



Arne B. Sletsjøe

Kompendium, MAT 1012

Forord

Dette kompendiet dekker analysedelen av pensum i kurset MAT 1012 ved Universitetet i Oslo. Kurset bygger på MAT 1001 og legger mer vekt på anvendelser av teorien enn på dens formelle grunnlag. Derfor er også en god del bevis utelatt, mens det er desto flere eksempler. Kompendiet er under utvikling og alle lesere oppfordres derfor til å komme med konstruktive kommentarer på innhold og utforming, slik at kompendiets neste utgave kan bli bedre enn denne.

Noen få avsnitt i kompendiet er merket med en stjerne. Disse er ikke med i pensum i MAT 1012, men er tatt med for å utfylle teorien, og kanskje av interesse for noen lesere.

Blindern, 18. januar 2012
Arne B. Sletsjøe

Våren 2013 har kompendiet gjennomgått en kraftig oppgradering. Mengder av trykkfeil er rettet, det er lagt til mye flere eksempler og antallet oppgaver er øket.

Blindern, vårsemesteret 2013
Arne B. Sletsjøe

I 2014-utgaven er det rettet opp en del trykkfeil, og for øvrig gjort små endringer. En stor takk til Krister Stræte Karlsen for mange innspill i denne sammenheng.

Blindern, vårsemesteret 2014
Arne B. Sletsjøe

Innhold

1	Funksjoner i én variabel	4
1.1	Monotoni-egenskaper og lokale ekstremalpunkter	4
1.2	Kritiske punkter	6
1.3	Globale ekstremalpunkter	10
1.4	Krumning og vendepunkter	12
2	Integrasjon	17
2.1	Ubestemt integrasjon	18
2.2	Bestemt integrasjon	19
2.3	Fundamentalteoremet	20
2.4	Riemannsummer	23
2.5	Archimedes beregning av volumet av en kule	26
2.6	Trapesmetoden og Simpsons metode	27
2.7	Uekte integraler	30
3	Approksimering	35
3.1	Taylorpolynom	35
3.2	Restleddsestimater	37
3.3	Følger	39
3.4	Rekker	40
3.5	Rekker som funksjoner	42
3.6	Konvergenskriterier*	43
4	Numerisk løsning av differensiallikninger	48
4.1	Løsning av $y' + y = e^{-x} - 1$	48
4.2	Løsning av likningen $y' - y^2 = 1$	51
5	Funksjoner i flere variable	55
5.1	Definisjoner og eksempler	55
5.2	Nivåmengder	56
5.3	Polarkoordinater	58
5.4	Partiell derivasjon	61
5.5	Lokale ekstremalpunkter	64
5.6	Kritiske punkter	65
5.7	Varme- og bølgelikningene*	67
5.8	Minste kvadratets metode	68

6	Vektoranalyse	73
6.1	Vektorfelt	73
6.2	Gradient	75
6.3	Konservative felt	77
6.4	Integralkurver i plane vektorfelt	79
6.5	Sirkulasjon	82
7	Kurveintegraler	87
7.1	Parametriserte kurver	87
7.2	Buelengde	89
7.3	Kurveintegraler	91
7.4	Integrere vektorfelt	92
7.5	Kurveintegraler i konservative felt	94
8	Multipel integrasjon	98
8.1	Multipel integrasjon over rektangler	98
8.2	Multipel integrasjon over mer generelle områder	100
8.3	Areal og tyngdepunkt	101
8.4	Greens teorem	103
9	Fasit	109
9.1	Kapittel 1	109
9.2	Kapittel 2	110
9.3	Kapittel 3	111
9.4	Kapittel 4	111
9.5	Kapittel 5	112
9.6	Kapittel 6	112
9.7	Kapittel 7	113
9.8	Kapittel 8	114

Kapittel 1

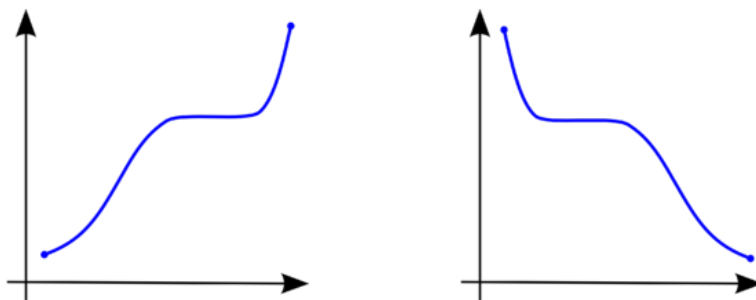
Funksjoner i én variabel

I det første kapitlet skal vi friske opp teorien for funksjoner i en variabel, se på hvordan de vokser/avtar, studere deres kritiske punkter og beskrive krumning og vendepunkter. For intervaller skal vi bruke notasjonen $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ for **lukkede** intervaller, $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ for **åpne** intervaller og $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ og $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ for **halvåpne** intervaller.

1.1 Monotoni-egenskaper og lokale ekstremalpunkter

Lokale egenskaper til en funksjon er egenskaper som observeres i små intervaller om punkter i definisjonsområdet til funksjonen. Monotoni-egenskapene til en funksjon, dvs. hvor den vokser og hvor den avtar, er en lokal egenskap, det samme gjelder krumning. Kontinuitet, deriverbarhet og maksimums- og minimumspunkter er også lokale egenskaper.

Definisjon 1.1.1. En funksjon $y = f(x)$ er (**strengt**) **voksende** på et intervall I dersom $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$) for alle $x_1 < x_2$ i intervallet. Funksjonen er (**strengt**) **avtagende** dersom $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) for alle $x_1 < x_2$ i intervallet.



Figur 1.1. To monotone grafer, voksende til høyre og avtagende til venstre.

Eksempel 1.1.1. Funksjonen $f(x) = x^2$ er strengt voksende på intervallet $[0, \infty)$, siden $x_1^2 < x_2^2$ når $x_1 < x_2$. Tilsvarende er funksjonen strengt avtagende på intervallet $(-\infty, 0]$.

Eksempel 1.1.2. Funksjonen $f(x) = x^3$ er strengt voksende overalt, siden $x_1^3 < x_2^3$ når $x_1 < x_2$.

Eksempel 1.1.3. Eksponensialfunksjonen $f(x) = e^x$, definert på hele tallinja, er strengt voksende overalt.

Monotoni kan måles ved den deriverte til funksjonen.

Teorem 1.1.2. Dersom $f'(x) > 0$ (henholdsvis $f'(x) < 0$) på et intervall, så vokser (henholdsvis avtar) $f(x)$ på intervallet.

Bevis. La $x \in I$. Vi bruker definisjonen av den deriverte av $f(x)$ i x

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Setter vi $f'(x) > 0$ og antar $h > 0$, så følger det at $f(x+h) > f(x)$ for alle $x \in I$. For $h < 0$ får vi $f(x+h) < f(x)$ for alle $x \in I$. Det følger at funksjonen er voksende på hele intervallet. \square

Eksempel 1.1.4. Vi ser på funksjonen $f(x) = x^2$. Den deriverte er gitt ved $f'(x) = 2x$, som betyr at funksjonen vokser på intervallet $[0, \infty)$ og avtar på intervallet $(-\infty, 0]$.

Eksempel 1.1.5. Betrakt funksjonen $f(x) = e^x$. Den deriverte er gitt ved $f'(x) = e^x > 0$, som betyr at funksjonen vokser overalt.

Eksempel 1.1.6. Funksjonen $f(x) = \sin x$, hvor $x \in [-\pi, \pi]$ har derivert $f'(x) = \cos x$. På intervallet $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ har vi $\cos x \geq 0$ og funksjonen vil derfor være voksende på dette intervallet.

Vi er interessert i å finne punkter der funksjonen antar sin største/minste verdi. I første omgang leter vi etter lokale maksimums- og minimumspunkter, dvs. punkter der funksjonen er større (mindre) enn eller lik alle andre punkter i nærheten. Dette trenger ikke å gi oss de største (minste) verdiene for funksjonen, som vi skal se senere.

Vi skal bruke begrepet *i nærheten av x* om punkter som er forskjellig fra x , men hvor avstanden til x er så liten som det er hensiktsmessig i det aktuelle tilfellet. Denne avstanden kan være 1 eller den kan være 0.00001, eller en enda mindre verdi. Det viktigste er at det finnes en fast avstand slik at påstanden vi kommer med er sann for alle y som ikke er lenger fra punktet x enn denne avstanden.

Et eksempel på bruk av begrepet *i nærheten av* er som følger: La $f(x)$ være en kontinuerlig funksjon, dvs. at $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ for alle a i definisjonsområdet til f . F.eks. kan vi la $f(x) = x - x^2$. For $x = 0.9$ har vi $f(0.9) = 0.9 - (0.9)^2 = 0.09 > 0$. La nå $x = 0.9 + h$ for en liten verdi for h . Da har vi at

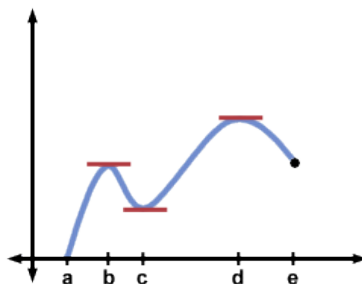
$$\begin{aligned} f(0.9 + h) &= 0.9 + h - (0.9 + h)^2 \\ &= 0.9 + h - 0.81 - 1.8h - h^2 \\ &= 0.09 - 0.8h - h^2 \end{aligned}$$

Vi ser at dersom $|h| < 0.1$ så har vi $f(0.9 + h) > 0$. Det betyr at i dette tilfellet vil *i nærheten av* bety at avstanden til 0.9 er ekte mindre enn 0.1.

Definisjon 1.1.3. Det er to typer lokale ekstremalpunkter:

- i) Funksjonen $y = f(x)$ har et **lokalt minimum** i $x = c$ dersom $f(c)$ er mindre enn eller lik $f(x)$ for alle x i et åpent intervall om $x = c$.
- ii) Funksjonen $y = f(x)$ har et **lokalt maksimum** i $x = c$ dersom $f(c)$ er større enn eller lik $f(x)$ for alle x i et åpent intervall om $x = c$.

En fellesbetegnelse på punkter hvor funksjonen har lokale maks- eller minimumspunkter er **lokale ekstremalpunkter**.



Figur 1.2. Figuren indikerer lokale maksimums- og minimumspunkter.

Eksempel 1.1.7. Funksjonen $f(x) = x^2$ definert på hele \mathbb{R} har et lokalt minimumspunkt i $x = 0$ siden $f(x) > f(0)$ for alle $x \neq 0$.

Eksempel 1.1.8. Funksjonen $f(x) = \cos x$ definert på hele \mathbb{R} har et lokalt maksimumspunkt i $x = 0$ siden $\cos x \leq \cos 0 = 1$ for alle x i nærheten av 0. Denne funksjonen er periodisk med periode 2π og vi har derfor også maksimumspunkter for $x = 2k\pi$, for alle hele tall k . Tilsvarende har vi lokale minimumspunkter for $x = \pi + 2k\pi$ for alle hele tall k , siden $\cos(\pi + 2k\pi) = \cos \pi = -1 \leq \cos x$ for alle verdier av x .

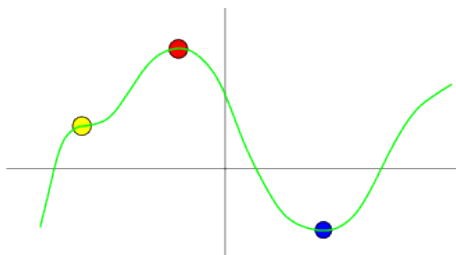
Eksempel 1.1.9. Funksjonen $f(x) = e^x$ har ingen lokale ekstremalpunkter siden dens deriverte $f'(x) = e^x > 0$ for alle x .

1.2 Kritiske punkter

Den deriverte til en funksjon $y = f(x)$ i et punkt x_0 gir oss stigningstallet til tangenten til funksjonen i punktet. I et maksimums- eller minimumspunkt for en deriverbar funksjon (en funksjon er **deriverbar** i et punkt dersom den har en derivert i punktet) vil tangenten være horisontal, dvs. tangentlinja har stigningstall 0. Det betyr at $f'(x_0) = 0$. Slike punkter er så viktige at de har fått et eget navn.

Definisjon 1.2.1. Et punkt $x = c$ i definisjonsområdet til en funksjon $f(x)$ kalles et **kritisk punkt** for funksjonen dersom $f'(c) = 0$ eller $f'(c)$ ikke eksisterer.

Merk at vi bruker betegnelsen kritisk punkt både om punkter der den deriverte er 0, og om punkter der funksjonen ikke har noen derivert, f.eks. i *knekkpunkter* på grafen. Dersom funksjonen $f(x)$ er definert på et lukket intervall $[a, b]$, inkluderer vi endepunktene $x = a$ og $x = b$ blant funksjonens kritiske punkter. Dette passer med definisjonen siden den deriverte av en funksjon, formelt sett ikke er definert i endepunktene av et lukket definisjonsområde.



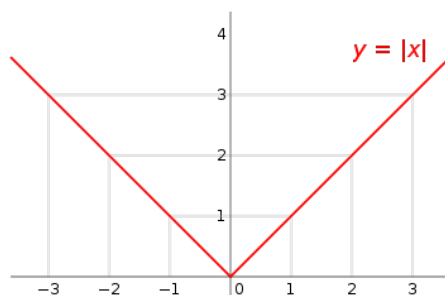
Figur 1.3. De markerte punktene viser de kritiske punktene.

Eksempel 1.2.1. Funksjonen $f(x) = |x|$ har et kritisk punkt i $x = 0$ siden $f'(0)$ ikke er definert i det punktet. Absoluttverdifunksjonen er ikke deriverbar i $x = 0$ siden grenseverdiene fra høyre og venstre side ikke er like, vi har for positive verdier av h ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = 1$$

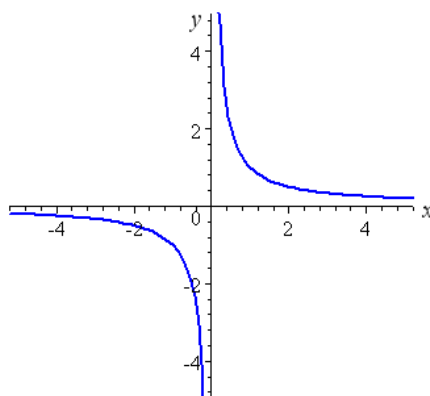
og for negative verdier av h ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = -1$$



Figur 1.4. Grafen til absoluttverdifunksjonen, $f(x) = |x|$ med et kritisk punkt i $x = 0$.

Eksempel 1.2.2. Alle potensfunksjoner $g(x) = x^n$ for $n \geq 2$ har kritisk punkt i $x = 0$ siden $f'(0) = n \cdot 0^{n-1} = 0$.



Figur 1.5. Grafen til $f(x) = \frac{1}{x}$.

Eksempel 1.2.3. Funksjonen $h(x) = \frac{1}{x}$ har **ikke** et kritisk punkt i $x = 0$ siden funksjonen ikke er definert i dette punktet.

I mange tilfeller er det sammenfall mellom ekstremalpunkter og kritiske punkter, men det er ikke alltid sant. Imidlertid er det slik at ekstremalpunkter alltid er kritiske punkter, men det er det motsatte som ikke nødvendigvis er riktig.

Teorem 1.2.2. Dersom $f(x)$ har et lokalt maksimums- eller lokalt minimumspunkt i $x = c$, så er c et kritisk punkt.

Bevis. Vi har

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \approx \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

hvor vi i det siste uttrykket lar $x = c + h$ være i nærheten av c , dvs. at h er liten. Anta at $f(x)$ har et lokalt maksimum i $x = c$. Dersom $f'(c) > 0$, så vil $f(x) > f(c)$ for $x > c$. Dette er ikke mulig siden c er et lokalt maksimumspunkt. Dersom $f'(c) < 0$, så vil $f(x) > f(c)$ for $x < c$, som på tilsvarende måte er umulig og vi har en motsetning. Samme slags argument gjelder for lokale minimumspunkter. \square

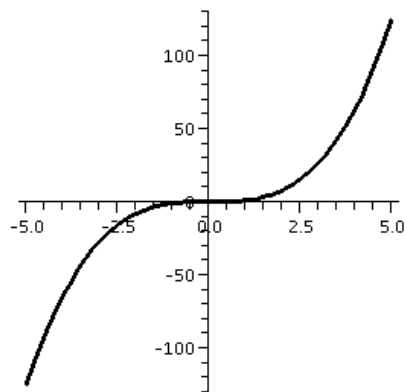
Teorem 1.2.3. Hvis $f(x)$ har et kritisk punkt i $x = c$, så er dette

- i) et lokalt minimum dersom $f'(x)$ skifter tegn fra negativ til positiv i $x = c$.
- ii) et lokalt maksimum dersom $f'(x)$ skifter tegn fra positiv til negativ i $x = c$.

Bevis. Følger nokså direkte fra definisjonen av den deriverte ved å analysere fortegnet til uttrykkene som inngår. \square

Eksempel 1.2.4. Vi ser på funksjonen $f(x) = x^2$. Den deriverte er gitt ved $f'(x) = 2x$, som betyr at funksjonen har et kritisk punkt i $x = 0$. Dette er også et lokalt minimumspunkt siden den deriverte til (x) skifter tegn fra negativt til positivt i $x = 0$.

Grunnen til at det ikke er en enetydig sammenheng mellom kritiske punkter og ekstremalpunkter, er at det finnes kritiske punkter som ikke er ekstremalpunkter. Det at den deriverte til en funksjon er 0 i et punkt, trenger ikke å bety at punktet er et maksimums- eller minimumspunkt for funksjonen. Det er fullt mulig at den deriverte til funksjonen er 0 i et punkt, samtidig med at funksjonen vokser overalt i nærheten av punktet (se eksemplet under).



Figur 1.6. Grafen til funksjonen $f(x) = x^3$.

Eksempel 1.2.5. Betrakt funksjonen $g(x) = x^3$. Den deriverte er gitt ved $g'(x) = 3x^2$, som betyr at funksjonen har et kritisk punkt for $x = 0$. Dette er imidlertid ikke noe ekstremalpunkt. Funksjonens deriverte skifter ikke tegn i dette punktet, vi har $g'(x) > 0$ for alle $x \neq 0$.

En typisk problemstilling vi møter på, dreier seg om å analysere monotoni-egenskapene og å finne lokale ekstremalpunkter for en funksjon. Det neste eksemplet illustrerer framgangsmåten, hvor fortegnsskjema er et sentralt hjelpemiddel.

Eksempel 1.2.6. Vi skal bestemme monotomi-egenskaper og lokale ekstremalpunkter for funksjonen

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 3$$

Vi regner ut den deriverte, faktoriserer og setter den lik 0;

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1) = 0$$

Vi tegner fortegnsskjema for $f'(x)$:

	$x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$12x^2$	+	0	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	0	+
$f'(x)$	-	0	-	0	+
	↘		↘	↖	↗

Hver faktor i uttrykket for den deriverte har sin egen rad og \pm -tegnene angir tegnet til faktoren i det angitte intervallet. Tegnene multipliseres sammen i raden til $f'(x)$ og i nederste rad er konklusjonen gitt, om hvor vidt funksjonen vokser eller avtar.

Det betyr at vi har et lokalt minimumspunkt for $x = 1$, at funksjonen er avtagende for $x \leq 1$ og at den er voksende for $x \geq 1$. Vi har ikke noe ekstremalpunkt for $x = 0$, selv om $f'(x) = 0$. Den deriverte skifter ikke tegn i dette punktet.

1.3 Globale ekstremalpunkter

I motsetning til de lokale egenskapene, som sier noe om funksjonen i en liten omegn om et punkt, vil de **globale egenskapene** beskrive funksjonen på hele definisjonsområdet sett under ett.

Definisjon 1.3.1. (Globale maksimums- og minimumspunkter)

- i) Funksjonen $y = f(x)$ har et **globalt minimum** i $x = c$ dersom $f(c)$ er mindre enn eller lik $f(x)$ for alle x i definisjonsområdet.
- ii) Funksjonen $y = f(x)$ har et **globalt maksimum** i $x = c$ dersom $f(c)$ er større enn eller lik $f(x)$ for alle x i definisjonsområdet.

Vi vil omtale funksjonsverdien i de globale minimums- og maksimumspunktene som funksjonens **minimums-** og **maksimumsverdier** og samlet som funksjonenes **ekstremalverdier**.

Funksjoner trenger verken å ha lokale eller globale ekstremalpunkter. Et eksempel er funksjonen $f(x) = x$ definert på hele tallinja. Den har ingen ekstremalpunkter fordi for alle punkter $x = a$ på tallinja så vil det finnes punkter x i nærheten av a slik at $f(x) > f(a)$ og andre som oppfyller $f(x) < f(a)$. Funksjonen $f(x) = x$ har heller ingen ekstremalverdier dersom definisjonsområdet er et åpent intervall (a, b) . På et lukket intervall derimot, har funksjonen $f(x) = x$ både et globalt maksimumspunkt og et globalt minimumspunkt, nemlig endepunktene i intervallet. Et åpent intervall som $(0, 1)$ inneholder ikke sine endepunkter. Vi kan finne tall i intervallet som er så nær opp til 1 som vi måtte ønske. Men uansett hvilket tall vi velger, vil det alltid finnes tall mellom det valgte tallet og 1. Alle tall i det åpne intervallet $(0, 1)$ har andre tall på begge sider. Dette er karakteristisk for åpne intervaller. I det lukkede intervallet $[0, 1]$ finnes det to tall, 0 og 1, som kjennetegnes ved at de har naboer i intervallet kun på sin ene side.

En kontinuerlig funksjon vil alltid oppnå sine ekstremalverdier dersom definisjonsområdet er et lukket intervall. Dette er innholdet i **ekstremverdi-teoremet** som vi gjengir uten bevis.

Teorem 1.3.2. En funksjon $f(x)$ som er kontinuerlig på et lukket, begrenset intervall $[a, b]$, vil oppnå sine maksimums- og minimums-verdier i intervallet.

Eksempel 1.3.1. La $f(x) = -x^2 + 4x - 3$. Vi skal finne maksimumsverdien til $f(x)$ på intervallet $[-1, 1]$.

Vi observerer at $f'(x) = -2x + 4 = 0$ når $x = 2$. Men $x = 2$ er ikke i intervallet, så dette punktet er vi ikke interessert i. Det betyr at de eneste punktene vi trenger å sjekke er endepunktene: $f(-1) = -8$ og $f(1) = 0$. Så den største verdien til $f(x)$ på $[-1, 1]$ er $f(1) = 0$.

Eksempel 1.3.2. Vi skal finne ekstremalverdiene til funksjonen $f(x) = 7 + |x - 2|$ på intervallet $1 \leq x \leq 4$. Den deriverte $f'(x)$ er aldri 0. Men den er ikke definert i punktet $x = 2$, så vi regner ut verdien her, $f(2) = 7$. For endepunktene har vi $f(1) = 8$ og $f(4) = 9$. Det minste av disse tre verdiene er $f(2) = 7$, som derfor er minimumsverdien, mens den største er $f(4) = 9$ som gir oss maksimumsverdien på intervallet $[-1, 4]$.

