos t - C\sin t)$$

Initialverdi

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} C + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} D$$

som gir $C = 0$ og $D = -1$, mao.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ -2\sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

OPPGAVE 3

(12 poeng) Gitt et vektorfelt $\mathbf{F}(x, y) = (y + x^3 + ye^x, x + y^2 + e^x)$. Bruk Greens teorem til å beregne integralet av vektorfeltet langs sirkelen gitt ved $x^2 + y^2 = 1$, med positiv omløpsretning (mot klokka).

Løsning.

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = (1 + e^x) - (1 + e^x) = 0$$

som gir

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_S \, ds = \iint_D \text{curl}(\mathbf{F}) \, dxdy = \iint_D 0 \, dxdy = 0$$

OPPGAVE 4

En plan kurve C er gitt ved parameterframstillingen

$$\mathbf{r}(t) = (\cos^2 t - \sin^2 t, 2\sin t\cos t), \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

a) (8 poeng) Finn lengden av kurven C.

b) (8 poeng) Finn integralet av funksjonen $f(x, y) = 2xy$ langs kurven C.

Løsning.

a) Vi har

$$\mathbf{r}(t) = (\cos^2 t - \sin^2 t, 2\sin t\cos t) = (\cos 2t, \sin 2t)$$

og derfor $\mathbf{r}'(t) = (-2\sin 2t, 2\cos 2t)$.

$$\int_C ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-2\sin 2t)^2 + (2\cos 2t)^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\, dt = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_C f\, ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos 2t \sin 2t \sqrt{(-2\sin 2t)^2 + (2\cos 2t)^2}\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 4t \cdot 2\, dt = 2[-\frac{1}{4}\cos 4t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{1}{2}(\cos 2\pi - \cos 0) = 0
\end{aligned}$$

OPPGAVE 5

(12 poeng) La D være området i (x, y)-planet avgrenset av x-aksen, linjene $x = -\ln 2$ og $x = \ln 2$, og grafen til funksjonen $f(x) = e^x$. Vi oppgir at arealet til området D er $\frac{3}{2}$. Finn x-koordinaten til tyngdepunktet til området D.

Løsning.

$$\begin{aligned}
\tfrac{3}{2} \cdot \overline{x} &= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \int_0^{e^x} x\, dy\, dx = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} [xy]_0^{e^x}\, dx \\
&= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} xe^x\, dx = [xe^x]_{-\ln 2}^{\ln 2} - \int_{-\ln 2}^{\ln 2} e^x\, dx \\
&= \ln 2 \cdot 2 + \ln 2 \cdot \tfrac{1}{2} - (2 - \tfrac{1}{2}) \\
&= \tfrac{5}{2} \cdot \ln 2 - \tfrac{3}{2}
\end{aligned}$$

som gir $\overline{x} = \frac{5}{3} \ln 2 - 1$.

SLUTT.