Eksempel 1.3.3. Av alle rektangler med areal 25, og sidekanter kortere enn 10, hvilket har den minste og hvilket har den største omkretsen?

Vi starter med å formulere problemet mer matematisk. Vi lar x være lengden på den ene sidekanten. Da vil den andre sidekanten ha lengde $\frac{25}{x}$ siden arealet skal være 25. Omkretsen blir da gitt ved funksjonen

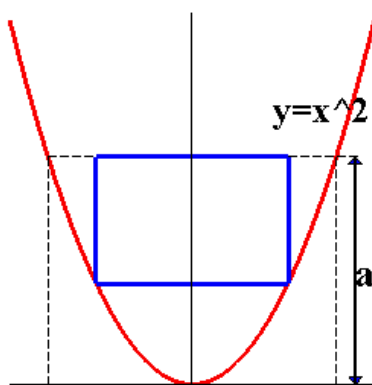
$$f(x) = 2x + 2 \cdot \frac{25}{x}$$

over intervallet $(0, 10]$. Denne funksjonen skal vi finne maksimumsverdien til. Vi deriverer og får

$$f'(x) = 2 - \frac{50}{x^2}$$

Løser vi likningen $f'(x) = 0$ får vi $x = \pm 5$. Punktet $x = -5$ er ikke med i definisjonsområdet, så det forkaster vi. Dermed står vi igjen med ett kritisk punkt, $x = 5$. Funksjonen er ikke definert i punktet $x = 0$ (rektanglet kollapser) og vi må sjekke de to kritiske punktene $x = 5$ og $x = 10$. Innsetting gir $f(5) = 20$ og $f(10) = 25$. Dette gir kandidater for maksimum og minimum. Men vi er ikke ferdige enda. Siden definisjonsområdet ikke er lukket (men halvåpent) kan vi ikke bruke ekstremalverdisetningen, og vi må sjekke hva som skjer når $x \rightarrow 0$. Det er opplagt at omkretsen vil vokse over alle grenser når den ene sidekanten blir veldig liten, og den andre blir veldig stor. Derfor vil ikke $f(10) = 25$ være noe globalt maksimum, men $f(5) = 20$ er fortsatt minimumsverdien.

Eksempel 1.3.4. Vi skal finne det største rektangelet vi kan legge inne grafen til parabelen $y = x^2$ når y skal være mindre enn en fast verdi a .



Figur 1.7. Rektangel i en parabel.

La $A(x)$ være arealet av rektangelet med grunnlinje $2x$ (begge sider av y -aksen). Høyden i rektangelet vil være $a - x^2$. Det gir areal $A(x) = 2x(a - x^2) = 2xa - 2x^3$

hvor x ligger i intervallet $[0, \sqrt{a}]$. De kritiske punktene vil være endepunktene og punktene der $A'(x) = 0$. Den deriverte av $A(x)$ er gitt ved

$$A'(x) = 2a - 6x^2$$

Setter vi denne lik 0 får vi $x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}$. Vi forkaster den negative løsningen siden den ikke er i definisjonsområdet. Innsetting gir $A(0) = A(\sqrt{a}) = 0$ og $A(\sqrt{\frac{a}{3}}) = (\frac{4}{9})\sqrt{3}a^{\frac{3}{2}}$. Det gir minimumsareal (selvfølgelig) 0 og maksimumsareal $(\frac{4}{9})\sqrt{3}a^{\frac{3}{2}}$.

Eksempel 1.3.5. Vi ser på funksjonen

$$f(x) = x^2e^{-x} \quad -1 \leq x \leq 3$$

For å finne ut hvor funksjonen vokser, hvor den avtar og hvor den har sine ekstremalpunkter, må vi se på dens deriverte. I dette tilfellet får vi

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$$

Denne informasjonen bruker vi til å tegne et fortegnsskjema for $f'(x)$:

	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$2 < x < 3$	3
x		-	0	+	+	+	
$2-x$		+	+	+	0	-	
e^{-x}		+	+	+	+	+	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
	(↘)	↗	(↘)
$f(x)$	e		0		$\frac{4}{e^2}$		$\frac{9}{e^3}$

Skjemaet viser at funksjonen avtar på intervallene $(-1, 0)$ og $(2, 3)$ og vokser på intervallet $(0, 2)$. Den har lokale maksimumspunkter i $x = -1$ og i $x = 2$, og lokale minimumspunkter for $x = 0$ og for $x = 3$. For å finne ut hvilke punkter som gir oss de globale ekstremalverdiene regner vi ut funksjonsverdien i de lokale ekstremalpunktene, og i tillegg i endepunktene til det lukkede intervallet. Verdiene står i nederste linje. Av disse ser vi at $x = -1$ gir den største verdien, altså et globalt maksimumspunkt og $x = 0$ gir minste verdi og dermed svarer til et globalt minimumspunkt.

1.4 Krumning og vendepunkter

Neste skritt er å studere funksjonenes krumningsegenskaper.

Definisjon 1.4.1. En deriverbar funksjon $y = f(x)$ **krummer opp** (resp. **ned**) i et intervall (a, b) dersom $f'(x)$ er voksende (resp. avtagende) i intervallet.

Krumning innebærer at stigningstallet til funksjonen endrer seg. Krumning oppover betyr at funksjonen blir brattere, som betyr at stigningstallet øker. Stigningstallet til funksjonen er gitt ved den deriverte, så økende stigningstall betyr at den deriverte av den deriverte er positiv. Den deriverte til den deriverte til en funksjon kalles den dobbelt-deriverte og vi skriver $f''(x)$.

Teorem 1.4.2. La $f(x)$ være to ganger deriverbar på et intervall I , dvs. at den deriverte $f'(x)$ også er deriverbar.

i) Dersom $f''(x) > 0$ på I , så krummer grafen oppover.

ii) Dersom $f''(x) < 0$ på I , så krummer grafen nedover.

Bevis. Bruk Teorem 1.1.2 på den deriverte. □

Definisjon 1.4.3. Et punkt $x = c$ der funksjonen $f(x)$ skifter krumning fra opp til ned eller motsatt, kalles et **vendepunkt** for f .

På samme måte som at ekstremalpunkter finnes der den deriverte skifter tegn, finner vi vendepunkter der den dobbelt-deriverte skifter tegn.

Teorem 1.4.4. Dersom $x = c$ er et vendepunkt for $f(x)$, og $f''(c)$ er veldefinert, så er $f''(c) = 0$.

Bevis. Et vendepunkt er et ekstremalpunkt for den deriverte, og Teorem 1.2.2 gir at $x = c$ er et kritisk punkt for $f'(x)$. Siden den deriverte av $f'(x)$ eksisterer i $x = c$, så følger det at $f''(c) = 0$. □

Eksempel 1.4.1. Funksjonen $f(x) = x^3$ har et vendepunkt i $x = 0$ siden $f''(0) = 0$ og den dobbeltderiverte $f''(x) = 6x$ skifter tegn i $x = 0$.

Merk at vi kan ha $f''(c) = 0$ uten at $x = c$ er et vendepunkt, slik som tilfellet er for funksjonen $f(x) = x^4$ i punktet $x = 0$. Den dobbelt-deriverte er gitt ved $f''(x) = 12x^2$. Den har et nullpunkt for $x = 0$, men $f''(x) > 0$ for både positive og negative verdier for x . Den dobbelt-deriverte $f''(x)$ skifter derfor ikke tegn i dette punktet, og $x = 0$ er ikke noe vendepunkt.

Eksempel 1.4.2. Vi skal studere krumningsegenskapene til funksjonen

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 3$$

Vi regner ut den deriverte og den dobbelt-deriverte og finner deres nullpunkter. Dette bruker vi til å finne faktoriseringer:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1)$$

$$f''(x) = 36x^2 - 24x = 12x(3x - 2)$$

For å finne monotoniegenskaper tegner vi fortegnsskjema for den deriverte:

	$x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$x > 1$
$12x^2$	$+$	0	$+$	0	$+$
$x - 1$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
	\searrow		\searrow	\smile	\nearrow

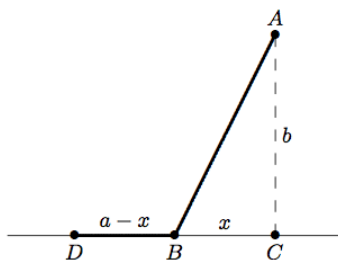
Vi ser at $x = 0$ er et kritisk punkt, men ikke noe ekstremalpunkt.

For å finne krumningsegenskapene tegner vi fortegnsskjema for den dobbel-deriverte:

	$x < 0$	0	$0 < x < \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$x > \frac{2}{3}$
$12x$	-	0	+	+	+
$3x - 2$	-	-	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	0	+
	opp	vendepunkt	ned	vendepunkt	opp

Konklusjonen står i nederste linje.

Eksempel 1.4.3. Anta at vi skal gå til et punkt A ute i sanden og at vi befinner oss ved punktet D på veien illustrert ved linja DC (se figuren). Veien er rett og b gir avstanden fra A til det nærmeste punktet C på veien. Avstanden fra punktet D til punktet C kaller vi a . Anta at vi kan holde farten v langs veien og $w < v$ ute i sanden. Hvor langt skal vi gå langs veien før vi svinger ut i sanden for å bruke kortest mulig tid mellom D og A ?



Vi kaller punktet hvor vi svinger ut i sanden for B og lar avstanden fra B til C være x . Det betyr at vi beveger oss en avstand $a - x$ langs veien, og ved Pythagoras vil avstanden fra B til A være $\sqrt{x^2 + b^2}$. Tid er gitt ved avstand delt med fart, og vi får samlet tid gitt ved funksjonen

$$f(x) = \frac{a - x}{v} + \frac{\sqrt{x^2 + b^2}}{w}$$

Vi skal finne minimum av $f(x)$ når x ligger mellom 0 og a . Vi setter $f'(x) = 0$ og får

$$0 = f'(x) = -\frac{1}{v} + \frac{x}{w\sqrt{x^2 + b^2}}$$

Det gir

$$w\sqrt{x^2 + b^2} = vx$$

Vi kvadrerer begge sider og får

$$w^2(x^2 + b^2) = v^2x^2$$

som ved litt enkel algebra gir

$$x = \frac{wb}{\sqrt{v^2 - w^2}}$$

Dette gir oss det kritiske punktet vi leter etter og (nokså opplagt) minimumspunktet.

Vi merker oss at a ikke inngår i dette uttrykket, noe som betyr at vi alltid skal gå til det samme punktet, uavhengig av utgangspunkt, men under en forutsetning, at det kritiske punktet ligger inne i intervallet $[0, a]$. Dersom dette ikke er tilfelle har vi ikke noe kritisk punkt inne i intervallet, og da vil minimumsverdien bli å finne i et av endepunktene. De to verdiene der er gitt ved

$$f(0) = \frac{a}{v} + \frac{b}{w}$$

$$f(a) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{w}$$

Nå har vi

$$\begin{aligned} f(a)^2 - f(0)^2 &= \frac{a^2}{v^2} + \frac{2ab}{vw} + \frac{b^2}{w^2} - \frac{a^2 + b^2}{w^2} \\ &= \frac{a^2}{v^2} + \frac{2ab}{vw} - \frac{a^2}{w^2} \\ &= a^2 \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{w^2} \right) + \frac{2ab}{vw} \\ &= \frac{a^2(w^2 - v^2) - 2abvw}{v^2w^2} \end{aligned}$$

Siden $w < v$ vil dette uttrykket alltid være negativt, noe som betyr at $f(0) > f(a)$ og minimum vil være i $x = a$. Oppsummert, vi skal alltid gå langs veien til et punkt som ligger i avstand $\frac{wb}{\sqrt{v^2 - w^2}}$ fra C , og deretter gjennom sanden. Dersom vi starter nærmere C enn denne avstanden skal vi gå rett ut gjennom sanden.

Oppgaver til kapittel 1

Oppgave 1. I de følgende oppgavene, i) finn alle kritiske punkter til $f(x)$, ii) beskriv monotoni-egenskapene til funksjonene ved å se på fortegnet til $f'(x)$, iii) finn lokale ekstremalpunkter, iv) bestem de intervallene der funksjonene krummer, henholdsvis opp og ned, v) finn funksjonenes vendepunkter

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$

c) $f(x) = 2 + (x - 1)^4$

d) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$

e) $f(x) = 2x + \cos x$

Oppgave 2. I de følgende oppgavene, i) finn alle kritiske punkter til $f(x)$, ii) beskriv monotoni-egenskapene til funksjonene ved å se på fortegnet til $f'(x)$, iii) finn lokale ekstremalpunkter, iv) bestem de intervallene der funksjonene krummer, henholdsvis opp og ned, v) finn funksjonenes vendepunkter, vi) finn globale maks og min

a) $f(x) = x^3 - 4x, x \in [-1, 2]$

b) $f(x) = \frac{(x^2-4)}{(x^2-9)}, x \in [0, 2]$

c) $f(x) = x - \sin x, x \in [0, 2\pi]$

d) $f(x) = \sin^2 x, x \in [-\pi, \pi]$

Oppgave 3. La funksjonen f være definert for alle reelle tall x ved

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}(x-a)^2}$$

hvor a er en konstant.

- a) Avgjør hvor f vokser og hvor den avtar. Finn eventuelle ekstremalpunkter for f .
- b) Finn eventuelle vendepunkter for f og undersøk hvor grafen til f krummer opp og hvor den krummer ned.

Oppgave 4. Funksjonen $f(t)$ er gitt ved

$$f(t) = t \ln t - t, \quad \frac{1}{4} \leq t \leq 3$$

Avgjør hvor funksjonen f vokser og hvor den avtar og finn ut hvor i definisjonsområdet den antar sin største/minste verdi.

Oppgave 5. Finn dimensjonene til rektangelet med størst areal når omkretsen er gitt lik 100.

Oppgave 6. Du har 60 meter gjerde til rådighet og skal bruke det til å gjerde inn et rektangel langs med en rett fjellside (hvor du ikke trenger å sette opp gjerde). Hva er det største arealet du kan gjerde inn?

Oppgave 7. Et budfirma har følgende begrensning på hvilke rektangulære pakker de kan levere: Summen av lengden og omkretsen må ikke overstige 108cm. Anta at du skal sende en pakke som er kvadratisk i den ene enden. Hva er det maksimale volumet til en akseptabel (for budfirmaet) pakke?

Oppgave 8. Et firma produserer små notisblokker med festlige motiv på forsiden. Dersom prisen for hver blokk er 10 kroner vil firmaet ikke få solgt noen, men for hver krone de reduserer prisen vil de kunne selge 500 blokker. De faste kostnadene ved produksjonen (uavhengig av antall) er kr. 3000, og produksjonsprisen pr. blokk er 2 kroner. Hva bør prisen være for at firmaet skal tjene mest mulig på blokkene?

Kapittel 2

Integrasjon

Matematiske modeller som beskriver naturvitenskapelige fenomener er i mange tilfeller ensbetydende med å gi en eller flere differensiallikninger. For å løse differensiallikninger er utfordringen veldig ofte å finne funksjoner med en gitt derivert, dvs. det vi kaller anti-derivasjon. Et eksempel på dette er hastighet og akselerasjon. Akselerasjon er definert som endring av hastighet, og måles med den deriverte av hastighetsfunksjonen. Akselerasjonen til et legeme er styrt av kraftlover som vi tenker oss at vi kjenner fullt ut, og oppgaven blir å finne en hastighetsfunksjon med en derivert funksjon som passer inn i den aktuelle kraftloven. Dette kalles å anti-derivere funksjonen eller ubestemt integrasjon.

I dette kapitlet skal vi studere **bestemte integraler**. Bestemte integraler beregnes ved å evaluere ubestemte integraler over et intervall slik at svaret blir et tall og ikke en funksjon. Dette tallet skal vi tolke som arealet mellom grafen og x -aksen, eller i mer generelle tilfeller som den akkumulerte verdien for en funksjon over et tidsrom, strekning eller annet valg av argumentet x (eller t). Det bestemte integralet til en funksjon som beskriver et legemes akselerasjon som funksjon av tiden, vil gi oss hastighetsendringen til legemet i det aktuelle intervallet.

Et svært viktig resultatet er fundamentalteoremet (introdusert av Newton og Leibniz) som knytter sammen bestemt og ubestemt integrasjon, eller derivasjon og integrasjon.

Når vi har gitt en funksjon, kan vi alltid regne ut dens deriverte, men det er ikke nødvendigvis mulig å finne et enkelt uttrykk for den anti-deriverte til funksjonen. Vi skal se på hvordan vi kan bruke numeriske beregninger til å bestemme verdien av et bestemt integral når vi ikke kan finne en anti-derivert til den aktuelle funksjonen. Videre skal vi ta for oss noen ulike fysiske tolkninger av det bestemte integral.

Det er ikke alltid at definisjonsområdet til en funksjon er et lukket intervall og da må vi gjøre noen modifikasjoner mht. definisjonen av det bestemte integralet. Det er heller ikke alltid slik at funksjonen vi skal integrere er begrenset, men vi kan likevel regne ut et areal under grafen. Dette vil involvere bruk av grenseverdier.

2.1 Ubestemt integrasjon

Det er enkelt å vise at den deriverte av en konstant er 0, men det motsatte er også tilfelle.

Lemma 2.1.1. *Dersom en funksjon $f(x)$ oppfyller $f'(x) = 0$ for alle x i definisjonsområdet, så er funksjonen konstant, $f(x) = C$.*

Bevis. Anta for en motsigelse at funksjonen f ikke er konstant, og at $a \neq b$ er to punkter slik at $f(a) \neq f(b)$. Betrakt funksjonen

$$h(x) = f(x)(b - a) - x(f(b) - f(a))$$

Vi har $h(a) = h(b)$. Dersom $h'(x) \neq 0$ overalt i (a, b) , så må h ha sine ekstremalpunkter i endepunktene. Siden verdien av funksjonen er lik i endepunktene, betyr det at funksjonen er konstant på $[a, b]$, noe som betyr at for alle punkter $c \in [a, b]$ så er $h'(c) = 0$, eller $f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$. Men det betyr at $f'(c) \neq 0$, og vi har vist lemmaet. \square

Teorem 2.1.2. *Dersom $F_1(x)$ og $F_2(x)$ begge er anti-deriverte til samme funksjon på et intervall (a, b) , så er de like på en konstant nær, dvs. $F_1(x) - F_2(x) = C$.*

Bevis. Vi vet fra lemmaet over at dersom funksjonen f oppfyller $f'(x) = 0$ for alle x , så er funksjonen konstant. Lar vi $f(x) = F_1(x) - F_2(x)$ og bruker denne kunnskapen, så følger resultatet. \square

Dette er grunnen til at vi alltid må legge til en integrasjonskonstant når vi anti-deriverer.

Definisjon 2.1.3. *La $f(x)$ være en funksjon. Familien av alle anti-deriverte til $f(x)$ kalles det **ubestemte integralet** til $f(x)$. La $F(x)$ være en slik anti-derivert. Vi skriver*

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

hvor C er en vilkårlig konstant.

Eksempel 2.1.1. *Det ubestemte integralet av potensfunksjonen er gitt ved*

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

Eksempel 2.1.2. *Det ubestemte integralet av funksjonen $f(x) = \ln x$ er gitt ved*

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

siden den deriverte av $x \ln x - x + C$ med hensyn på x ved produktregelen er $\ln x + x \frac{1}{x} - 1 = \ln x$.

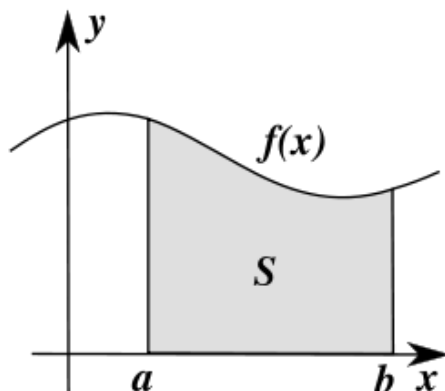
2.2 Bestemt integrasjon

Vi starter med å definere det bestemte integralet av en positiv funksjon over et intervall.

Definisjon 2.2.1. La $y = f(x)$ være en positiv funksjon definert på et intervall $[a, b]$. Da er

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

definert som arealet over intervallet $[a, b]$ mellom x -aksen og grafen til f .



Figur 2.1. Bestemt integral tolket som areal.

Man kan vise at følgende generelle regler gjelder for bestemte integral:

Linearitet:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Additivitet:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Degenerert areal:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

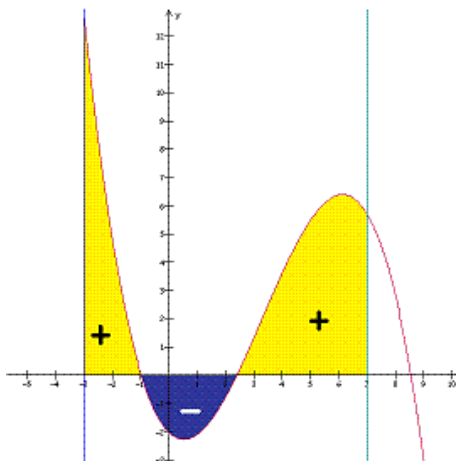
De to siste er nokså opplagte ut i fra definisjonen, mens den første følger fra et tilsvarende resultat for ubestemte integral. I tillegg til disse tre definerer vi et bestemt integral beregnet i motsatt retning,

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

For å beregne det bestemte integralet til en vilkårlig funksjon (ikke kun positiv), deler vi opp intervallet i delintervaller slik at funksjonen enten er positiv eller negativ på delintervallene. For en negativ funksjon $g(x) < 0$ setter vi

$$\int_a^b g(x)dx = - \int_a^b (-g(x))dx$$

hvor $-g(x)$ nå er en positiv funksjon.



Figur 2.2. Integralet er summen av arealene med positivt tegn over x -aksen og negativt tegn under.

Eksempel 2.2.1. Vi skal beregne det bestemte integralet

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx$$

Vi deler opp integralet i to deler

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$$

Vi vet at $\sin x = -\sin(x - \pi)$. Det betyr at for hver x mellom π og 2π så finnes en $u = x - \pi$ mellom 0 og π hvor funksjonen $\sin x$ har akkurat samme verdi, men med motsatt fortegn. Dermed vil arealet mellom grafen og x -aksen for de to delene være nøyaktig likt, men med motsatt fortegn. Til sammen vil derfor integralet bli nullt ut og vi har

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$

2.3 Fundamentalteoremet

Vi sier at en funksjon er **integrerbar** over et intervall $I = [a, b]$ dersom vi kan beregne det bestemte integralet $\int_a^b f(x)dx$ ved hjelp av reglene gitt i forrige seksjon. De aller fleste funksjonene vi skal ha med å gjøre vil være integrerbare. Spesielt er alle kontinuerlig funksjoner integrerbare.

Neste skritt er å finne metoder for å beregne bestemte integral. Det viktigste hjelpemiddelet vil være det såkalte fundamentalteoremet for differensial- og integralregningen. Dette resultatet setter i system det vi har sagt så langt om derivasjon og anti-derivasjon og gir oss linken mellom ubestemt og bestemt integrasjon.

Teorem 2.3.1. La $f(x)$ være en integrerbar funksjon på et intervall $[a, b]$, og la $F(x)$ være en anti-derivert til $f(x)$. Da har vi

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

og

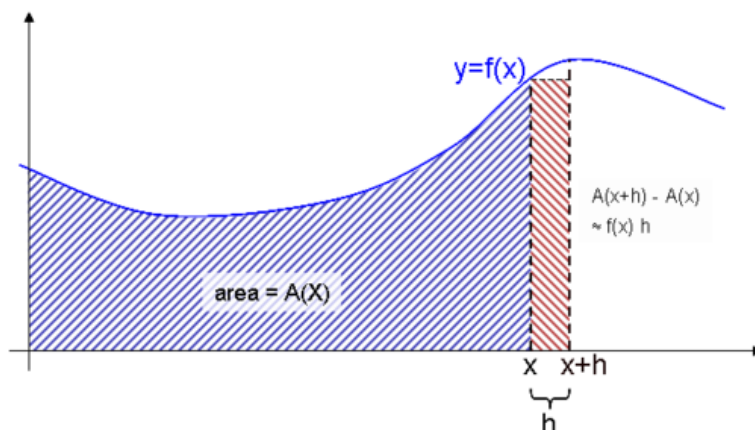
$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Merk: Dette er den mest fundamentale egenskapen ved integralet og faktisk den egenskapen som er grunnlaget for hele differensial- og integralregningen.

Merk at vi også bruker notasjonen

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Begge deler vil bli brukt i det som følger.



Figur 2.3. Fundamentalteoremet for differensial- og integralregningen.

Figuren illustrerer fundamentalteoremet. Vi lar $A(x)$ være arealet under grafen fra $x = 0$ og ut til en vilkårlig x . Den relative tilveksten fra x til $x + h$ er gitt ved (se figur)

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx \frac{f(x) \cdot h}{h} = f(x)$$

hvor uttrykkene blir like når $h \rightarrow 0$. Den deriverte av det bestemte integralet som arealfunksjon er altså funksjonen selv.

En praktisk nytte av fundamentalteoremet er at vi kan beregne areal ved å anti-derivere funksjoner. Ved å kombinere fundamentalteoremet med regnereglerne for ubestemte integral får vi følgende liste over spesielle integrasjonsregler for bestemt integrasjon:

$$\int_a^b x^k dx = \frac{1}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1})$$

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}$$

$$\int_a^b e^{kx} dx = \frac{1}{k}(e^{kb} - e^{ka})$$

$$\int_a^b \sin x dx = -\cos b + \cos a$$

$$\int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a$$

Eksempel 2.3.1. Vi kan bruke dette til å beregne integralet av $\sin x$ over intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$ som vi har sett på tidligere.

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos(2\pi) + \cos 0 = -1 + 1 = 0$$

I tillegg til de spesielle integrasjonsreglene har vi noen generelle integrasjonsteknikker, substitusjon og delvis integrasjon. Disse er helt analoge med tilsvarende teknikker for å regne ut ubestemte integral.

Substitusjon:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a))$$

hvor $F(x)$ er en anti-derivert til $f(x)$, og delvis integrasjon

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Eksempel 2.3.2. Vi skal beregne det bestemte integralet

$$\int_0^\pi x \cos x dx$$

Vi bruker delvis integrasjon

$$\int_0^\pi x \cos x dx = [u \cdot v]_0^\pi - \int_0^\pi u' \cdot v dx$$

$u = x$	$v' = \cos x$
$u' = 1$	$v = \sin x$

$$= [x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot \sin x dx$$

$$= [x \sin x + \cos x]_0^\pi$$

$$= \pi \sin \pi + \cos \pi - 0 - \cos 0 = -2$$

Eksempel 2.3.3. Vi skal beregne det bestemte integralet

$$\int_0^2 x e^{x^2} dx$$

Vi bruker substitusjon

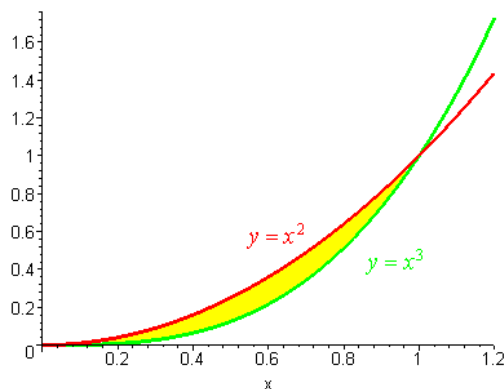
$$\int_0^2 x e^{x^2} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} e^{x^2} 2x dx$$

$\begin{aligned} u &= x^2 & du &= 2x dx \\ x = 0 \text{ gir } u &= 0 & x = 2 \text{ gir } u &= 4 \end{aligned}$

$$\begin{aligned} &= \int_0^4 \frac{1}{2} e^u du \\ &= \left[\frac{1}{2} e^u \right]_0^4 = \frac{1}{2} (e^4 - 1) \end{aligned}$$

Vi kan bruke det bestemte integralet til å beregne arealet mellom to kurver $y = f(x)$ og $y = g(x)$, der $f(x) \geq g(x)$ på hele intervallet $[a, b]$:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = [\text{Arealet mellom } f \text{ og } g]$$



Figur 2.4. Arealet mellom grafene til $y = x^2$ og $y = x^3$.

Eksempel 2.3.4.

$$\int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Eksempel 2.3.5.

$$\int_0^1 (x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}}) dx = \left[\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

Det er ikke tilfeldig at de to siste eksemplene gir samme svar. Hvorfor?

2.4 Riemannsummer

Vi skal se på en måte å beregne et areal under grafen til en funksjon og som også kan være med på å illustrere fundamentalteoremet. Vi tenker oss at vi deler intervallet $[a, b]$ i delintervaller med delingspunkter (kalles ofte en **partisjon** av intervallet)

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$

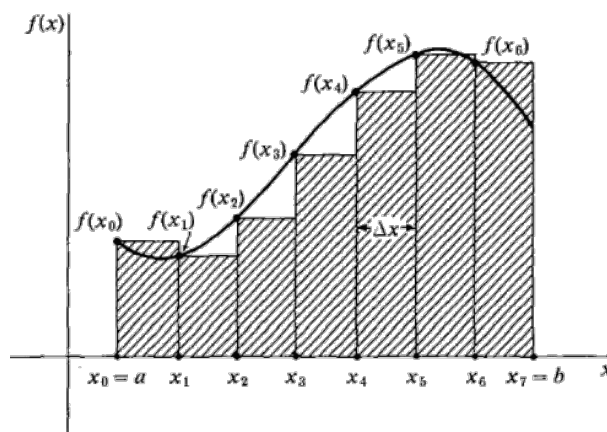
og at vi velger ut et punkt x_i i hvert delintervall, altså $x_i \in [a_i, a_{i+1}]$. Da vil summen (som vi kaller en Riemannsum, etter den tyske matematikeren Bernhard Riemann)

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(a_{i+1} - a_i)$$

være en god approksimasjon til integralet $\int_a^b f(x)dx$, og bedre jo flere delingspunkter vi velger. Vi sier at vi approksimerer funksjonen ved hjelp av **trappfunksjoner**. Trappfunksjoner er funksjoner som er stykkvis konstante og derfor ser litt ut som trappetrinn. Fordelen med å bruke trappfunksjoner er at det er enkelt å regne ut arealet under grafen. Samtidig kan vi lage dem på en slik måte at når vi gjør en finere og finere oppdeling, dvs. at trinnene blir flere og flere og smalere og smalere, så vil grenseverdien gi oss det arealet vi egentlig vil beregne. Vi kan faktisk i mange tilfeller definere

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(a_{i+1} - a_i)$$

Vi skal i alle eksempler holde oss til uniforme oppdelinger, dvs. der $a_{i+1} - a_i = \Delta x$ er den samme for alle i .



Figur 2.5. Trappfunksjon som approksimerer en funksjon, med x_i som venstre endepunkt i hvert delintervall.

I noen tilfeller kan vi bruke trappfunksjoner direkte til å beregne et bestemt integral, men ofte vil dette involvere veldig mye regning. For en datamaskin er ikke mye regning noe problem og gode numeriske tilnærminger til et bestemt integral kan derfor lett gjennomføres med datamaskiner.

I det neste eksempelet skal vi beregne arealet av en trekant, med grunnlinje g og høyde h . For enkelthet skyld lar vi trekanten være rettvinklet. En vilkårlig trekant kan alltid deles opp i rettvinklede trekanter og ved å summere areal kan vi lett generalisere formelen til å gjelde for alle trekanter.

Eksempel 2.4.1. Vi lar trekanten ligge med den rette vinkelen inn mot x - og y -aksen. Grunnlinjen vil da ligge langs x -aksen fra 0 til g , og høyden opp til hypotenusen fra et punkt x på grunnlinjen vil være gitt ved $y = \frac{h}{g}(g - x)$. Dette

er akkurat likningen til en rett linje som går gjennom punktene $(g, 0)$ og $(0, h)$.
 Det betyr at vi må beregne det bestemte integralet

$$\int_0^g \frac{h}{g}(g-x)dx$$

Vi deler opp grunnlinjen i n like store deler, med $\Delta x = \frac{g}{n}$:

$$0 < \frac{g}{n} < \frac{2g}{n} < \frac{3g}{n} < \dots < \frac{(n-1)g}{n} < \frac{ng}{n} = g$$

Vi skal beregne

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

med x_i som høyre endepunkt i delintervallene, dvs. $x_i = \frac{ig}{n}$ og med $f(x) = \frac{h}{g}(g-x)$. Dette gir oss arealet under trappefunksjonen gitt ved

$$\begin{aligned} & \frac{h}{g}\left(g - \frac{g}{n}\right) \cdot \frac{g}{n} + \frac{h}{g}\left(g - \frac{2g}{n}\right) \cdot \frac{g}{n} + \dots + \frac{h}{g}\left(g - \frac{(n-1)g}{n}\right) \cdot \frac{g}{n} \\ &= \frac{hg}{g^2 n} \left((n-1)g - \frac{g}{n}(1+2+\dots+(n-1)) \right) \\ &= \frac{gh}{n} \left(n-1 - \frac{1}{n} \frac{1}{2} n(n-1) \right) \\ &= \frac{gh}{n} \left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{gh}{2} - \frac{gh}{2n} \rightarrow \frac{gh}{2} \quad \text{når } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

dvs. arealet er gitt ved $\frac{gh}{2}$, som forventet.

I det neste eksemplet skal vi bruke summeformelen

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Eksempel 2.4.2. Vi skal beregne

$$\int_0^1 x^2 dx$$

ved hjelp av Riemannsummer. Partisjon av enhetsintervallet, med $\Delta x = \frac{1}{n}$:

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \frac{3}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1$$

Vi skal beregne

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

med x_i som høyre endepunkt i delintervallene, dvs. $x_i = \frac{i}{n}$ og $f(x) = x^2$. Dette gir oss arealet under trappefunksjonen gitt ved

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n)^2) \\ &= \frac{1}{n^3} \frac{(n+1)n(2n+1)}{6} \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \rightarrow \frac{1}{3} \quad \text{når } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

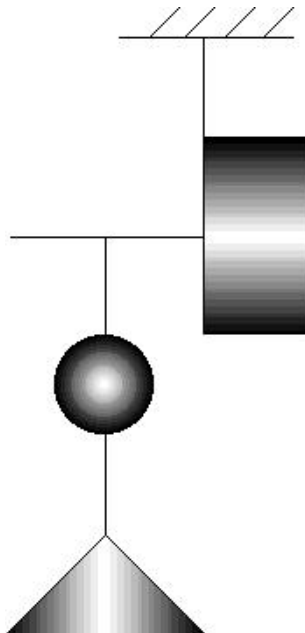
dvs.

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

2.5 Archimedes beregning av volumet av en kule

Selv om differential- og integralregningen er av nyere dato, bare 3-400 år gammel, var man inne på mange av de samme tankene i det gamle Hellas, for mer enn 2000 år siden. Ideen med trappefunksjoner, som ligger til grunn for Riemanns summene var ikke ukjent for Archimedes, og han brukte et tilsvarende prinsipp for å utlede formelen for volumet av en kule.

Archimedes stilte opp et praktisk eksperiment:



Figur 2.6. Illustrasjon av Archimedes oppsett for utregning av volumet av en kule.

Archimedes oppsett er som følger: Alle legemene som inngår har samme tetthet, satt til 1. I opphenget henger det en tverrgående, masseløs stang. På høyre side henger en sylinder med radius a i grunnflaten og høyde a . Sylindren henger på høykant. På venstre side, i avstand a henger to legemer, en kule med radius $\frac{a}{2}$ og en kjele med høyde og radius i grunnflaten, begge lik a .

Dersom systemet er i balanse er dette nok til å beregne volumet av kula.

Tyngdepunktet til sylindren har armlengde $\frac{a}{2}$, dvs. et moment på $\pi a^2 \cdot a \cdot \frac{a}{2}$. Armen på venstre side har lengde a og momentet er $a \cdot (V + \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot a)$, der V er volumet av kula. Dersom systemet er i balanse gir dette $V = \frac{4}{3}\pi(\frac{a}{2})^3$, som er volumet av kula slik vi kjenner det.

Så det gjenstår å vise at systemet er i balanse. Vi skal sammenlikne *tynne* skiver på de to figurene, av tykkelse dx . Størrelse dx er en slags grenseverdi for Δx , når denne blir mindre og mindre. Vi snakker om *uendelig tynne* skiver. Disse skivene har ikke noen synlig tykkelse, men når vi legger uendelig mange av dem oppå hverandre, får vi likevel noe med et ordentlig volum.

La $0 \leq x \leq a$. På høyre side har vi en skive i avstand x , som gir et moment på $x \cdot \pi a^2 dx$. På venstre side er det litt mer regning. Kjeglen måler vi ovenifra, slik at skiva ved dybde x gir et moment på $a \cdot \pi x^2 dx$. Kula deler vi også ovenifra, ved Pythagoras blir radius i skiva $\sqrt{(\frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{2} - x)^2} = \sqrt{ax - x^2}$, dvs. et bidrag til momentet på $a \cdot \pi(ax - x^2)dx$. Dette er i balanse siden

$$\pi a^2 x dx = a \cdot \pi x^2 dx + a \cdot \pi(ax - x^2)dx$$

På denne finurlige måten klarte altså Archimedes for over 2000 år siden å regne seg fram til formelen for volumet av en kule.

2.6 Trapesmetoden og Simpsons metode

Vi fortsetter med å se på det bestemte integralet, spesielt på hvordan vi kan bruke numeriske beregninger til å bestemme verdien når vi ikke nødvendigvis kan finne en anti-derivert.

Vi skal gi to metoder for å gjøre slike numeriske tilnærminger av et bestemt integral. Den første er **trapesmetoden** (tilnærminger med trapeser eller lineær approksimasjon). Vi deler intervallet $I = [a, b]$ i n like store deler

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$

Da har vi følgende formel,

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\frac{f(a_0)}{2} + f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_{n-1}) + \frac{f(a_n)}{2}\right) \cdot \Delta x + E_T$$

der E_T er et restledd som gir avviket i tilnærmingen, dvs. det som mangler for at summen på høyresiden skal være lik integralet på venstresiden.

Teorem 2.6.1. *Anta at $f''(x)$ eksisterer og er kontinuertlig på intervallet $[a, b]$ og at $|f''(x)|$ har maksimumsverdi K på intervallet. Da er feilen E_T i trapesmetoden begrenset ved*

$$|E_T| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

Det er et viktig poeng ved dette restleddet. Siden nevneren i uttrykket er proporsjonalt med n^2 , så vil en dobling av antall punkter i tilnærmingen gi en feil som er rundt en fjerdedel. Tredobling av antall punkter vil gi en feil som er rundt en ni-del osv. Det betyr at jo finere oppdeling vi har, dvs. jo flere delingspunkter, jo bedre blir approksimasjonen.

Trapesmetoder baserer seg på at vi tilnærmer integranden med stykkvis lineære funksjoner, og så regner ut integralet av disse funksjonene i stedet for den originale funksjonen. Dersom integranden er en lineær funksjon i utgangspunktet burde den selv være sin egen beste approksimasjon, og trapesmetoden burde gi oss et eksakt svar.

Eksempel 2.6.1. Vi skal bruke trapesmetoden på integralet $\int_0^1 x dx$ med n delingspunkter. Det gir

$$\begin{aligned} \int_0^1 x dx &\approx \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} + \frac{1}{2} \cdot 1\right) \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}(n-1)n \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

som er det samme som vi ville fått ved å finne en anti-derivert og så sette inn.

Eksempel 2.6.2. Vi skal estimere integralet $\int_0^2 \sqrt{1+x^4} dx$ ved trapesmetoden med fire like store delintervaller. Vi har $\Delta x = 0.5$ og derfor $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1.5$ og $x_4 = 2$. Det gir

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{1+x^4} dx &\approx \left(\frac{1}{2} \sqrt{1+0^4} + \sqrt{1+0.5^4} + \sqrt{1+1^4} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{1+1.5^4} + \frac{1}{2} \sqrt{1+2^4}\right) \cdot 0.5 \\ &= \left(\frac{1}{2} + \sqrt{1.0625} + \sqrt{2} + \sqrt{6.0625} + \frac{1}{2} \sqrt{17}\right) \cdot 0.5 \\ &\approx 3.73 \end{aligned}$$

Setter vi $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ får vi $f'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$ og $f''(x) = \frac{6x^2+2x^6}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}$. Ved å derivere enda en gang er det relativt enkelt å se at den dobbelt-deriverte har sitt maksimum for $x = 1$ og at vi har $|f''(x)| < 3$. Det gir $|E_T| < \frac{1}{8} = 0.125$. Det betyr at

$$3.73 - 0.125 \leq \int_0^2 \sqrt{1+x^4} dx \leq 3.73 + 0.125$$

Eksempel 2.6.3. Vi skal estimere integralet $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ ved trapesmetoden med fire like store delintervaller. Vi har $\Delta x = \frac{1}{4}$ og derfor $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$ og $x_4 = 1$. Det gir

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx &\approx \left(\frac{1}{2} \frac{1}{1+0^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{4})^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1+(\frac{3}{4})^2} + \frac{1}{1+1^2}\right) \cdot \frac{1}{4} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} \\ &\approx 0.7819 \end{aligned}$$

I dette tilfellet kan man vise at $|f''(x)| < 1$ og vi får $|E_T| < \frac{1}{192} \approx 0.004323$. Vi kan røpe at den faktiske verdien av integralet er $\frac{\pi}{4} \approx 0.7854$, så vi ser at vi holder oss innenfor feilestimatet.

$$0.7819 - 0.0043 \leq \int_0^2 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854 \leq 0.7819 + 0.0043$$

Den andre metoden vi skal se på kalles **Simpsons metode**. Den benytter seg av kvadratisk approksimering, dvs. at vi tilnærmer funksjonen stykkvis med 2. gradspolynom (selv om det ikke er helt enkelt å se at det er det som ligger under). Her må n være et partall. I Simpsons metode bruker vi tilnærmingen

$$\int_a^b f(x) dx \approx (f(a_0) + 4f(a_1) + 2f(a_2) + 4f(a_3) + 2f(a_4) + \dots + 2f(a_{n-2}) + 4f(a_{n-1}) + f(a_n)) \cdot \frac{\Delta x}{3}$$

hvor feilen vi gjør er gitt ved et restledd E_S .

Teorem 2.6.2. Anta at $f^{(4)}(x)$ eksisterer og er kontinuertlig på intervallet $[a, b]$ og at $|f^{(4)}(x)|$ har maksverdi K på intervallet. Da er feilen E_S i Simpsons metode begrenset ved

$$|E_S| \leq \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

Her inneholder nevneren n opphøyd i fjerde potens. Det betyr at en økning i antall delingspunkter gir en dramatisk forbedring i approksimasjonen i forhold til trapesmetoden.

Siden Simpsons metode baserer seg på tilnærming med 2. gradspolynomer kan det være interessant å prøve å beregne integralet av et 2. gradspolynom.

Eksempel 2.6.4. Vi ser på integralet $\int_0^1 x^2 dx$ med 10 delingspunkter. Det gir

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 dx &\approx (0 + 4 \cdot (0.1)^2 + 2 \cdot (0.2)^2 + \dots + 4 \cdot (0.9)^2 + 1) \cdot \frac{0.1}{3} \\ &= (0 + 0.04 + 0.08 + 0.36 + 0.32 + 1 + 0.72 \\ &\quad + 1.96 + 1.28 + 3.24 + 1) \cdot \frac{0.1}{3} \\ &= \frac{10 \cdot 0.1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Dette er det samme vi hadde fått dersom vi hadde anti-derivert og så satt inn.

Eksempel 2.6.5. Vi skal finne en tilnærmet verdi for $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ med n delintervaller ved Simpsons metode.

Først med $n = 2$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) \cdot \frac{\Delta x}{3} \\ &= (e^0 + 4e^{-\frac{1}{4}} + e^{-1}) \cdot \frac{1}{6} = 0.74718\dots \end{aligned}$$

Med $n = 4$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) \cdot \frac{\Delta x}{3} \\ &= (e^0 + 4e^{-\frac{1}{16}} + 2e^{-\frac{1}{4}} + 4e^{-\frac{9}{16}} + e^{-1}) \cdot \frac{1}{12} \\ &= 0.7468 \dots\end{aligned}$$

Restleddet sier i dette tilfellet, etter noe regning,

$$E_S \leq \frac{24 \cdot (1-0)^5}{180 \cdot 4^4} = \frac{24}{46080} \approx 0.0005$$

og vi får

$$0.7468 - 0.0005 \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 0.7468 + 0.0005$$

Eksempel 2.6.6. Vi avslutter med å estimere integralet $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ ved Simpsons metode med fire like store delintervaller. Igjen har vi $\Delta x = \frac{1}{4}$ og derfor $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$ og $x_4 = 1$. Det gir

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx &\approx \left(\frac{1}{1+0^2} + 4 \cdot \frac{1}{1+(\frac{1}{4})^2} + 2 \cdot \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2} \right. \\ &\quad \left. + 4 \cdot \frac{1}{1+(\frac{3}{4})^2} + \frac{1}{1+1^2} \right) \cdot \frac{1}{12} \\ &= \left(1 + \frac{64}{17} + \frac{8}{5} + \frac{64}{25} + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{12} \\ &= \frac{8011}{10200} \approx 0.7854\end{aligned}$$

I dette tilfellet kan man vise at $|f^{(4)}(x)| < 24$ og vi får $|E_S| < \frac{1}{1920} \approx 0.0004323$, som betyr at

$$0.7854 - 0.0004 \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \leq 0.7854 + 0.0004$$

2.7 Uekte integraler

Bestemte integral er definert for begrensede funksjoner over begrensede intervaller. Imidlertid er det i mange tilfelle mulig å definere bestemte integraler selv om vi verken har begrenset definisjonsområde eller en begrenset funksjon. Begge deler defineres gjennom grenseverdier.

Definisjon 2.7.1. Vi sier at L er grenseverdien av en funksjon $f(x)$ når $x \rightarrow a$ dersom for alle valg av $\epsilon > 0$, så kan vi finne en $\delta > 0$ slik at dersom $|x-a| < \delta$, så er $|f(x) - L| < \epsilon$. Vi skriver

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Litt annerledes definisjon når $a = \infty$:

Definisjon 2.7.2. Vi sier at L er grenseverdien av en funksjon $f(x)$ når $x \rightarrow \infty$ dersom for alle valg av $\epsilon > 0$, så kan vi finne en M slik at dersom $x > M$, så er $|f(x) - L| < \epsilon$. Vi skriver

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

Vi har gitt en funksjon $f(x)$ definert over et ubegrenset område, f.eks. et halvåpent intervall $[a, \infty)$. Vi definerer

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

under forutsetning av at grensen eksisterer.

Eksempel 2.7.1. Betrakt funksjonen $f(x) = x^{-s}$, $s > 1$, definert på intervallet $[a, \infty)$. Da har vi

$$\begin{aligned} \int_a^\infty x^{-s} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b x^{-s} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{-s+1} (b^{-s+1} - a^{-s+1}) \\ &= \frac{1}{-s+1} - a^{-s+1} \end{aligned}$$

siden $b^{-s+1} \rightarrow 0$ når $b \rightarrow \infty$ og $-s+1 < 0$.

Eksempel 2.7.2.

$$\begin{aligned} \int_1^\infty e^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + e^{-1}) \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Det andre alternativet for uekte integraler er i de tilfellene der definisjonsområdet er begrenset, men funksjonen er ubegrenset.

Eksempel 2.7.3. Betrakt funksjonen $f(x) = x^{-s}$, $0 < s < 1$, definert på intervallet $(0, 1]$. Da har vi

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{-s} dx &= \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 x^{-s} dx = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{-s+1} (1^{-s+1} - a^{-s+1}) \\ &= \frac{1}{-s+1} \end{aligned}$$

siden $a^{-s+1} \rightarrow 0$ når $a \rightarrow 0$ og $-s+1 > 0$.

Oppgaver til kapittel 2

Oppgave 1. Regn ut de bestemte integralene.

a) $\int_0^3 x^2 dx$

b) $\int_{-3}^3 x^2 dx$

c) $\int_0^2 4x^3 dx$

d) $\int_{-2}^2 4x^3 dx$

Oppgave 2. Regn ut de bestemte integralene.

a) $\int_{-1}^2 (t+1) dt$

b) $\int_{-1}^0 (x+1)^2 dx$

c) $\int_0^1 x^{\frac{1}{3}} dx$

d) $\int_0^\pi (x + \sin x) dx$

Oppgave 3. Regn ut de bestemte integralene

a) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x} (\ln x) dx$

b) $\int_1^4 \frac{1}{x} + \sqrt{x} dx$

c) $\int_0^{2\pi} \sin t \sin(\omega t) dt, \omega \neq \pm 1$

d) $\int_0^1 x e^{3x^2} dx$

e) $\int_0^1 x e^{2x} dx$

Oppgave 4. Finn arealet avgrenset av grafen til f , x -aksen og den rette linja ($x = a$).

a) $f(x) = 5x$ og $x = 1$

b) $f(x) = 3x^2$ og $x = 1$

c) $f(x) = \sin x$ og $x = \frac{\pi}{2}$

Oppgave 5. Finn arealet avgrenset av grafen til f , x -aksen og de to rette linjene.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ og $x = 1, x = 4$

b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ og $x = 1, x = 2$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ og $x = 1, x = 3$

Oppgave 6. Regn ut arealet mellom de grafene, avgrenset av de to rette linjene.

a) $f(x) = x^3, g(x) = 3x^2 - 6$ og $x = 0, x = 2$

b) $f(x) = x^4, g(x) = 2x^2 - 1$ og $x = -1, x = 1$

c) $f(x) = e^x, g(x) = e^{-x}$ og $x = 0, x = \ln 2$

d) $f(x) = \cos x, g(x) = \sin x$ og $x = 0, x = \frac{\pi}{4}$

e) $f(x) = x^2, g(x) = x + 2$ og $x = -1, x = 2$

Oppgave 7. Regn ut arealet mellom grafene til f og g , avgrenset av de to rette linjene.

a) $f(x) = 9 - x^2, g(x) = x^2 + 1$ og $x = -2, x = 2$

b) $f(x) = \sqrt{4+x}, g(x) = 21 + \frac{1}{4}x$ og $x = 0, x = 12$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x$, $g(x) = e^{-x}$ og $x = 0$, $x = \ln 2$

Oppgave 8. Regn ut arealet av området mellom kurvene $y = x^2 + x + 1$ og $y = -2x^2 + 4x + 7$ mellom skjæringspunktene for de to kurvene.

Oppgave 9. Estimer integralet ved å bruke trapesmetoden, med like store delintervaller og det oppgitte antallet delintervaller.

a) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$, og $n = 4$

b) $\int_{-1}^2 \frac{1}{1+x^2} dx$, og $n = 6$

c) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$, og $n = 10$

d) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$, og $n = 8$

Oppgave 10. Finn en tilnærmet verdi for integralet $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ ved Simpsons metode, først med $n = 2$, deretter $n = 4$, og så $n = 8$. Sammenlikn svaret med $\ln 2$. Hvordan endrer restleddet seg?

Oppgave 11. Følgende data er kjent for en funksjon $f(x)$.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.1	0.4	0.5	1	-0.1

Vi skal estimere $\int_0^4 f(x) dx$

a) Ved trapesmetoden

b) Ved Simpsons metode

Oppgave 12. a) Gi et estimat for integralet $\int_0^4 x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 17x dx$ ved å bruke trapesmetoden og Simpsons metode med $\Delta x = 1$.

b) Beregn integralet $\int_0^4 x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 17x dx$ eksakt.

Oppgave 13. Finn en tilnærmet verdi for integralet $\int_0^1 x dx$ ved Simpsons metode, først med $n = 2$, deretter $n = 8$.

Oppgave 14. Regn ut de uekte integralene

a) $\int_0^\infty e^{-x} dx$

b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

c) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$

d) $\int_2^\infty x^{-5} dx$

Oppgave 15. Regn ut de uekte integralene

a) $\int_{-\infty}^0 e^{\frac{1}{10}x} dx$

b) $\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}} dx$

$$c) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx$$

$$d) \int_3^{\infty} \frac{1}{(x-2)^3} dx$$

Oppgave 16. Avgjør om de uekte integralene eksisterer.

$$a) \int_0^{\infty} 2xe^{-x^2} dx$$

$$b) \int_1^{\infty} \frac{x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} dx$$

Oppgave 17. Beregn følgende uekte integraler:

$$a) \int_0^1 (\ln x)^2 dx$$

$$b) \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

Kapittel 3

Approksimering

Mange funksjoner kan være vanskelige å håndtere, f.eks. er det ikke spesielt enkelt å regne ut funksjonsverdiene til funksjonen $f(x) = e^{x^2}$, langt mindre å integrere den samme funksjonen. En metode til å studere slike funksjoner er å tilnærme dem med kjente og mer anvendelige funksjoner. Det vanligste er å bruke polynomer eller harmoniske funksjoner, dvs. sinus- og cosinus-funksjoner. Vi skal se på hvordan vi kan approksimere med polynomer. En første tilnærming er å tilnærme funksjonen med en lineær funksjon, men det blir litt snevert. Da må vi gå videre med polynomer av høyere grad. Vi skal se hvordan dette kan gjøres, og også studere hvor stort avvik fra originalfunksjonen disse approksimasjonene gir.

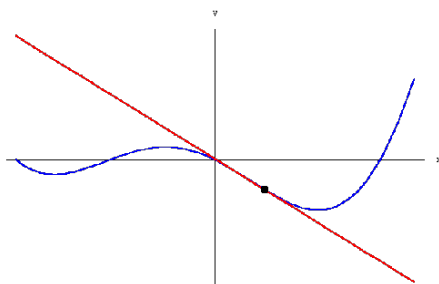
3.1 Taylorpolynom

Hvis vi kjenner verdien av en kontinuerlig og deriverbar funksjon og dens deriverte i et punkt, så kan vi anslå verdien til funksjonen i nærliggende punkter. Eller i en mer praktisk setting: Hvis vi er ute og går, så vil posisjon og fart på ett tidspunkt si mye om hvor vi kommer til å være et par sekunder senere. Men hvis ikke bevegelsen er rettlinjet med konstant fart, kan vi si lite om hvor vi vil være 10 minutter senere. Posisjon og fart i ett punkt vil bestemme en lineær funksjon som beskriver en bevegelse, som i et kort tidsrom faller sammen med vår bevegelse.

Tilsvarende kan vi gjøre for en funksjon $y = f(x)$. Vi velger ut et punkt x_0 og beregner den deriverte til $f(x)$ i dette punktet, $f'(x_0)$. Disse dataene gir opphav til en lineær funksjon, $y = T_f(x)$,

$$T_f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

som kalles **den lineære approksimasjonen** til f i x_0 . Den lineære approksimasjonen definerer en rett linje og grafen til den lineære approksimasjonen tangerer funksjonen i punktet $(x_0, f(x_0))$.



Figur 3.1. Tangentlinja til et punkt på grafen.

Eksempel 3.1.1. La $f(x) = \sin x$. Da har vi at $f(0) = 0$ og $f'(0) = \cos 0 = 1$. Den lineære approksimasjonen av sinus i 0 er gitt ved $y = x$.

Eksempel 3.1.2. Betrakt funksjonen $f(x) = 2x + 3$ som allerede er lineær. Vi har da at $f(c) = 2c + 3$, og $f'(c) = 2$. Det gir $T_f(x) = 2c + 3 + 2(x - c) = 2c + 3 + 2x - 2c = 2x + 3$, og den lineære approksimasjonen til en lineær funksjon er funksjonen selv.

Eksempel 3.1.3. Vi skal se på lineære approksimasjoner av $f(x) = x^2 + x + 1$ i to forskjellige punkter, $c = 1$ og $c = 2$. I tilfelle $c = 1$ har vi $f(1) = 3$ og $f'(1) = 3$ og vi får $T_f(x) = 3 + 3(x - 1) = 3x$. For $c = 2$ derimot har vi $f(2) = 7$ og $f'(2) = 5$, som gir $T_f(x) = 7 + 5(x - 2) = 5x - 3$. Vi merker oss at de to lineære approksimasjonene ikke er like.

Neste skritt er å prøve å finne polynomer som ikke bare har samme verdi og derivert som $\sin x$ i $x = 0$, men også samme andre-derivert (altså samme krumning), og tredje-derivert, osv.

Definisjon 3.1.1. La f være en n ganger deriverbar funksjon i punktet $x = a$. Et polynom $T_f(x)$ som er slik at $T_f(a) = f(a)$ og som i tillegg oppfyller

$$T_f^{(j)}(a) = f^{(j)}(a) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

kalles **Taylor-polynomet** av grad n for funksjonen f .

Taylor-polynom er oppkalt etter sin opphavsmann, den engelske matematikeren Brook Taylor (1685-1731).



Taylor ga en formel for å beregne Taylorpolynomet til en funksjon.

Teorem 3.1.2. La f være en n ganger deriverbar funksjon i punktet $x = a$. Taylorpolynomet til f av grad n er gitt ved

$$T_f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 \\ + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Bevis. Det er lett å forvise seg om at $T_f(x)$ og $f(x)$ har samme verdi og samme (høyere) deriverte i punktet $x = a$. \square

Vi skal gjøre et eksperiment av litt samme type som vi gjorde med hensyn til lineær approksimasjon av lineære funksjoner. Nå skal vi se på en kvadratisk approksimasjon av en kvadratisk funksjon, og gjøre analysen i to forskjellige punkter. Vi husker at de lineære approksimasjonene ble forskjellige.

Eksempel 3.1.4. Vi betrakter igjen polynomet $f(x) = x^2 + x + 1$. Vi har $f'(x) = 2x + 1$ og $f''(x) = 2$. Det gir for $c = 1$:

$$T_f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 \\ = 3 + 3(x-1) + \frac{1}{2} \cdot 2(x-1)^2 \\ = 3 + 3x - 3 + x^2 - 2x + 1 = x^2 + x + 1$$

Setter vi inn for $c = 2$ får vi

$$T_f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{1}{2}f''(2)(x-2)^2 \\ = 7 + 5(x-2) + \frac{1}{2} \cdot 2(x-2)^2 \\ = 7 + 5x - 10 + x^2 - 4x + 4 = x^2 + x + 1$$

Mao, de to Taylorpolynomene blir like i dette tilfellet. Tar vi som utgangspunkt at Taylorpolynomet av grad 2 er det polynomet av grad 2 som best tilnærmer funksjonen er ikke dette spesielt overraskende, siden en funksjon alltid er den beste mulige approksimasjonen av seg selv.

Eksempel 3.1.5. Vi skal finne Taylorpolynomet til $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ av grad 3 i punktet $x = 0$. Vi har $f(0) = 1$ og videre

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \qquad f'(0) = \frac{1}{2} \\ f''(x) = (-\frac{1}{2})\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \qquad f''(0) = (-\frac{1}{2})\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \\ f^{(3)}(x) = (-\frac{3}{2})(-\frac{1}{2})\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \qquad f^{(3)}(0) = (-\frac{3}{2})(-\frac{1}{2})\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Dette gir

$$T_f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2!}\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3!}\frac{3}{8}x^3 = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

3.2 Restleddsestimater

Målet med Taylorpolynomene er å approksimere en gitt funksjon med enklere funksjoner, i vårt tilfelle med polynomer. Jo høyere grad vi går til, jo bedre tilnærming får vi. Dessuten vil tilnærmingen alltid være best helt i nærheten av punktet vi utvikler om. Spørsmålet er hvor stor feil vi gjør når vi erstatter funksjonen med et Taylorpolynom. Svaret ligger i følgende teorem:

Teorem 3.2.1. La f være $n+1$ ganger deriverbar i et intervall som inneholder $x = a$. La $T_f(x)$ være Taylorpolynomet til f av grad n . Da har vi

$$E_n = f(x) - T_f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

for en c mellom a og x .

Eksempel 3.2.1. Funksjonen i eksempel 3.1.5, $f(x) = \sqrt{x+1}$ har fjerde-derivert $f^{(4)}(x) = (-\frac{5}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{1}{2})\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{7}{2}}$, og feilestimatet blir

$$E_4 = -\frac{5}{128}(1+c)^{-\frac{7}{2}}x^4$$

for en c i intervallet $[0, x]$. Hvis vi skal beregne $f(\frac{3}{2})$ og vil bruke Taylorrekka, trenger vi å ha kontroll på hvor stor feil vi gjør, mao. finne en øvre grense for feilestimatet. Problemet vil være faktoren $(1+c)^{-\frac{7}{2}}$ siden vi ikke kjenner c , men bare vet at den ligger i et bestemt intervall. Det er imidlertid lett å se at $(1+c)^{-\frac{7}{2}} \leq 1$ for alle $0 \leq c \leq \frac{3}{2}$, og vi får

$$|E_4| = \frac{5}{128}(1+c)^{-\frac{7}{2}}|x|^4 \leq \frac{5}{128}(\frac{3}{2})^4 \approx 0.2$$

Setter vi inn for $x = \frac{3}{2}$ i $T_f(x)$ får vi

$$T_f(\frac{3}{2}) = 1 + \frac{1}{2}\frac{3}{2} - \frac{1}{8}(\frac{3}{2})^2 + \frac{1}{16}(\frac{3}{2})^3 = \frac{215}{128} \approx 1.68$$

og vi slutter at $1.48 \leq f(\frac{3}{2}) \leq 1.88$.

Eksempel 3.2.2. Vi skal se på Taylorpolynomet til $f(x) = e^x$. I dette tilfellet er $f^{(n)}(x) = e^x$ for alle $n \geq 1$, og vi har $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Setter vi dette inn i formelen får vi Taylorpolynom

$$T_{exp}(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

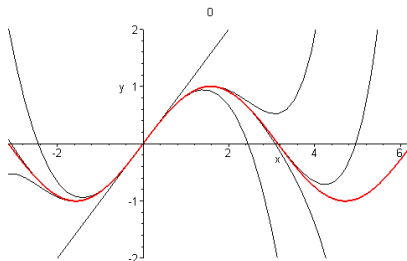
med restledd

$$E_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)x^{n+1}}{(n+1)!}$$

for en $0 \leq c \leq x$. Dette betyr at $e^c < e^x$ og derfor

$$|E_n(x)| = \left| \frac{f^{n+1}(c)x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \left| \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \left| \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

Det siste uttrykket vil gå mot 0 når $n \rightarrow \infty$ for alle valg av x . Det betyr at vi ved å ta med mange nok ledd i Taylorpolynomet kan få restleddet så lite vi måtte ønske, uansett valg av x .



Figur 3.2. Grafen til Taylorpolynomet til $f(x) = \sin x$ av forskjellig grad..

Eksempel 3.2.3. La $f(x) = \sin x$. Vi har alle de deriverte gitt ved

$$\begin{aligned} f^{(4k+1)}(x) &= \cos x \\ f^{(4k+2)}(x) &= -\sin x \\ f^{(4k+3)}(x) &= -\cos x \\ f^{(4k)}(x) &= \sin x \end{aligned}$$

og derfor $f^{(2k)}(0) = 0$, og $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$. Det gir Taylorpolynom av grad $2k + 1$

$$T_{\sin}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

I dette eksempelet har vi $E_{2k+1} \rightarrow 0$ når $k \rightarrow \infty$.

Eksempel 3.2.4. Tilsvarende som for $\sin x$ får vi for $\cos x$ Taylorpolynom

$$T_{\cos}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k}$$

Vi har $E_{2k} \rightarrow 0$ når $k \rightarrow \infty$.

3.3 Følger

Vi har sett at vi kan tilnærme funksjoner med polynomer av ulik og voksende grad, og generelt vil det være slik at jo høyere grad, jo bedre tilnærming. Det betyr at vi vil ha bruk for å gå til en grense, dvs. vi må kunne håndtere ”uendelig stor grad”. Til å hjelpe oss med det skal vi bruke begrepet konvergens. Vi begynner med å se på følger av tall, endelige eller uendelige.

Definisjon 3.3.1. En **tallfølge** $\{a_n\}$ er en funksjon som til et hvert naturlig tall (indeksen n) tilordner et reelt tall a_n . Alternativt kan vi skrive tallfølgene som en rekke av tall, ordnet etter indeksen:

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Eksempel 3.3.1. Et eksempel på en tallfølge er

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

Et annet eksempel er

$$7, 4, 2, 5, 3, 3, 9, 2, 5, 23, 289, 14, \dots$$

I det første tilfellet er det lett å forstå hva det neste (og neste deretter) leddet i følgen er, mens i det andre tilfellet er det ingen synlig systematikk.

Følger kan, som vi ser over, være systematiske og pene, i den forstand at vi med enkle hjelpemidler kan fortelle hva det n -te leddet i følgen er. Eller de kan være kaotiske og uten noen form for indre systematikk. Vi er mest interessert i følgene med en viss grad av systematikk, spesielt er vi interessert i følger hvor leddene etter hvert blir likere og likere. Slike følger har et eget navn, de kalles konvergente følger og den presise definisjonene som følger.

Definisjon 3.3.2. En tallfølge $\{a_n\}$ sies å **konvergere** mot en grense L dersom for alle $\epsilon > 0$, så finnes en N slik at dersom $n > N$ så er $|L - a_n| < \epsilon$. Vi skriver

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

En følge som ikke konvergerer **divergerer**.

Eksempel 3.3.2. Følgen

$$0.3, 0.33, 0.333, \dots$$

konvergerer mot $\frac{1}{3}$, mens følgene

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

og

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

begge divergerer, den første fordi den vokser over alle grenser, mens den andre alternerer mellom to ulike verdier.

Det siste eksempelet gir oss en divergent følge med en konvergent **delfølge**. Delfølgen finner vi ved å plukke ut annet hvert ledd, noe som vil gi oss den konstante følgen $1, 1, 1, \dots$, som selvfølgelig er konvergent.

3.4 Rekker

Vi er interessert i en spesiell type tallfølger, nemlig de som framkommer ved stadig å legge sammen flere og flere tall. Vi starter med en følge a_1, a_2, \dots og for hver n ser vi på delsummen

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Dette gir oss en ny følge

$$S_1, S_2, S_3, \dots$$

Definisjon 3.4.1. La a_1, a_2, \dots være reelle tall. Den uendelige tallfølgen

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots,$$

kalles en **uendelig rekke**.

Dersom følgen $\{S_n\}$ konvergerer har det mening å snakke om grensen for følgen. Vi kaller denne grensa for S_∞ , og vi skriver

$$S_\infty = a_1 + a_2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Det finnes rekker med mer spesielle egenskaper enn andre. En av de viktigste typene av uendelige rekker er **geometriske rekker**. Dette er rekker som kjennetegnes ved at forholdet mellom to påfølgende ledd er konstant, dvs, rekker av typen

$$a + ak + ak^2 + ak^3 + ak^4 + \dots$$

for reelle tall a og k . Denne rekka kalles en geometrisk rekke med startverdi a og forholdstall k .

Eksempel 3.4.1. *Geometrisk rekke*

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$$

Dette er en geometrisk rekke med startverdi 1 og forholdstall $\frac{1}{2}$. Rekka

$$1, -1, 1, -1, \dots$$

er også en geometrisk rekke, med startverdi 1 og forholdstall -1 .

Et annet eksempel på en rekke med eget navn er den såkalte harmoniske rekka.

Eksempel 3.4.2. *Rekka*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

kalles den **harmoniske rekka**. Dersom vi alternerer fortegnene i den harmoniske rekka, får vi **den alternerende harmoniske rekka**.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Det er egentlig ikke lov å legge sammen uendelig mange ledd. Hver delsum av rekka er et helt ok tall, men hele den uendelige rekka er formelt bare en rekke og ikke noe tall. Dersom vi kan tilordne en grenseverdi til den uendelige rekka, sier vi at dette er summen av de uendelig mange leddene (men det er formelt sett ikke det!). Formaliseringen av spørsmålet om rekka har en sum eller ikke ligger i den følgende definisjonen.

Definisjon 3.4.2. *Vi sier at en uendelig rekke*

$$S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a_1 + a_2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

konvergerer dersom følgen av delsummer $\{S_n\}$ konvergerer. I motsatt fall sier vi at rekka **divergerer**.

Man kan vise at for alle $k \neq 1$, så har vi

$$1 + k + k^2 + k^3 + \dots + k^n = \frac{1 - k^{n+1}}{1 - k}$$

Dersom $|k| < 1$, så vil $k^n \rightarrow 0$, når $n \rightarrow \infty$. Det betyr at den geometriske rekka konvergerer for $|k| < 1$, og i det tilfellet har vi

$$1 + k + k^2 + k^3 + \dots + k^n = \frac{1}{1 - k}$$

Man kan også vise at den harmoniske rekka

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

divergerer, mens den alternerende harmoniske rekka

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergerer, og summen, er som vi snart skal se, $\ln 2$.

Eksempel 3.4.3. Vi kan skrive reelle tall som summer av rasjonale tall (og dermed gi en presis definisjon av uendelige desimaltall). La $x = a, a_1a_2a_3a_4\dots$ være desimalutviklingen til et reelt tall. Det betyr at

$$x = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots = a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

som er grenseverdien for de avkuttete desimaltallene.

3.5 Rekker som funksjoner

Vi kan betrakte en geometrisk rekke som en funksjon i faktoren vi multipliserer med

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{for } |x| < 1$$

Siden rekka er konvergent for $|x| < 1$, vil de to funksjonene

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad g(x) = \frac{1}{1-x}$$

være identisk like i konvergenksområdet, dvs. for $-1 < x < 1$. To funksjoner som er identisk like på et intervall vil nødvendigvis også ha identisk derivert i intervallet. I tillegg er det et faktum at den deriverte av funksjonen $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ er det samme som den uendelige summen, der vi deriverer ledd for ledd, dvs.

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

Dette skal være identisk likt med den deriverte av $g(x)$, så vi får

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{for } |x| < 1$$

I stedet for å derivere ledd for ledd, kan vi integrere ledd for ledd. Det gir oss en annen likhet,

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots &= \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \dots) dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \\ &= [\ln(1+t)]_0^x = \ln(1+x) - \ln 1 = \ln(1+x) \end{aligned}$$

Innsetting av $x = 1$ gir formelen for summen av den alternerende harmoniske rekka, og vi får likheten

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2$$

Dette er ikke noen effektiv måte å beregne $\ln 2$. Hvis vi tar med flere og flere ledd får vi følgen

$$1, 0.5, 0.8333, 0.5833, 0.7833, 0.6166, \dots, 0.6935, 0.6926, \dots$$

hvor de to siste leddene gir ledd nummer 999 og ledd nummer 1000. Det betyr at $\ln 2 \approx 0.693$.

Vi kan bruke formalismen rundt rekkeutvikling til å utlede en viktig formel innen kompleks analyse. Selv om hele teorien for rekkeutvikling dreier seg om reelle tall og reelle funksjoner, kan vi driste oss til å late som om de også gjelder for komplekse tall. Så lenge rekkene konvergerer (og de gjør de i dette tilfellet) er det ingen formelle problemer med følgende resonnement:

Eksempel 3.5.1. *Vi har rekkeutviklingen for eksponensialfunksjonen*

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

og for de trigonometriske funksjonene

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

Setter vi inn ix for x i rekkeutviklingen for e^x , får vi

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \frac{1}{5!}(ix)^5 + \dots \\ &= 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}ix^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}ix^5 + \dots \\ &= (1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots) + i(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

dvs. at vi har

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

3.6 Konvergenzkriterier*

I dette stjernemerkeede kapitlet skal vi se på noen kriterier for når vi har konvergens av rekker. Vi formulerer bare teoreme, bevisene kan man finne i litteraturen.

Merk at dersom en rekke $\sum a_n$ konvergerer, så vil $a_n \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$. Dette er en nødvendig forutsetning som alltid må være oppfylt dersom vi skal ha noen forhåpninger om at en rekke konvergerer.

Det mest grunnleggende resultatet om konvergens er det som kalles **sammenlikningskriteriet**,

Teorem 3.6.1. *Dersom vi for et positivt tall c har $a_n \leq cb_n$ for alle n , så vil konvergens av $\sum b_n$ medføre konvergens av $\sum a_n$. Motsatt, så vil divergens av $\sum a_n$ medføre divergens av $\sum b_n$.*

Eksempel 3.6.1. *Rekka $\sum \frac{|\cos n\omega|}{2^n}$ konvergerer siden $\frac{|\cos n\omega|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ og den geometriske rekka $\sum \frac{1}{2^n}$ konvergerer.*

Eksempel 3.6.2. *Betrakt rekka gitt ved*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$$

Siden $2^n - n \geq \frac{1}{2}2^n$, så vil

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Den største rekke konvergerer og da vil også den mindre rekke konvergere, men vi kan ikke regne ut grenseverdien. Rekka ser for øvrig slik ut

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{27} + \frac{1}{58} + \frac{1}{121} + \dots \approx 1.85386$$

Teorem 3.6.2. La $a_n, b_n > 0$ for alle $n \geq 1$ og anta at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Da konvergerer $\sum a_n$ hvis og bare hvis $\sum b_n$ konvergerer.

Teorem 3.6.3. La $\sum a_n$ være en uendelig rekke av positive ledd slik at

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \rightarrow L \quad \text{når } n \rightarrow \infty$$

Dersom $L < 1$ vil rekke konvergere, for $L > 1$ vil den divergere og for $L = 1$ kan ikke denne testen si noe om konvergens eller divergens.

Eksempel 3.6.3. Betrakt rekke $\sum \frac{1}{n^2 - 6n + 11}$. Siden vi har

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2 - 6n + 11}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 - 6n + 11} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{6}{n} + \frac{11}{n^2}} = 1$$

så vil de to rekkene $\sum \frac{1}{n^2 - 6n + 11}$ og $\sum \frac{1}{n^2}$ enten begge konvergere eller divergere.

Teorem 3.6.4. La $f(x)$ være en positiv, avtagende funksjon, definert for alle $x \geq 1$. For alle $n \geq 1$ lar vi

$$s_n = \sum_{k=1}^n f(k) \quad \text{og} \quad t_n = \int_1^n f(x) dx$$

Da vil de to følgene $\{s_n\}$ og $\{t_n\}$ begge konvergere eller begge divergere.

Eksempel 3.6.4. Vi har sett at de to rekkene $\sum \frac{1}{n^2 - 6n + 11}$ og $\sum \frac{1}{n^2}$ enten begge konvergerer eller begge divergerer. Nå har vi videre at

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{og} \quad t_n = \int_1^n \frac{1}{x^2} dx$$

også begge enten konvergerer eller begge divergerer. Men integralet kan vi regne ut,

$$t_n = \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1$$

når $n \rightarrow \infty$, og begge rekkene konvergerer.

Eksempel 3.6.5. Ved å se på det bestemte integralet som et areal er det lett å se at

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{k}$$

Derfor vil den harmoniske rekke divergere siden den er større enn en divergent rekke,

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

(Den venstre rekke er divergent siden integralet er lik $\ln(n+1)$ som opplagt går mot ∞ når $n \rightarrow \infty$.)

En rekke kalles **alternerende** dersom annet hvert ledd er positivt og annet hvert ledd er negativt. Det skal mye mindre til at en alternerende rekke konvergerer enn en rekke der alle leddene er positive. Dette er formulert i det som kalles Leibniz konvergenzkriterium.

Teorem 3.6.5. La $\{a_n\}$ være en følge av positive tall, slik at $a_{n+1} < a_n$ og $a_n \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$. Da konvergerer den alternerende rekken $\sum (-1)^n a_n$.

Den alternerende harmoniske rekke konvergerer siden $\frac{1}{k} \rightarrow 0$ når $k \rightarrow \infty$. Et annet eksempel på en konvergent alternerende rekke er $\sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Også her vil det generelle leddet gå mot 0. Vi har i dette tilfelle en vakker formel (som vi ikke skal bevise)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{2}$$

La $\sum a_n$ og $\sum b_n$ være konvergente rekker og la α, β være vilkårlige reelle tall. Da konvergerer også $\sum (\alpha a_n + \beta b_n)$ og vi har

$$\sum (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$$

Merk at summen av en konvergent og en divergent rekke alltid er divergent, mens summen av to divergente rekker kan være enten konvergent eller divergent.

Oppgaver til kapittel 3

Oppgave 1. Regn ut Taylorpolynomiet av grad 3 til $f(x) = \frac{1}{x+1}$ om $x = 0$.

Oppgave 2. Regn ut Taylorpolynomiet av grad 3 til $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ om $x = 1$.

Oppgave 3. Regn ut Taylorpolynomiet av grad 4 til $f(x) = \sin^2 x$ om $x = 0$.

Oppgave 4. a) Regn ut Taylorpolynomiet av grad 3 til $f(x) = x^3 + 2x + 1$ om $x = 0$.

b) Regn ut Taylorpolynomiet av grad 3 til $f(x) = x^3 + 2x + 1$ om $x = 1$.

Oppgave 5. a) Regn ut Taylorpolynomiet av grad 2 til $f(x) = \ln(x+1)$ om $x = 0$ og finn restleddet. Gjør et estimat på hvor stort (lite) restleddet er når $0 \leq x \leq 1$.

b) Gjør oppgave a), men erstatt grad 2 med grad 3.

Oppgave 6. Regn ut følgende Taylorpolynom

- a) For $f(x) = \sqrt{x}$, om $x = 1$ og med $n = 4$.
- b) For $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, om $x = 0$ og med $n = 4$.

Oppgave 7. Regn ut Taylorpolynomet til $g(x) = \frac{1}{1-x}$ om $x = 0$ og med n ledd. Finn et uttrykk for restleddet og avgjør for hvilke x restleddet går mot 0 når $n \rightarrow \infty$.

Oppgave 8. En normalfordeling er beskrevet av funksjonen $f(x) = e^{-x^2}$. Middelverdien er $\mu = 0$ og standardavviket er $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Det er velkjent at vi i dette tilfellet har

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx = 0.6827$$

Bruk Taylorpolynomet til e^x av grad 4 til å godtgjøre dette resultatet. (Erstatt x med $-x^2$, integrer ledd for ledd og beregn det bestemte integralet.)

Oppgave 9. Avgjør om hver følge $\{a_n\}$ konvergerer eller divergerer. Finn grenseverdien dersom den eksisterer.

- a) $a_n = 2 + \left(\frac{3}{5}\right)^n$
- b) $a_n = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^n$
- c) $a_n = 2 + (-1)^n$

Oppgave 10. De gamle babylonerne hadde en metode for å beregne kvadratrøtter. De valgte en startverdi $x_0 > 0$, nær det de forventet at \sqrt{T} var og definerte

$$x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{T}{x_{n-1}} \right)$$

Så regnet de ut x_1, x_2, \dots inntil $x_{n-1} \approx x_n$, og dermed var $\sqrt{T} \approx x_n$. Vis at $x_n \rightarrow \sqrt{T}$ når $n \rightarrow \infty$.

Oppgave 11. Finn de fire første leddene i hver rekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og regn ut delsummen $S_3 = \sum_{n=0}^3 a_n$.

- a) $a_n = 3^n$
- b) $a_n = \frac{n+2}{n+1}$

Oppgave 12. Skriv opp hver rekke ved hjelp av summetegn

- a) $\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \dots$
- b) $3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$
- c) $2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \dots$

Oppgave 13. Finn summen av de geometriske rekkene

- a) $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots$
- b) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \dots$

Oppgave 14. I en geometrisk rekke med positive ledd er det andre leddet lik $\frac{3}{4}$ og det fjerde lik $\frac{1}{3}$. Finn summen av rekka.

Oppgave 15. Vi har gitt x ved en rekke og danner $3x$:

$$\begin{aligned} x &= 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + \dots \\ 3x &= 3 - 9 + 27 - 81 + 243 - \dots \end{aligned}$$

Summen av rekkene gir $x = \frac{1}{4}$. Det stemmer åpenbart ikke. Hvor ligger feilen?

Oppgave 16. Vis at likhetene gjelder for alle x ved å ta utgangspunkt i kjente Taylorrekker:

a) $e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \dots$

b) $x^2 e^{-x} = x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3!}x^5 + \dots$

c) $\sin(2x) = 2x - \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^5}{5!}x^5 - \dots$

Oppgave 17. Bruk rekkeutviklingen til $\frac{1}{1+x}$ til å vise at

$$\frac{1}{(x+1)^3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + \dots$$

Oppgave 18. * Bruk integraltesten til å avgjøre om hver rekke konvergerer eller divergerer.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

Oppgave 19. * Avgjør om de alternerende rekkene konvergerer eller divergerer.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3+1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^2+3}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

Oppgave 20. *

a) Vis at rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

konvergerer.

b) Prøv å regne ut summen av rekka. (Hint: Bruk delbrøkkoppstilling.)

Oppgave 21. * Undersøk om rekka

$$\frac{1}{3} - \frac{4}{3^2} + \frac{9}{3^3} - \frac{16}{3^4} + \dots$$

konvergerer eller divergerer.

Kapittel 4

Numerisk løsning av differensiallikninger

Vi har sett at vi kan bruke rekkeutviklinger av funksjoner til å gjøre estimater for funksjonsverdier. F.eks. gir rekkeutviklingen for cosinus og sinus oss mulighet til, med så stor nøyaktighet vi måtte ønske, å beregne verdien av disse funksjonene i et vilkårlig punkt. Og det fine er at det kan vi gjøre, bare ved bruk av de fire regneoperasjonene og kjennskap til verdien av funksjonene i et vilkårlig valgt punkt.

I dette kapitlet skal vi se på en annen bruk av rekkeutvikling, nemlig til å løse differensiallikninger. Vi skal ta for oss to eksempler, først en differensiallikning vi kan løse eksakt, dernest en vi ikke klarer å løse eksakt med våre tilgjengelige metoder. I begge tilfeller skal vi angripe likningene på flere forskjellige måter, bl.a. ved å bruke rekkeutvikling.

Foruten å løse likningen eksakt, har vi to hovedstrategier for å finne tilnærmede løsninger. Den ene ytterligheten er å approksimere løsningen ved å bruke stykkvis lineære funksjoner. Vi deler opp det aktuelle definisjonsintervallet i mange delintervaller og ved hjelp av den kunnskapen vi har om stigningstallet til grafen til funksjonen i delingspunktene, lager vi en stykkvis lineær funksjon. Dersom antallet delingspunkter er stort, vil denne stykkvis lineære funksjonen gi en god tilnærming til den opprinnelige funksjonen. Dette er en global tilnærming til problemet. Metoden omtales som Eulers metode.

Den andre ytterligheten er en lokal tilnærming, der vi tar utgangspunkt i en Taylor-utvikling. Vi approksimerer funksjonen i et utvalgt punkt, med polynomer av høy grad. Dette gir oss nye polynomiale funksjoner som er hensiktsmessige å bruke i mangel av en eksakt løsningsfunksjon.

4.1 Løsning av $y' + y = e^{-x} - 1$

Vi betrakter likningen

$$y' + y = e^{-x} - 1 \quad y(0) = 1$$

Vi setter inn i formelen for løsning av slike likninger;

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int 1 dx} \int (e^{-x} - 1)e^{\int 1 dx} dx \\ &= e^{-x} \int (e^{-x} - 1)e^x dx \\ &= e^{-x} \int (1 - e^x) dx = xe^{-x} - 1 + Ce^{-x} \end{aligned}$$

Setter vi inn for initialbetingelsen får vi $1 = y(0) = 0 - 1 + C$, dvs. $C = 2$, og den spesielle løsningen blir

$$y = xe^{-x} - 1 + 2e^{-x}$$

Nå skal vi bruke Eulers metode (uten at vi bruker den eksplisitte formen for løsningen) til å regne ut verdien av løsningen ”i nærheten av ”0. Vi starter i et punkt (x_0, y_0) på løsningskurven, dvs. vi antar at dersom $y = f(x)$ er en løsning av likningen, så er $y_0 = f(x_0)$. Lineær approksimasjon baserer seg på formelen

$$y_{n+1} = y_n + y'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

som er en god tilnærming når $x_{n+1} - x_n$ er *liten*. I vårt tilfelle er $y'(x_n) = e^{-x_n} - 1 - y_n$, så vi får formelen

$$y_{n+1} = y_n + (e^{-x_n} - 1 - y_n)(x_{n+1} - x_n)$$

La oss si at vi er interessert i å beregne $y(1)$, på bakgrunn av at vi kjenner $y(0)$. Vi deler opp intervallet mellom 0 og 1 i små, like store deler og bruker lineær approksimasjon i hvert lille delintervall. I første forsøk lar vi antall deler være 10 og alle delintervallene like store. Det gir

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{10}, x_2 = \frac{2}{10}, \dots, x_9 = \frac{9}{10}, x_{10} = 1$$

Bruker vi formelen

$$y_{n+1} = y_n + (e^{-x_n} - 1 - y_n)(x_{n+1} - x_n)$$

med $x_0 = 0, y_0 = 1$, får vi

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + (1 - 1 - 1)\frac{1}{10} = 0.9 \\ y_2 &= 0.9 + (e^{-\frac{1}{10}} - 1 - \frac{9}{10})\frac{1}{10} \approx 0.80 \\ y_3 &= \dots \end{aligned}$$

og etter litt regning ender vi opp med $y(1) \approx 0.0943$. I andre forsøk lar vi antall deler være 100, fortsatt like store. Det gir

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{100}, x_2 = \frac{2}{100}, \dots, x_{99} = \frac{99}{100}, x_{100} = 1$$

og dermed

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + (1 - 1 - 1)\frac{1}{100} = 0.99 \\ y_2 &= \frac{99}{100} + (e^{-\frac{1}{100}} - 1 - \frac{99}{100})\frac{1}{100} \approx 0.98 \\ y_3 &= \dots \end{aligned}$$

Denne gangen blir svaret $y(1) \approx 0.1027$. En enda finere oppdeling, i 1000 deler, gir oss $y(1) \approx 0.1035$, så det kan virke som om vi begynner å nærme oss en rett verdi. I dette tilfellet har vi den eksakte verdien gitt, ved

$$y(1) = 1 \cdot e^{-1} - 1 + 2 \cdot e^{-1} = \frac{3}{e} - 1 \approx 0.1036$$

så med 1000 delingspunkter vil feilen være mindre enn 0.0002.

Neste innfallsvinkel er å løse den samme differensiallikningen er via rekkeutvikling. Likningen er fortsatt

$$y' + y = e^{-x} - 1 \quad y(0) = 1$$

Vi erstatter $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$ og får

$$y' + y = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right) - 1$$

Så lar vi $y = \sum a_n x^n$, hvor vi ikke kjenner koeffisientene a_n , men vi skal prøve å regne dem ut. Dette gir $y' = \sum n \cdot a_n x^{n-1}$ og

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right) - 1$$

Nå kan vi sammenlikne koeffisientene foran like potenser av x i uttrykket

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right) - 1$$

eller

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} + a_n)x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \right) - 1$$

Det gir

$$\begin{aligned} a_1 + a_0 &= 1 - 1 \\ 2a_2 + a_1 &= -1 \\ 3a_3 + a_2 &= \frac{1}{2} \\ 4a_4 + a_3 &= -\frac{1}{6} \\ &\dots \end{aligned}$$

Siden vi vet at $y(0) = a_0 = 1$ kan vi rekursivt beregne alle a_n . Vi får

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, a_1 = -1, a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{6}, \\ a_4 &= -\frac{1}{12}, a_5 = \frac{1}{40}, a_6 = -\frac{1}{180} \dots \end{aligned}$$

Dette gir oss et Taylorpolynom av grad 6 for løsningen gitt ved

$$T(x) = 1 - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{180}x^6$$

Igjen kan vi regne ut verdien for $x = 1$;

$$\begin{aligned}y(1) &\approx T(1) = 1 - 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{40} - \frac{1}{180} \\ &= \frac{60 - 30 + 9 - 2}{360} \\ &= \frac{37}{360} \\ &\approx 0.1028\end{aligned}$$

som igjen er en god tilnærming av en eksakte verdien.

4.2 Løsning av likningen $y' - y^2 = 1$

Vi ser så på likningen

$$y' - y^2 = 1 \quad y(0) = 0$$

Her har vi ikke noen eksakt løsning å støtte oss på. Vi skal likevel bruke en lineær approksimasjon av løsningen til å regne ut verdien av løsningen ”i nærheten” av 0. Vi starter i et punkt (x_0, y_0) på løsningskurven, dvs. vi antar at dersom $y = f(x)$ er en løsning av likningen, så er $y_0 = f(x_0)$. Lineær approksimasjon, eller Eulers metode, baserer seg på formelen

$$y_{n+1} = y_n + y'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

som er en god tilnærming når $x_{n+1} - x_n$ er liten. I vårt tilfelle er $y'(x_n) = (y_n)^2 + 1$, så vi får formelen

$$y_{n+1} = y_n + ((y_n)^2 + 1)(x_{n+1} - x_n)$$

Vi er interessert i å beregne $y(1)$. Vi deler opp intervallet mellom 0 og 1 i små deler og bruker lineær approksimasjon i hvert lille delintervall. I første forsøk lar vi antall deler være 10 og alle delintervallene like store. Det gir

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{10}, x_2 = \frac{2}{10}, \dots, x_9 = \frac{9}{10}, x_{10} = 1$$

Vi har at $y_0 = y(0) = 0$ i tillegg rekursjonen

$$y_{n+1} = y_n + ((y_n)^2 + 1)(x_{n+1} - x_n)$$

Dette gir for de første leddene

$$\begin{aligned}y_1 &= 0 + (0^2 + 1)\frac{1}{10} = 0.1 \\ y_2 &= 0.1 + (0.1^2 + 1)\frac{1}{10} = 0.201 \\ y_3 &= \dots\end{aligned}$$

og etter litt regning $y(1) \approx 1.3964$.

I andre forsøk lar vi antall deler være 100, fortsatt like store. Det gir

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{100}, x_2 = \frac{2}{100}, \dots, x_{99} = \frac{99}{100}, x_{100} = 1$$

og

$$\begin{aligned}y_1 &= 0 + (0^2 + 1) \frac{1}{100} = 0.01 \\y_2 &= 0.01 + (0.01^2 + 1) \frac{1}{10} \approx 0.02 \\y_3 &= \dots\end{aligned}$$

Denne gangen blir svaret $y(1) \approx 1.5370$. En enda finere oppdeling, i 1000 deler, gir oss $y(1) \approx 1.5553$, og nok en gang kan det virke som om vi begynner å nærme oss en rett verdi.

Vi skal løse differensiallikningen via rekkeutvikling. Likningen er altså gitt ved

$$y' - y^2 = 1 \quad y(0) = 0$$

Vi lar $y = \sum a_n x^n$, hvor vi ikke kjenner a_n , men vi skal prøve å regne dem ut. Dette gir $y' = \sum n \cdot a_n x^{n-1}$ og

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = 1$$

Vi sammenlikner koeffisienter foran like grader av x og får

$$\begin{aligned}a_1 - a_0^2 &= 1 \\2a_2 - 2a_0a_1 &= 0 \\3a_3 - 2a_0a_2 - a_1^2 &= 0 \\4a_4 - 2a_0a_3 - 2a_1a_2 &= 0 \\&\dots\end{aligned}$$

Siden vi vet at $y(0) = a_0 = 0$ kan vi beregne alle a_n rekursivt.

$$\begin{aligned}a_0 &= 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = 0, a_5 = \frac{2}{15}, a_6 = 0 \\a_7 &= \frac{17}{315}, a_8 = 0, a_9 = \frac{62}{2835}, a_{10} = 0, a_{11} = \frac{1382}{155925}, \dots\end{aligned}$$

Dette gir oss et Taylorpolynom av grad 11 for løsningen gitt ved

$$T(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11}$$

som gir

$$\begin{aligned}y(1) &\approx T(1) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{17}{315} + \frac{62}{2835} + \frac{1382}{155925} \\&\approx 1.551\end{aligned}$$

Dette passer godt med den verdien vi har funnet tidligere. På tilsvarende måte kan vi finne alle verdier for $f(x)$.

Oppgaver til kapittel 4

Oppgave 1. *Vi har gitt en differensiallikning*

$$y' = y + 1 \quad y(0) = 1$$

- a) Finn en tilnærmet løsning for $y(\frac{1}{2})$ ved rekkeutviklingsmetoden. Bruk $n = 3$
- b) Finn en tilnærmet løsning for $y(\frac{1}{2})$ ved lineær interpolasjon med 5 like store delintervaller.
- c) Finn en eksakt løsning av likningen og sammenlikn svarene.

Oppgave 2. Vi har gitt en differensiallikning

$$y' = -2xy \quad y(0) = 1$$

- a) Finn en tilnærmet løsning for $y(\frac{1}{2})$ ved rekkeutviklingsmetoden. Bruk $n = 4$
- b) Finn en tilnærmet løsning for $y(\frac{1}{2})$ ved lineær interpolasjon med 10 like store delintervaller.
- c) Finn en eksakt løsning ved å separere variable og sammenlikn svarene.

Oppgave 3. Vi har gitt en differensiallikning

$$y' = x + xy \quad y(0) = 0$$

- a) Finn en tilnærmet løsning for $y(1)$ ved rekkeutviklingsmetoden. Bruk $n = 4$
- b) Finn en tilnærmet løsning for $y(1)$ ved lineær interpolasjon med 5 like store delintervaller.
- c) Finn en eksakt løsning av likningen og sammenlikn svarene.

Oppgave 4. Vi har gitt en differensiallikning

$$y' = y^2 + x \quad y(0) = 1$$

- a) Finn en tilnærmet løsning for $y(\frac{1}{2})$ ved rekkeutviklingsmetoden. Bruk $n = 4$
- b) Finn en tilnærmet løsning for $y(\frac{1}{2})$ ved lineær interpolasjon med 10 like store delintervaller.

Oppgave 5. Vi har gitt en differensiallikning

$$y' = y - x \quad y(0) = 2$$

- a) Finn en tilnærmet løsning for $y(1)$ ved rekkeutviklingsmetoden. Bruk $n = 4$
- b) Finn en tilnærmet løsning for $y(1)$ ved lineær interpolasjon med 10 like store delintervaller.
- c) Finn en eksakt løsning av likningen og sammenlikn svarene.

Oppgave 6. Vi har gitt en differensiallikning

$$y' - y = \frac{1}{1-x} \quad y(0) = -1$$

a) Finn en tilnærmet løsning for $y(\frac{1}{2})$ ved rekkeutviklingsmetoden. Bruk $n = 6$ og husk at $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ for $|x| < 1$.

b) Finn en tilnærmet løsning for $y(\frac{1}{2})$ ved lineær interpolasjon med 10 like store delintervaller.

Oppgave 7. Vi har gitt en differensiallikning

$$(1-x)y'' = 2y'y \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

Finn en tilnærmet løsning for $y(\frac{1}{3})$ ved rekkeutviklingsmetoden. Bruk $n = 6$.

Kapittel 5

Funksjoner i flere variable

Vi er ferdig med en-variabel-teorien, og vi kan begynne å jobbe med funksjoner i flere variable. Det første vi skal gjøre er å gå gjennom den samme analysen vi gjør for funksjoner i en variabel, og se hvordan dette ser ut når vi har flere variable. Hovedfokus er introduksjon av partiell derivasjon. Det skal vi bruke til å finne maksimums- og minimumspunkter og til å definere kritiske punkter. I tillegg skal vi se hvordan vi kan generalisere andre-derivert-testen for funksjoner i en variabel til funksjoner i to variable, gjennom det som kalles Hesse-matrisen.

5.1 Definisjoner og eksempler

Definisjon 5.1.1. *En avbildning*

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

kalles en funksjon i n variable og vi skriver $y = f(x_1, \dots, x_n)$.

Eksempel 5.1.1. *Funksjonen $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1x_2 - 2x_2^2$ er en funksjon i to variable.*

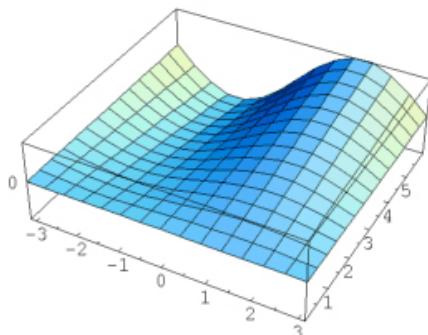
Eksempel 5.1.2. *Funksjonen $T(x_1, x_2, x_3)$ som til hvert punkt i rommet tilordner temperaturen i akkurat det punktet er en funksjon i tre variable.*

Merk at i tilfellene hvor vi har 2 eller 3 variable, så bruker vi ofte x, y eller x, y, z som navn på variablene. Dersom vi har flere enn 3 variable vil vi normalt kalle variablene x_1, x_2, \dots

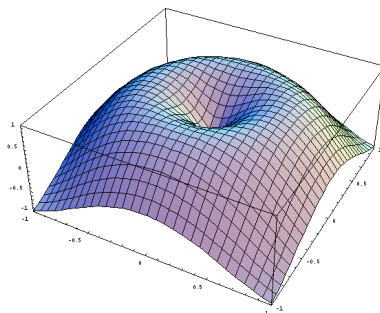
Grafen til en funksjon f i n variable er gitt ved punktmengden

$$\{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$$

Grafen til en funksjon i to variable illustrerer vi med en flate i rommet.



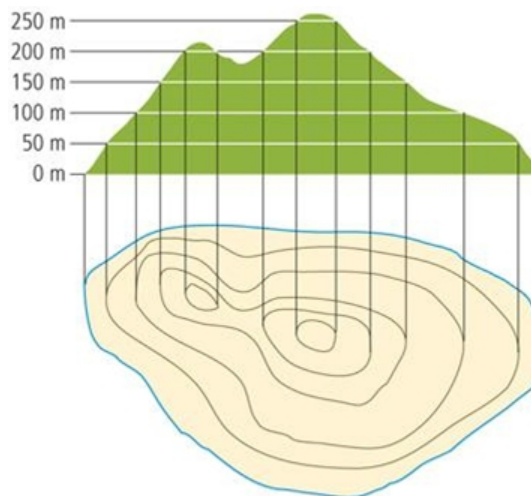
Figur 5.1. Grafen til funksjonen $z = f(x, y) = \frac{y}{6} \cdot \sin x$.



Figur 5.2. Grafen til funksjonen $z = f(x, y) = \sin(\pi \cdot \sqrt{x^2 + y^2})$.

5.2 Nivåmengder

En illustrativ måte å beskrive funksjoner i to (eller flere) variable er ved å se på funksjonens **nivåkurver**. Nivåkurvene til en flate er kurver langs hvilke funksjonen er konstant. Et eksempel på nivåkurver er høydekurvene på et kart. I det tilfellet måler funksjonen i et punkt høyden over havet i punktet. Nivåkurvene er kurver hvor vi har konstant høyde. Det betyr at dersom vi beveger oss langs en høydekurve, så går vi verken opp eller ned, men holder oss på samme nivå.

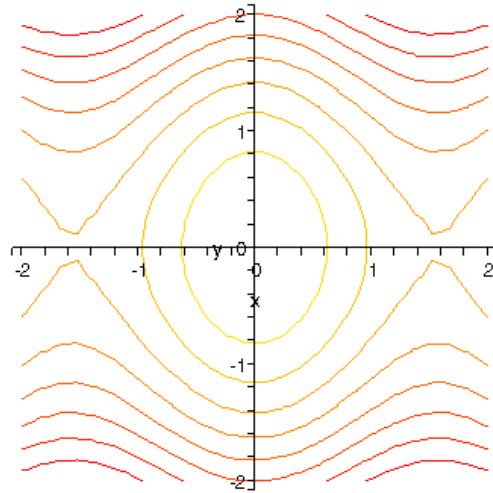


Figur 5.3. Høydekurver

Definisjon 5.2.1. En **nivåmengde** for en funksjon $y = f(x_1, \dots, x_n) = f(\underline{x})$ for et reelt tall c er delmengden av \mathbb{R}^n gitt ved $\{(\underline{x}) \in \mathbb{R}^n \mid f(\underline{x}) = c\}$. Nivåmengdene kalles **nivåkurver** når $n = 2$ og **nivåflater** når $n = 3$.

Eksempel 5.2.1. La (x, y) være et punkt på kartet og la $f(x, y)$ måle høyden over havet i dette punktet. Høydekurvene på kartet er nivåkurver for denne funksjonen, slik det er illustrert i eksemplet over.

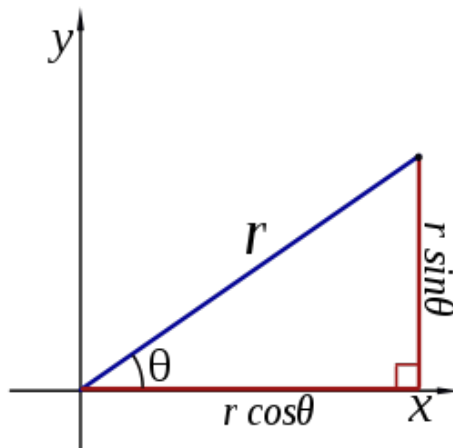
Eksempel 5.2.2. Vi skal beskrive nivåkurvene til $f(x, y) = \cos(2x) - y^2$. Vi setter $f(x, y) = \cos(2x) - y^2 = C$, dvs. $\cos(2x) = y^2 + C$. For varierende x vil $\cos(2x)$ alltid ligge mellom -1 og 1 , og $y^2 = \cos(2x) - C$ må derfor ligge mellom $-1 - C$ og $1 - C$. Siden $y^2 \geq 0$ følger det at nivåkurvene forsvinner for $1 - C < 0$, dvs. for $C > 1$. Dersom den minste verdien, $-1 - C > 0$, altså $C < -1$, så kan vi for alle verdier av x finne to verdier av y slik at $\cos(2x) - y^2 = C$. Dermed gjenstår intervallet $-1 \leq C \leq 1$. I dette området kan vi løse $\cos(2x) - y^2 = C$ med hensyn på y for bare noen verdier av x . Dette forklarer de lukkede (sirkulære) nivåkurvene kontra de utstrukne.



Figur 5.4. *Nivåkurver for $f(x, y) = \cos(2x) - y^2$*

5.3 Polarkoordinater

Hittil har vi alltid angitt punkter i planet ved hjelp av rektangulære (kartesiske) koordinater $P = (x, y)$. En annen måte å beskrive punkter er ved å bruke polarkoordinater. Det gjør vi på følgende måte. La $P \neq (0, 0)$ være et punkt i planet, utenfor origo. Anta at linjestykket som forbinder origo og P har lengde $r > 0$, og danner en vinkel θ med den positive x -aksen.



Figur 5.5. *Polarkoordinater*

De to tallene r og θ kalles **polarkoordinatene** til P . De er relatert til de kartesiske koordinatene ved

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

Det positive tallet r kalles den **radiale avstanden**, eller bare **avstanden** til P og θ kalles **vinkelen** til P . Vi merker oss at samme punkt kan ha mange vinkler, siden et tillegg til vinkelen på 2π vil gi samme punkt. Stort sett vil vi bruke vinkelen som ligger i intervallet $[0, 2\pi)$, selv om vi av og til blir tvunget til å forholde oss til de andre mulige vinklene. Avstanden til et punkt P er entydig bestemt av x og y ved at $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, mens vi beregner vinkelen ut i fra relasjonene

$$\cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r}$$

Når det gjelder origo, har vi selvfølgelig at $r = 0$, og alle vinkler vil være brukbare.

For en ikke-negativ funksjon f definert på et intervall $[a, b]$ kaller vi alle punkter med polarkoordinater (r, θ) der $r = f(\theta)$ for grafen til f i polarkoordinater, og likningen $r = f(\theta)$ kalles den **polare likningen** til denne grafen.

For en del kurver i planet er det mye lettere, og mer praktisk, å bruke polarkoordinater framfor kartesiske koordinater. Dette gjelder spesielt kurver som har en form for *sirkulært* utseende. For eksempel vil en sirkel, med kartesisk likning $x^2 + y^2 = 9$, være gitt av den mye enklere polare likningen $r = 3$.

Eksempel 5.3.1. *Lemniskaten (se figur) har kartesiske koordinater gitt ved likningen*

$$(x^2 + y^2)^2 = a(x^2 - y^2)$$

for en positiv verdi av a . Setter vi inn $x = r \cos \theta$ og $y = r \sin \theta$ får vi på venstre side

$$(x^2 + y^2)^2 = r^4$$

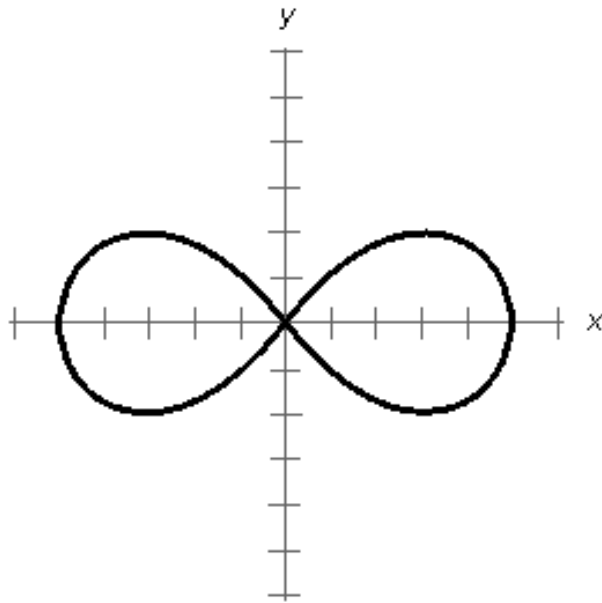
og på høyre side,

$$a(x^2 - y^2) = a(r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) = ar^2 \cos 2\theta$$

Så den polare likningen til lemniskaten blir

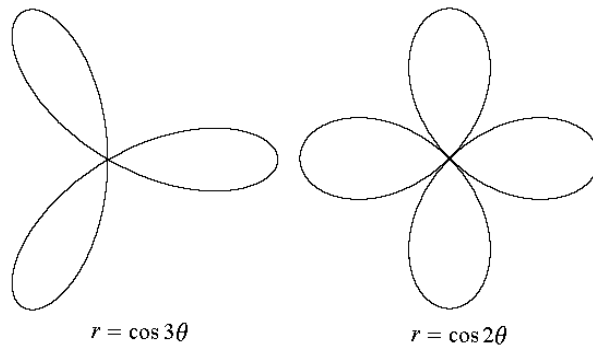
$$r = \sqrt{a \cos 2\theta}$$

hvor vi begrenser definisjonsområdet til de θ der $\cos 2\theta \geq 0$.



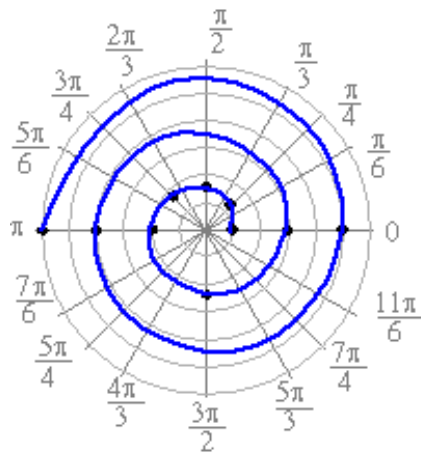
Figur 5.6. Lemniskaten $r = \sqrt{a \cos 2\theta}$.

Vi tar med et par andre eksempler også, figuren under viser et trekløver og et firkløver, gitt ved likningene $r = \cos 3\theta$ og $r = \cos 2\theta$,



Figur 5.7. Trekløver og firkløver.

og likningen $r = a\theta + b$ for ulike valg av a og b gir oss en spiral.



Figur 5.8. En spiral, $r = a\theta + b$.

5.4 Partiell derivasjon

Vi kan generalisere begrepet derivasjon til funksjoner i flere variable. Ideen er at vi tenker oss at alle bortsett fra en av de variable er konstanter. Vi betrakter så denne funksjonen som en funksjon i en variabel. Vanlig derivasjon med hensyn på denne variabelen kalles **partiell derivasjon**. Partiell derivasjon med hensyn på en variabel x_i , uttrykker funksjonens endring i retningen langs med x_i -aksen.

Definisjon 5.4.1. La $y = f(x_1, \dots, x_n)$ være en funksjon i n variable. Den i -te partiellderiverte av f er gitt ved

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\Delta x}$$

dvs. at vi lar alle x_j , $j \neq i$ opptre som konstanter og deriverer med hensyn på x_i .

Eksempel 5.4.1. La $f(x, y) = \cos(2x) - y^2 + xy$. Da har vi

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -2 \sin(2x) + y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2y + x \end{aligned}$$

Nå kan vi la $x = 0$, og se på funksjonen $g(y) = f(0, y) = 1 - y^2$. Den deriverte av denne funksjonen er $g'(y) = -2y$. Dette er det samme som vi får ved å sette inn $x = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$. Tilsvarende kan vi se på $h(x) = f(x, 1) = \cos(2x) - 1 + x$. Den deriverte av denne er $h'(x) = -2 \sin(2x) + 1$, som er det samme som den partiellderiverte av f med hensyn på x , innsatt $y = 1$.

Eksempel 5.4.2. La $f(x, y) = \cos(xy)$. Da har vi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(xy) \cdot y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(xy) \cdot x$$

Nå kan vi fortsette å derivere funksjonen i eksemplet, det gir oss 4 muligheter

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\cos(xy) \cdot y^2 \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\cos(xy) \cdot xy - \sin(xy) \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} &= -\cos(xy) \cdot xy - \sin(xy) \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} &= -\cos(xy) \cdot x^2\end{aligned}$$

Vi observerer at de to i midten er like.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\cos(xy) \cdot xy - \sin(xy) \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} &= -\cos(xy) \cdot xy - \sin(xy)\end{aligned}$$

Tilfeldighet? Nei. Det er alltid slik at dersom vi først derivere en funksjon med hensyn på en variabel x_i , for deretter å derivere med hensyn på en annen variabel x_j , så blir resultatet det samme som dersom vi gjør operasjonene i motsatt rekkefølge.

Teorem 5.4.2. *Kryssderivasjon er uavhengig av rekkefølge:*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Bevis. Følger nokså direkte ved å bruke definisjonen av de partiellderiverte. \square

Vi skal bruke notasjonen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

og hvis $x_i = x_j = x$;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Eksempel 5.4.3. *La $f(x, y) = x^3 + xy - y^2$. Da har vi*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x - 2y$$

Høyere ordens deriverte

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

Partiell derivasjon følger i store trekk de samme regnereglene som vanlig derivasjon. Den deriverte av en sum er summen av de deriverte, den deriverte av en konstant er 0 og produktregelen gjelder. Den regelen som trenger noe presisering er kjernerregelen. Vi skal formulere resultatet i den konteksten vi kommer til å trenge det, men det lar seg også generalisere ytterligere.

Theorem 5.4.3. La $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ og $g = (g_1, \dots, g_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. La $h = f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ være den sammensatte funksjonen. dvs. $h(t) = f(g(t))$ er en funksjon i en variabel t . Da har vi

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dg_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dg_n}{dt}$$

Bevis. Vi skriver

$$g(t + \Delta t) = (g_1(t + \Delta t), \dots, g_n(t + \Delta t)) = (g_1(t) + \Delta g_1, \dots, g_n(t) + \Delta g_n)$$

hvor $\Delta g_i \rightarrow 0$ når $t \rightarrow 0$. Det gir

$$\begin{aligned} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} &= \frac{f(g(t + \Delta t)) - f(g(t))}{\Delta t} \\ &= \frac{f(g_1(t) + \Delta g_1, \dots, g_n(t) + \Delta g_n) - f(g(t))}{\Delta t} \\ &= \frac{f(g(t) + (\Delta g_1, \dots, \Delta g_n)) - f(g(t))}{\Delta t} \end{aligned}$$

Vi skal bruke notasjonen $\Delta g^j = (\Delta g_1, \dots, \Delta g_j, 0, \dots, 0)$. Da har vi

$$\begin{aligned} f(g(t) + (\Delta g_1, \dots, \Delta g_n)) - f(g(t)) \\ = \sum_{i=1}^n f(g(t) + \Delta g^i) - f(g(t) + \Delta g^{i-1}) \end{aligned}$$

og derfor

$$\begin{aligned} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} &= \frac{f(g(t + \Delta t)) - f(g(t))}{\Delta t} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{f(g(t) + \Delta g^i) - f(g(t) + \Delta g^{i-1})}{\Delta g_i} \cdot \frac{g_i(t + \Delta t) - g_i(t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

Når vi lar $\Delta t \rightarrow 0$ vil dette uttrykket gå mot summen som er gitt i teoremet. \square

Eksempel 5.4.4. Funksjonen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ er gitt ved $g(t) = (t^2, t^3)$ og $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f(x, y) = \sqrt{x + y}$. La $h(t) = f(g(t)) = \sqrt{t^2 + t^3}$. Da har vi

$$h'(t) = \frac{1}{2}(t^2 + t^3)^{-\frac{1}{2}}(2t + 3t^2)$$

Dersom vi bruker formelen for den utvidede kjerneregelen, får vi

$$h'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x+y}} 2t + \frac{1}{2\sqrt{x+y}} 3t^2$$

som ved innsetting for x og y gir oss samme uttrykk som over.

Eksempel 5.4.5. La $g(t) = (1, t, e^t)$ og $f(x, y, z) = xy + \ln z$. Sett $h(t) = f(g(t))$. Da har vi

$$\begin{aligned} h'(t) &= y(t) \cdot 0 + x(t) \cdot 1 + \frac{1}{z(t)} \cdot e^t \\ &= t \cdot 0 + 1 \cdot 1 + \frac{1}{e^t} \cdot e^t = 2 \end{aligned}$$

som stemmer overens med det vi får dersom vi regner ut uttrykket for h før vi deriverer. I det tilfellet har vi $h(t) = 1 \cdot t + \ln e^t = 2t$.

5.5 Lokale ekstremalpunkter

Vi starter med den lokale teorien, dvs. at vi analyserer funksjonenes lokale egenskaper. Lokale egenskaper til en funksjon er egenskaper som måles i punkter og små omegner om dem. Vi skal gjøre teorien for funksjoner i to variable, men det er ikke noe forskjell å jobbe med flere variable.

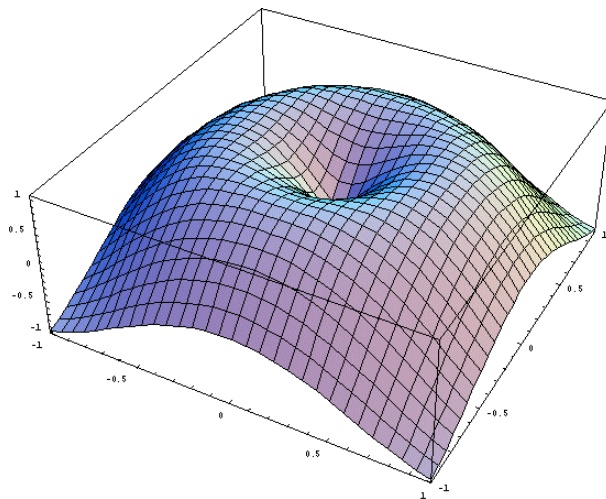
Definisjon 5.5.1. *Det er to typer lokale ekstremalpunkter:*

- i) Funksjonen $z = f(x, y)$ har et **lokalt minimum** i (a, b) dersom $f(a, b)$ er mindre enn eller lik $f(x, y)$ for alle (x, y) i nærheten av (a, b) .
- ii) Funksjonen $z = f(x, y)$ har et **lokalt maksimum** i (a, b) dersom $f(a, b)$ er større enn eller lik $f(x, y)$ for alle (x, y) i nærheten av (a, b) .

Merk at vi bruker samme notasjon for et punkt (a, b) og et åpent intervall (a, b) . Det vil (forhåpentligvis) alltid framgå av sammenhengen hvilken notasjon som gjelder.

Eksempel 5.5.1. *Funksjonen $f(x, y) = x^2 + y^2$ har et lokalt minimum i $(0, 0)$ siden $f(0, 0) = 0$ og $x^2 + y^2 > 0$ når x og y ikke begge er 0. Funksjonen $f(x, y) = x^2 + y^2$ har ikke noen lokale maksimumpunkter siden funksjonsverdien vokser over alle grenser når vi beveger oss vekk fra origo.*

Eksempel 5.5.2. *Funksjonen $z = \sin(\pi \cdot \sqrt{x^2 + y^2})$ har et lokalt minimum i $(0, 0)$ og lokale maksima i $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ (pluss mange flere som vi ikke ser på figuren). Dette følger siden $g(0, 0) = 0$ og $g(x, y) = \sin(\pi \cdot \sqrt{x^2 + y^2}) > 0$ i nærheten av origo. På sirkelen $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ har vi at $z = \sin(\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{4}}) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$, som opplagt er maksimumsverdi for en sinus-funksjon.*



På samme måte som vi for en funksjon i en variabel leter etter ekstremalpunkter der den deriverte av funksjonen er 0, kan vi lete etter ekstremalpunkter for en funksjon i flere variable der alle de partielt deriverte er 0.

5.6 Kritiske punkter

Vi kan generalisere begrepet kritisk punkt til teorien for funksjoner i flere variable.

Definisjon 5.6.1. Et punkt $(x, y) = (a, b)$ kalles et **kritisk punkt** dersom de partiellderiverte i punktet enten ikke eksisterer eller er 0.

Eksempel 5.6.1. Vi deriverer funksjonen $f(x, y) = \sin(\pi \cdot \sqrt{x^2 + y^2})$ og får

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \cos(\pi \cdot \sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \frac{\pi x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \cos(\pi \cdot \sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \frac{\pi y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\end{aligned}$$

Det er lett å se at begge de partiellderiverte er 0 når $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}$, mens det ikke er fullt så enkelt å se at de blir 0 når $x = y = 0$. Men det gjør de og vi har kritiske punkter både for $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}$ og for $(x, y) = (0, 0)$.

Ofte vil det være sammenfall mellom ekstremalpunkter og kritiske punkter, men ikke alltid.

Teorem 5.6.2. Dersom $f(x, y)$ har et lokalt maksimum eller lokalt minimum i (a, b) , så er (a, b) et kritisk punkt.

Bevis. Anta at $f(x, y)$ har et lokalt maksimum i (a, b) . Det betyr at $f(x, y) - f(a, b) \leq 0$ for alle (x, y) i nærheten av (a, b) . Anta videre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \approx \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} > 0$$

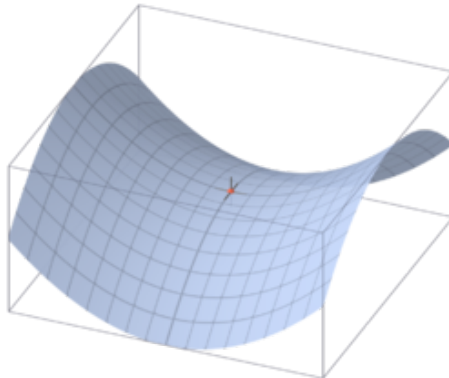
for alle små $h > 0$. Dette gir en motsigelse siden vi har antatt at $f(a + h, b) - f(a, b) \leq 0$. Anta så at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \approx \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} < 0$$

denne gangen for alle små $h < 0$. Igjen får vi en motsigelse. \square

I motsetning til en-variabel-teorien kan vi i fler-variabel-tilfellet ha et slags blandet tilfelle:

Eksempel 5.6.2. Vi ser på grafen til funksjonen $z = x^2 - y^2$.



Figur 5.9. *Et sadelpunkt.*

Punktet $(0, 0)$ er et kritisk punkt. Det er et minimumspunkt dersom vi beveger oss gjennom det langs med x -aksen, og et maksimumspunkt langs med y -aksen.

Slike punkter kalles **sadelpunkt**, oppkalt etter sadelen på en hesterygg. Et sadelpunkt er et kritisk punkt på grafen til f , som verken er et lokalt maksimumspunkt eller et lokalt minimumspunkt. Det gir oss tre forskjellige typer kritiske punkter for en funksjon $f(x, y)$, lokale minimum, lokale maksimum og sadelpunkter. For å finne ut hva slags punkt vi har, skal vi se på de andrederiverte til funksjonen i det aktuelle punktet. For et punkt (a, b) lar vi $H(a, b)$ betegne uttrykket

$$\begin{aligned} H(a, b) &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \right)^2 \end{aligned}$$

den såkalte **Hesse-determinanten**. Vi har følgende resultat (som vi gir uten å føre et bevis)

Teorem 5.6.3. *La $f(x, y)$ være en funksjon i to variable. Da har vi*

Dersom $H(a, b) > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$, så er (a, b) et lokalt minimumspunkt.

Dersom $H(a, b) > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$, så er (a, b) et lokalt maksimumspunkt.

Dersom $H(a, b) < 0$, så er (a, b) et sadelpunkt.

Dersom $H(a, b) = 0$ sier ikke denne testen oss noe.

Eksempel 5.6.3. *Vi studerer funksjonen $f(x, y) = x^2 - y^2$. de partielt deriverte er gitt ved*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

Det betyr at vi har et kritisk punkt for $(x, y) = (0, 0)$. I dette punktet har vi $H = 2 \cdot (-2) - 0^2 = -4 < 0$, som gir at det kritiske punktet er et sadelpunkt.

Eksempel 5.6.4. *Se på funksjonen $f(x, y) = x^3 - y^2 + xy$. Vi setter de partielt deriverte $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + x$ til å være lik 0, noe som gir oss kritiske punkter $(0, 0)$ og $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$. Vi regner ut*

$$H(x, y) = 6x \cdot (-2) - 1^2 = -12x - 1$$

Dette gir $H(0, 0) = -1$ og $H(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}) = 1$. Samtidig har vi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}) = -1 < 0$. Det betyr at $(0, 0)$ er et sadelpunkt og $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$ er et lokalt maksimum.

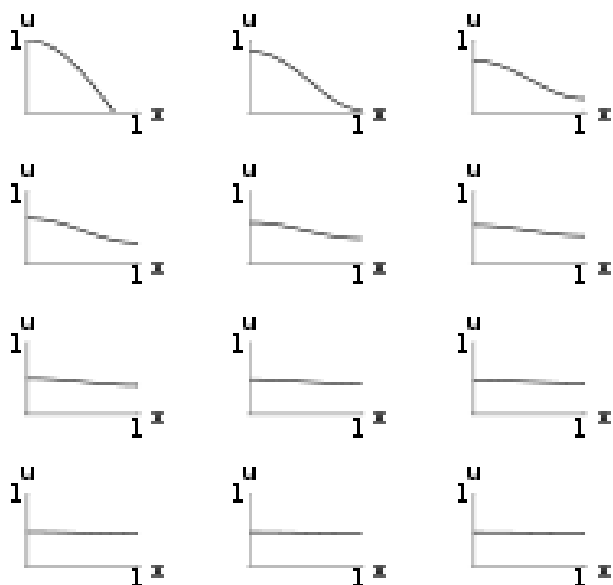
5.7 Varme- og bølgelikningene*

Partielle differensiallikninger er differensiallikninger der det inngår partiellderivate. Vi skal ta med to eksempler på slike likninger, mest for å vise styrken i denne teorien som grunnlag for å modellere fysiske prosesser.

Eksempel 5.7.1. *Varmelikningen er en differensiallikning som beskriver hvordan varme (energi) forplanter seg gjennom et legeme. I det 1-dimensjonale tilfellet beskriver den hvordan varme forplanter seg gjennom en tynn metallstav, når vi varmer opp den ene enden. Vi lar staven befinne seg på x -aksen, med det ene endepunktet i origo og det andre i $x = 1$. Så varmer vi opp origo-enden og ser hva som skjer. Vi betegner med $u(x, t)$ temperaturen i punktet x på staven på tidspunktet t og α betegner den såkalte **varmediffusiviteten**. Da har vi differensiallikningen*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

Denne likningen er i prinsippet svært vanskelig å løse, men vi kan illustrere hva som skjer over tid:



Til å begynne med er den ene enden varm og den andre kald. Etter hvert vil varmen strømme fra den varme til den kalde enden slik likningen beskriver. Til slutt vil temperaturen i staven være jevnt fordelt over det hele.

Eksempel 5.7.2. *Den 1-dimensjonale bølgelikningen er gitt ved*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

der $u(x, t)$ betegner bølgeutslaget i posisjonen x ved tiden t , og c er en konstant. Likningen har mange forskjellige løsninger, avhengig av hva som er utgangs-

punktet. F.eks. ser vi at funksjonen $u(x, t) = \sin(x + ct)$ oppfyller

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c^2 \sin(x + ct)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin(x + ct)$$

og derfor er en løsning. Denne funksjonen beskriver en harmonisk svingning som beveger seg i en retning.

5.8 Minste kvadraters metode

Forventet levealder for nyfødte jentebarn i Norge har utviklet seg slik de siste årene:

2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
81,53	81,52	81,93	82,33	82,52	82,66	82,66	82,95

Vi skal bruke det som kalles minste kvadraters metode til å finne en formel som beskriver disse tallene. Vi lar x være år og y være forventet levealder. Hypotesen vår er at det er en lineær sammenheng mellom disse, dvs. $y = ax + b$. Vi indekserer de 8 dataparene fra 1 til 8, slik at f.eks. $(x_3, y_3) = (2003, 81.93)$. For hvert par beregner vi avviket fra den antatte rette linja, gitt ved $ax_i + b - y_i$. Disse tallene kvadrerer vi og summerer over $i = 1, 2, \dots, 8$. Derneft skal vi finne de koeffisientene a og b slik at denne kvadratsummen blir minst mulig.

For å gjøre regningene litt enklere bruker vi år 1,2,3 osv. Kvadratsummen blir

$$\sum_{i=1}^8 (ax_i + b - y_i)^2 = a^2 \sum_{i=1}^8 x_i^2 + 2ab \sum_{i=1}^8 x_i + \sum_{i=1}^8 b^2$$

$$- 2a \sum_{i=1}^8 x_i y_i - 2b \sum_{i=1}^8 y_i + \sum_{i=1}^8 y_i^2$$

Vi setter inn verdiene og får dette kvadratiske avviket som en funksjon i a og b gitt ved

$$Q(a, b) = 204a^2 + 72ab + 8b^2 - 5941a - 1316b + 54139$$

Vi skal finne minimum for denne funksjonen. Vi partiellderiverer med hensyn på a og b og setter uttrykkene lik 0. Det gir

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = 408a + 72b - 5941$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = 72a + 16b - 1316$$

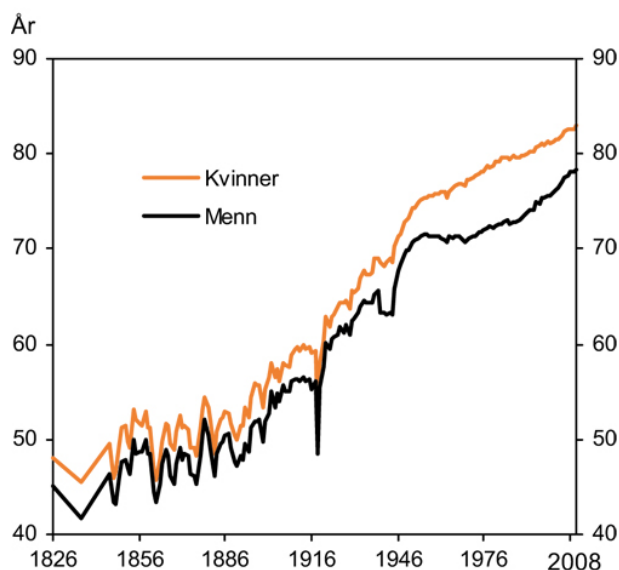
som gir $a = 0, 226$ og $b = 81, 23$ og forventet levealder som en funksjon av årstall blir

$$y = 0, 226(x - 2000) + 81, 23 = 0, 226x - 370, 77$$

Sammenlikner vi med de oppgitte tallene får vi

2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
81,53	81,52	81,93	82,33	82,52	82,66	82,66	82,95
81,46	81,68	81,91	82,13	82,36	82,59	82,81	83,04

Forventet levealder ved fødselen



Figur 5.10. *Utvikling av forventet levealder.*

Vi kan sette inn $x = 1866$ som er SSBs første registrering. Det gir forventet levealder $y = 50,95$, mens SSB oppgir $50,65$ som gjennomsnitt for perioden 1866-1870. Vår lineære tilnærming er altså ut til å stemme godt. I den motsatte tidsretning ser vi at $y = 100$ gir $x = 2083$, så med samme utvikling vil jentebarn født i 2083 ha en forventet levealder på 100 år.

Gjør vi den samme analysen i en generell setting får vi ut likninger for a og b ;

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

som kan brukes i alle eksempler.

Eksempel 5.8.1. *Gitt følgende data for korresponderende høyde og vekt for jentebarn i alderen 5-10 år. Vi skal finne en best mulig lineær sammenheng.*

x	105	110	118	123	128	132	138	144
y	17.1	19.0	20.8	23.0	25.0	27.5	30.5	35.0

Vi regner ut $\sum x_i = 998$, $\sum y_i = 197.9$, $\sum x_i^2 = 125766$ og $\sum x_i y_i = 25247.9$.
 Setter vi $\sum x_i = 998$, $\sum y_i = 197.9$, $\sum x_i^2 = 125766$ og $\sum x_i y_i = 25247.9$ inn i

formelen får vi

$$\begin{aligned} a &= \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \\ &= \frac{8 \cdot 25247.9 - 998 \cdot 197.9}{8 \cdot 125766 - (998)^2} \approx 0.4424 \\ a &= 0.4424 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n} \\ &= \frac{197.9 - 0.4424 \cdot 998}{8} = -30.5 \end{aligned}$$

Det gir sammenhengen $y = 0.4424x - 30.5$ for dataene. For hver centimeter jentene i denne aldersgruppen vokser i høyden, så blir de i gjennomsnitt 442,4 gram tyngre.

Oppgaver til kapittel 5

Oppgave 1. Skisser noen nivåkurver for de oppgitte funksjonene over rektangelet $[-2, 2] \times [-2, 2]$. Forsøk også å tegne grafen.

- a) $f(x, y) = x + 2$
- b) $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$
- c) $f(x, y) = y^2 - x^2$

Oppgave 2. Skisser noen nivåkurver for de oppgitte funksjonene over rektangelet $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

- a) $f(x, y) = e^{xy}$
- b) $f(x, y) = \sin^2(\pi x) + \cos(\pi y)$

Oppgave 3. Lag en skisse av nivåkurvene til Cobb-Douglas produksjonsfunksjon

$$f(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$$

Oppgave 4. Skisser noen nivåkurver for funksjonen $f(x, y) = \frac{x}{y}$ over det halvåpne rektangelet $[-1, 1] \times (0, 1]$.

Oppgave 5. Regn ut alle partiellderiverte for funksjonene

- a) $f(x, y) = x^2 + y^3$
- b) $f(x, y) = x + \sin x + 1$
- c) $f(x, y) = x^2 y^2 + xy$

Oppgave 6. Regn ut alle partiellderiverte for funksjonene

- a) $f(x, y) = x \sin y + y \sin x$

b) $f(x, y) = e^{xy}$

c) $f(x, y) = \frac{x}{y} \quad y \neq 0$

Oppgave 7. Regn ut alle partiellderiverte for funksjonene

a) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 - \frac{1}{2}x_1^2x_3$

c) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$

Oppgave 8. Finn de dobbeltderiverte av funksjonene og regn ut $H(x, y)$.

a) $f(x, y) = x^2 + y^3$

b) $f(x, y) = xy$

c) $f(x, y) = x \sin y$

Oppgave 9. Finn de dobbeltderiverte av funksjonene og regn ut $H(x, y)$.

a) $f(x, y) = e^{x+y}$

b) $f(x, y) = \sin(xy)$

Oppgave 10. Finn de kritiske punktene til funksjonene

a) $f(x, y) = x^2 - 2xy$

b) $f(x, y) = (y + 1)e^x - e^y$

c) $f(x, y) = 1 - x^2$

Oppgave 11. Finn de kritiske punktene til funksjonene

a) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$

b) $f(x, y) = x^2y^2 - 2xy$

c) $f(x, y) = \ln xy + x - y$

Oppgave 12. Finn de kritiske punktene til funksjonene

a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

a) $f(x, y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$

a) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

Oppgave 13. Vis at blant alle rektangler med et gitt areal, så har kvadratet den minste omkretsen.

Oppgave 14. Gitt $S > 0$. Vis at blant alle tall x og y slik at $x + y = S$, så er summen $x^2 + y^2$ minst når $x = y$.

Oppgave 15. Dersom et firma produserer x artikler av en bestemt vare vil de kunne selge alle til en pris $p = 5 - 0,0005x$, $0 \leq x \leq 8000$. Produksjonskostnaden ved å produsere x artikler er $C(x) = 500 + x$. Fortjenesten blir da $f(x) = (5 - 0,0005x)x - (500 + x)$.

a) Hvor stor fortjeneste kan firmaet ha med disse varene?

Anta nå at to firmaer produserer samme vare til samme pris og konkurrerer om de samme kundene. Vi antar at de to firmaene produserer henholdsvis x og y artikler. Fortjenesten til firma 1 er gitt ved

$$f_1(x, y) = (5 - 0,0005(x + y))x - (500 + x)$$

og for firma 2

$$f_2(x, y) = (5 - 0,0005(x + y))y - (500 + y)$$

b) Anta at begge firmaene maksimerer sin fortjeneste. Hvor stor er den maksimale fortjeneste for hvert firma nå?

c) Dersom firmaene opptrer som en enhet utad og bare deler fortjenesten, hvor mye ville de da kunne tjene? Kommenter forskjellen på svarene i b) og c).

Oppgave 16. Et rektangel har hjørner $(0, 0)$, $(0, y)$, $(x, 0)$ og (x, y) . Vis at forholdet mellom kvadratet av omkretsen og arealet tar sin største verdi når $x = y$. Hvor stor er denne verdien? Sammenlikn også svarene med forholdet mellom kvadratet av omkretsen og arealet av en sirkel.

Oppgave 17. Vi antar at folkemengden $N = N(t)$ i Norge vokser eksponensielt, etter formelen

$$N(t) = Be^{at}$$

der a og B er konstanter og t er tiden. I vårt eksempel regner vi tiden i år og at 1. januar 1900 er 0. Vi skal se på logaritmen til denne funksjonen, gitt ved

$$\ln(N) = \ln(B) + at$$

Antakelsen om at veksten er eksponensiell gir at $\ln(N)$ vokser lineært med tiden. Følgende tall for befolkningstallet er observert:

t	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
N	2.96	3.25	3.57	3.68	4.08	4.23	4.48
$y = \ln(N)$	1.09	1.18	1.27	1.30	1.41	1.44	1.50

der befolkningstallene er i hele millioner. ($\sum t = 49$, $\sum t^2 = 371$, $\sum y = 9.19$, $\sum ty = 66.21$)

Bruk minste kvadraters metode til å finne en lineær sammenheng mellom tallene i første og tredje rad og bruk dette til å finne en formel for befolkningstallet. Når vil vi med denne modellen passere 5 millioner?

Oppgave 18. Et firma har de første 9 årene etter oppstart hatt omsetning slik det er beskrevet i tabellen:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9
z	0.8	1.0	1.4	1.9	2.0	2.6	3.5	4.4	4.7

hvor omsetningen er i hele millioner.

Bruk minste kvadraters metode til å finne en lineær sammenheng mellom omsetningen og t og bruk dette til å finne en formel for omsetningen. Hva sier modellen om omsetningen i år 10?

Kapittel 6

Vektoranalyse

Vektoranalyse dreier seg om å studere vektorfelt. Et vektorfelt er en funksjon i flere variable der funksjonsverdiene er vektorer. Eksempel på et vektorfelt er funksjonen som til et hvert punkt i atmosfæren tilordner vindstyrke og -retning. Retningen på vektoren er vindretningen og lengden av vektoren er vindstyrken. Et annet eksempel på et vektorfelt er retningsdiagrammet til en differensiallikning, der vi til et hvert punkt i planet tilordner vektoren $(1, y')$.

6.1 Vektorfelt

Definisjon 6.1.1. *En funksjon*

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

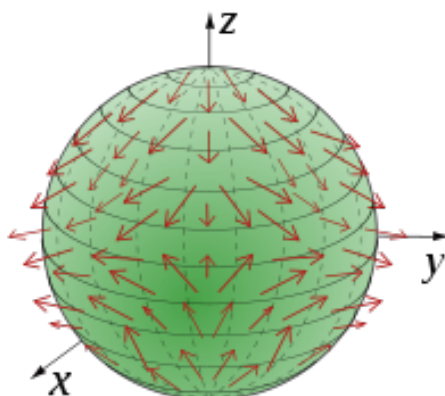
for to naturlige tall n, m kalles et **vektorfelt**.

Dersom $n = m = 1$ har vi en vanlig funksjon i en variabel. Dersom $m = 1$ og n vilkårlig har vi en funksjon i n variable. Et vektorfelt er en generalisering av begge disse begrepene. Et vektorfelt tilegner til et hvert punkt i \mathbb{R}^n et punkt (eller vektor) i \mathbb{R}^m . Vi skriver vektorfelt ved et tuppel av funksjoner

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

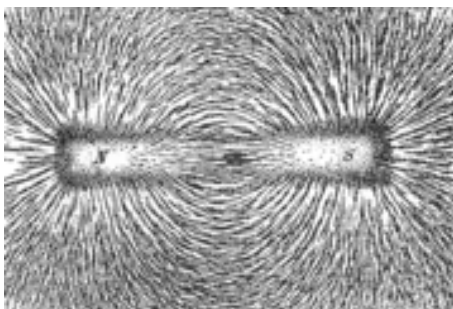
For eksempel kan et vektorfelt $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være gitt ved $F(x, y, z) = (x^2 + y^2, x^2 + z^2 - 2)$.

Eksempel 6.1.1. *Hvis vi setter $n = m = 3$ er et vektorfelt en funksjon som til hvert punkt i rommet tilordner en vektor i rommet. F.eks. vil en funksjon som i hvert punkt i atmosfæren angir vindretning (vektorens retning) og vindstyrke (lengden til vektoren) være et vektorfelt, det vil si, et felt av vektorer.*



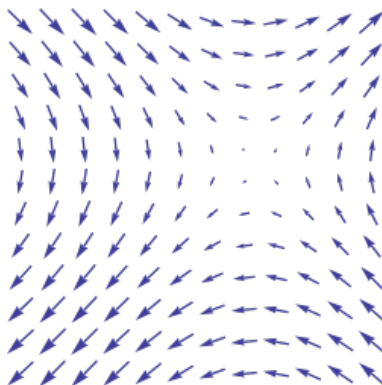
Figur 6.1. Vindfelt i atmosfæren.

Eksempel 6.1.2. Et magnetfelt kan beskrives av som et vektorfelt. Til et punkt i planet tilordner vi en vektor som angir magnetfeltets retning i dette punktet. Vi kan illustrere magnetfeltet ved å bruke jernfilspon oppå en glasplate med en magnet rett under. Sponet vil da tegne opp feltlinjene.



Figur 6.2. Et plant magnetfelt.

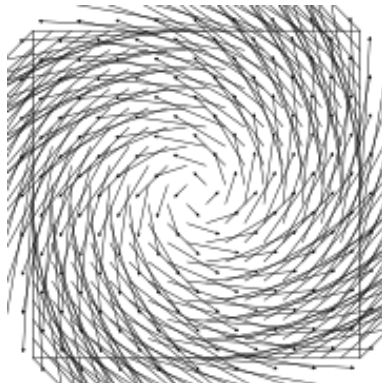
Eksempel 6.1.3. La $F(x, y) = (\sin y, \sin x)$ være et vektorfelt i planet. Vi kan illustrere feltet ved å tegne et passende utvalg av vektorer, en pil i et punkt (x, y) svarer til vektoren $(\sin y, \sin x)$.



Figur 6.3. $F(x, y) = (\sin y, \sin x)$.

Vi har $F(0,0) = (0,0)$ som svarer til den lyseste delen av diagrammet. Langs x -aksen vil pilene peke rett opp siden $F(x,0) = (0, \sin x)$, og langs y -aksen vil pilene være horisontale.

Eksempel 6.1.4. Vektorfeltet $F(x,y) = (-y, x)$ i planet kan illustreres slik:



Figur 6.4. Et spiralformet vektorfelt.

Feltet blir spiralformet med økende lengde på pilene etter hvert som vi beveger oss bort fra origo.

6.2 Gradient

I denne seksjonen tar vi utgangspunkt i en funksjon i flere variable og studerer hvordan funksjonen endrer seg. Endringen av en funksjon måles med **gradienten** til funksjonen.

Definisjon 6.2.1. La $f(x_1, \dots, x_n)$ være en funksjon i n variable. **Gradienten** til f er gitt ved

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Eksempel 6.2.1. Funksjonen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ har gradient $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$, altså et radialfelt.

Teorem 6.2.2. La $y = f(x_1, \dots, x_n)$ være en funksjon i n variable. Da vil ∇f være en vektor som peker i retningen hvor f vokser mest, dvs gradienten står normalt på nivåmengdene.

Bevis. La $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ være en kurve som er helt inneholdt i en nivåmengde for f , dvs. $F(t) = f(\gamma(t)) = C$ for alle t . Generaliseringen av kjerneregelen gir at

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \gamma'_1(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \gamma'_n(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

hvor produktet er vanlig skalarprodukt mellom vektorer. Siden $F(t) = C$ er konstant vil dette skalarproduktet være 0, som er det samme som at de to vektorene står normalt på hverandre. Men $\gamma(t)$ ligger helt inne i nivåmengden, og dens deriverte vil derfor være tangent til nivåmengden. Men når gradienten står

normalt på alle tangenter, står den normalt på hele mengden. Så gradienten står normalt på nivåmengdene. Funksjonen er konstant langs nivåmengdene og den retningen som gir størst endring er den retningen som er lengst fra å ligge i nivåkurvene, nemlig normalt på. \square

Eksempel 6.2.2. Gradienten til funksjonen $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ er $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$, mens nivåflatene er kuleskall gitt ved $x^2 + y^2 + z^2 = C$. Det stemmer godt med at $\nabla f = 2(x, y, z)$ står normalt på kuleskallene.

Eksempel 6.2.3. La $f(x, y, z) = xyz$. Da er $\nabla f = (yz, xz, xy)$.

Vi kan bruke gradienten til å beregne endringen av funksjonen i en gitt retning. Vi bruker følgende definisjon.

Definisjon 6.2.3. Den *retningsderiverte* til en funksjon $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i et punkt (a_1, \dots, a_n) i en retning $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ er gitt ved

$$f_{\mathbf{v}}(a_1, \dots, a_n) = \nabla f(a_1, \dots, a_n) \cdot \mathbf{v}$$

Den retningsderiverte til en funksjon gir presis stigningstallet til funksjonen i den aktuelle retningen. Vi skal ikke bevise dette resultatet generelt, men heller se på et eksempel.

Eksempel 6.2.4. Vi betrakter funksjonen $f(x, y) = 1 - xy + y^2$. Gradienten er gitt ved $\nabla f = (-y, -x + 2y)$. Vi skal studere hvordan funksjonen ser ut i punktet $(1, 1)$. Verdien av gradienten i dette punktet er $\nabla f(1, 1) = (-1, 1)$. Det betyr at funksjonen har sin største endring i retningen $(-1, 1)$.

La $y = ax + (1 - a)$. For alle verdier av a er dette en rett linje som går gjennom punktet $(1, 1)$ med stigningstall a . Vi kan restrikttere funksjonen $f(x, y)$ til denne linja, dvs. vi setter inn $y = ax + (1 - a)$ i funksjonsuttrykket. Det gir oss verdien av funksjonen langs denne linja, og vi kaller den $h(x)$. Vi har

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x, ax + (1 - a)) = 1 - x(ax + (1 - a)) + (ax + (1 - a))^2 \\ &= (a^2 - a)x^2 + (-2a^2 + 3a - 1)x + (a^2 - 2a + 2) \end{aligned}$$

Den deriverte av denne funksjonen er gitt ved

$$h'(x) = 2(a^2 - a)x + (-2a^2 + 3a - 1)$$

og $h'(1) = 2(a^2 - a) + (-2a^2 + 3a - 1) = a - 1$.

Retningen langs linja $y = ax + (1 - a)$ er gitt ved vektoren $\mathbf{v} = (1, a)$. Det gir

$$f_{\mathbf{v}}(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot (1, a) = (a - 1)$$

og vi ser at de to utregningsmåtene gir samme resultat.

Eksempel 6.2.5. Vi har gitt en funksjon $f(x, y, z) = (x^2 + yz + 2z^2 + 1)$ og er interessert i å finne den retningsderiverte av $f(x, y, z)$ i retningen $\mathbf{v} = (2, -1, 0)$ i punktet $P = (1, 1, 1)$.

Vi regner først ut gradienten til funksjonen, $\nabla f = (2x, z, y + 4z)$, og i punktet $\nabla f(1, 1, 1) = (2, 1, 5)$. Det gir retningsderivert i retningen $\mathbf{v} = (2, -1, 0)$ gitt ved

$$f_{(2, -1, 0)} = \nabla f(1, 1, 1) \cdot (2, -1, 0) = (2, 1, 5) \cdot (2, -1, 0) = 3$$

6.3 Konservative felt

I forrige avsnitt introduserte vi gradienten til en funksjon, som en naturlig generalisering av den deriverte til en funksjon i en variabel. Et naturlig spørsmål å stille i en slik sammenheng er om vi har noe vi kan kalle anti-derivasjon.

Problem 6.3.1. *Gitt et vektorfelt $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Kan vi finne en funksjon $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ slik at $F = \nabla f$?*

Dette er et svært viktig problem, og funksjoner som gir oss et ja-svar på spørsmålet har derfor fått et eget navn.

Definisjon 6.3.2. *Et vektorfelt F som er slik at det finnes en funksjon f slik at $F = \nabla f$ kalles et **konservativt** vektorfelt, og funksjonen f kalles et **potensial** for F .*

Vi sier at funksjonen f er et potensial, fordi potensialet ikke er entydig. Det finnes mange av dem.

Det er ikke alltid så enkelt å avgjøre om et felt er konservativt, men det er mye enklere å fastslå at et felt *ikke* er konservativt. Det er innholdet i det neste resultatet. Vi gir resultatet for vektorfelt fra \mathbb{R}^2 inn i \mathbb{R}^2 , men tilsvarende resultat finnes for mer generelle vektorfelt.

Teorem 6.3.3. *La $F(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$ være en funksjon fra \mathbb{R}^2 inn i \mathbb{R}^2 . En nødvendig betingelse for at vektorfeltet er konservativt er at*

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

Bevis. Et konservativt felt har et potensial slik at $F = \nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (p, q)$ og

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

□

Merk. Selv om denne betingelsen er oppfylt er det ikke sikkert at vektorfeltet har et potensial. F.eks. er betingelsen oppfylt for $F(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ (utenfor origo), men i dette tilfellet finnes det ikke noe potensial.

Eksempel 6.3.1. *Vi har gitt et vektorfelt*

$$\mathbf{F}(x, y) = (2xy^4, 4x^2y^3)$$

Vi skal teste om vektorfeltet kan ha et potensial. Vi gjør derivasjonstesten

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy^4) = 8xy^3 \quad \frac{\partial}{\partial x}(4x^2y^3) = 8xy^3$$

Det gikk bra, og det er dermed gode muligheter for at det finnes et potensial $f = f(x, y)$.

Når vi har fastslått at det ikke er noe i veien for at det finnes et potensial, melder spørsmålet seg om vi kan finne dette potensialet altså om vi kan *anti-derivere* vektorfeltet.

Dersom et vektorfelt $F(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$ er konservativt, dvs. at det finnes en funksjon $f(x, y)$ slik at $F = \nabla f$, så vet vi at

$$p(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Betrakter vi variabelen y som en konstant, kan vi forsøke å anti-derivere $p(x, y)$ med hensyn på variabelen x . Anta at det går bra, og at vi har funnet en funksjon $h(x, y)$ slik at dens partielt deriverte med hensyn på x er $p(x, y)$, $h(x, y)$ er dermed en kandidat til å være et potensial for vektorfeltet. Her må vi imidlertid huske på en viktig detalj, når vi anti-derivere med hensyn på x og betrakter y som en konstant, vil integrasjonskonstanten ikke bare være en konstant, men en vilkårlig funksjon i y . Slike funksjoner vil jo deriveres på 0 når y betraktes som en konstant og vi derivere med hensyn på x . Vi skriver derfor $h(x, y) = f(x, y) + g(y)$, der $g(y)$ er en vilkårlig funksjon i y .

Dersom denne funksjonen skal være en god kandidat til vektorfeltet, må dens partielt deriverte med hensyn på y være den andre funksjonen $q(x, y)$. Vi derivere med hensyn på y og får

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + g'(y)$$

Dette uttrykket sammenlikner vi med $q(x, y)$, dvs, vi setter

$$q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} + g'(y)$$

Dersom vektorfeltet er konservativt kan vi nå alltid finne en funksjon $g(y)$ slik at dette er oppfylt.

Det er mye lettere å følge denne prosedyren dersom vi tar for oss et konkret eksempel, og vi fortsetter derfor på eksempel 6.3.1.

Eksempel 6.3.2. *Vi har gitt vektorfeltet*

$$\mathbf{F}(x, y) = (2xy^4, 4x^2y^3)$$

og har i Eksempel 6.3.1 sett at derivasjonstesten ikke legger noen hindringer for at vektorfeltet er konservativt og dermed har et potensial.

Vi må i så fall ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^4 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2y^3$$

Integrerer vi $2xy^4$ med hensyn på x får vi $x^2y^4 + g(y)$, der $g(y)$ er en funksjon kun i y og som går på 0 når vi derivere med hensyn på x . Vi derivere denne funksjonen med hensyn på y og sammenlikner med uttrykket over.

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^4 + g(y)) = 4x^2y^3 + g'(y)$$

Siden dette skal være lik $4x^2y^3$ slutter vi at $g'(y) = 0$ eller at $g(y) = K$ en konstant. Et generelt potensial er derfor gitt ved

$$f(x, y) = x^2y^4 + K$$

og nå har vi funnet alle potensialfunksjonene.

Eksempel 6.3.3. Vi har gitt et vektorfelt

$$\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 - 6xy, -3x^2 + 3y^2)$$

Vi skal prøve å finne et potensial for \mathbf{F} . Vi gjør derivasjonstesten

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 6xy) = -6x \quad \frac{\partial}{\partial x}(-3x^2 + 3y^2) = -6x$$

Det gikk bra, og det er dermed gode muligheter for at det finnes et potensial $f(x, y)$ slik at $\mathbf{F} = \nabla f$. Vi må i så fall ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6xy \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + 3y^2$$

Integrerer vi $3x^2 - 6xy$ med hensyn på x får vi $x^3 - 3x^2y + g(y)$, der $g(y)$ er en funksjon kun i y og som går på 0 når vi deriverer med hensyn på x . Vi deriverer denne funksjonen med hensyn på y og sammenlikner med uttrykket over.

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3 - 3x^2y + g(y)) = -3x^2 + g'(y)$$

Siden dette skal være lik $-3x^2 + 3y^2$ slutter vi at $g'(y) = 3y^2$ og $g(y) = y^3 + K$ hvor K er en integrasjonskonstant. Et generelt potensial er derfor gitt ved

$$f(x, y) = x^3 - 3x^2y + y^3 + K$$

Eksempel 6.3.4. Tyngdefeltet på jordoverflaten er gradienten til potensialfunksjonen

$$f(x, y, z) = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

der vi har lagt origo i jordas sentrum. Vi har

$$\nabla f = \left(-\frac{Cx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{Cy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{Cz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Merk at det ikke er noe i veien for å bytte om rekkefølgen på anti-derivasjonene med hensyn på x og y . Dersom vektorfeltet er konservativt vil svaret uansett bli det samme.

6.4 Integralkurver i plane vektorfelt

I planet ser definisjonen av et vektorfelt slik ut

Definisjon 6.4.1. La $p(x, y)$ og $q(x, y)$ være funksjoner i to variable definert på et område R i xy -planet. Et **plant vektorfelt** $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$$

Retningsdiagrammet til en funksjon $y = f(x)$ er et eksempel på et vektorfelt i planet. Vi kan sette opp et uttrykk for tangentene til grafen til $f(x)$ ved vektorene $(1, f'(x))$. Dette gir oss et vektorfelt ved å sette $p(x, y) = 1$ og

$q(x, y) = f'(x)$. Nå vet vi at funksjonene $y = f(x) + C$ gir oss alle løsninger på anti-derivasjon av dette vektorfeltet. Dette kan vi forsøke å generalisere.

Vi tenker oss at vi har gitt et vektorfelt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dette vektorfeltet tilordner til et hvert punkt i planet en vektor, som blant annet er karakterisert ved en retning. Vi er interessert i om det finnes en funksjon $y = f(x)$ som i hvert punkt på grafen har en tangent med samme retning som det oppgitte vektorfeltet foreskriver. Vi kaller dette å finne en **integralkurve** for vektorfeltet.

Definisjon 6.4.2. La $\mathbf{F}(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$ være et vektorfelt i planet. Vi sier at en funksjon $y = g(x)$ er en **integralkurve** for vektorfeltet dersom $(1, g'(x))$ er parallell med $\mathbf{F}(x, y)$ i alle punkter på grafen til $y = g(x)$.

Siden retningen til vektorfeltet er en vektor med stigningstall $\frac{q(x, y)}{p(x, y)}$, betyr dette spesielt at i alle punkter på grafen til $y = g(x)$ må vi ha at $g'(x) = \frac{q(x, y)}{p(x, y)}$. Dette er generelt vanskelig å få til, så vi må begrense problemet litt for å komme noe videre. Men først et par eksempler:

Eksempel 6.4.1. Betrakt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$. Da vil funksjonen $y = g(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ gi oss en integralkurve for alle valg av R . Det følger av at

$$g'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{-x}{y}$$

Eksempel 6.4.2. Dersom vektorfeltet er gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = (-x, y)$ ser vi at funksjonen $y = g(x) = \frac{C}{x}$ gir oss en integralkurve for alle valg av konstanten C . Det følger siden

$$(1, g'(x)) = (1, -\frac{C}{x^2}) = -\frac{1}{x}(-x, \frac{C}{x}) = -\frac{1}{x}(-x, y)$$

som er parallell med $\mathbf{F}(x, y)$.

Vi legger inn et lite mellomspill om vektorer her. Gitt en vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ i planet. Da vil $\mathbf{v}^\perp = (-v_2, v_1)$ være en vektor som står normalt på \mathbf{v} .

Lemma 6.4.3. Gitt en vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ i planet. Da vil vektoren $\mathbf{v}^\perp = (-v_2, v_1)$ stå normalt på \mathbf{v} , dvs. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^\perp = 0$.

Bevis. Opplagt, siden $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^\perp = (v_1, v_2) \cdot (-v_2, v_1) = -v_1v_2 + v_2v_1 = 0$. □

Lemma 6.4.4. Vi har at $(\mathbf{v}^\perp)^\perp = \mathbf{v}$.

Bevis. Følger direkte fra definisjonen av \mathbf{v}^\perp . □

Eksempel 6.4.3. Vektorene $\mathbf{v} = (1, 2)$ og $\mathbf{v}^\perp = (-2, 1)$ står normalt på hverandre siden $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^\perp = (1, 2) \cdot (-2, 1) = 0$.

Vi skal bruke dette til å gi en framgangsmåte til å løse problemet gitt over. Vi har gitt et vektorfelt $F(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$. Anta at dette vektorfeltet er konservativt og at vi kan finne et potensial $f(x, y)$ slik at $\nabla f = F$. Da vet vi at vektorfeltet $F(x, y)$ står normalt på nivåkurvene til funksjonen $f(x, y)$. Det betyr at vektorfeltet $F^\perp = (-q(x, y), p(x, y))$ ligger langs med nivåkurvene til

$f(x, y)$ ved lemmaene over. Dette kan vi benytte oss av. I setet for å se på det opprinnelige vektorfeltet $F(x, y)$ tar vi for oss et vektorfelt som står normalt på dette vektorfeltet, $F(x, y)^\perp$. Dersom vi kan finne et potensial for dette vektorfeltet, så vil nivåkurvene til denne funksjonen stå normalt på $F(x, y)^\perp$, dvs. ligge langs med $F(x, y)$ og vi har en løsning på problemet.

Eksempel 6.4.4. Gitt en kurve, f.eks. løsningsmengden til $g(x, y) = x^2y + y + 1 = 0$. Denne kurven er en nivåkurve for funksjonen $g(x, y) = x^2y + y + 1$, for $g(x, y) = 0$. Gradienten til kurven peker i hvert punkt på kurven i en retning som står vinkelrett på tangenten til kurven. I vårt tilfelle er gradienten gitt ved

$$\nabla g(x, y) = (2xy, x^2 + 1)$$

Siden gradienten står normalt på kurven kan vi finne tangenter til kurven ved å se på vektorer som står normalt på gradientvektorene.

$$\nabla g(x, y)^\perp = (x^2 + 1, -2xy)$$

Dette vektorfeltet er et tangentfelt til kurven, dvs. i hvert punkt på kurven gir feltet oss en tangentvektor. Nå kan vi gjøre denne prosessen i motsatt rekkefølge. Anta at vi har gitt et vektorfelt \mathbf{F} og vi ønsker å finne en funksjon $f(x, y)$ som er slik at løsningskurvene $f(x, y) = 0$ følger feltet \mathbf{F} . I følge resonnementet over vil \mathbf{F} stå normalt på løsningskurven og spørsmålet blir om dette feltet har et potensial. I så fall vil potensialfunksjonen løse vårt problem.

Eksempel 6.4.5. Et vektorfelt er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$$

Vi skal prøve å finne en kurve som følger dette vektorfeltet, dvs. som i hvert punkt på kurven har tangent som er parallell med vektorfeltet. I tillegg vil vi at kurven skal gå gjennom punktet $(1, 0)$. Vi begynner med å konstruere et vektorfelt som står normalt på det gitte vektorfeltet, nemlig

$$\mathbf{F}^\perp(x, y) = (x, y)$$

Det er lett å se at dette vektorfeltet er gradienten til funksjonen $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Siden vår kurve skulle gå gjennom punktet $(1, 0)$ så er det nivåkurven til f gitt ved $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}$ vi er ute etter, med andre ord, en sirkel i planet.

Eksempel 6.4.6. Et eksempel til. Nå har vi gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{1}{y}, -2x\right)$$

Vi skal prøve å finne en kurve som som i hvert punkt har en tangent som er parallell med vektorfeltet. I tillegg vil vi at kurven skal gå gjennom punktet $(0, 1)$. Vi begynner med å konstruere et vektorfelt som står normalt på det gitte vektorfeltet, nemlig

$$\mathbf{F}^\perp(x, y) = \left(2x, \frac{1}{y}\right)$$

Det er lett å se at dette vektorfeltet er gradienten til funksjonen $f(x, y) = x^2 + \ln(y)$. Siden vår kurve skulle gå gjennom punktet $(0, 1)$ så er det nivåkurven til f gitt ved $f(x, y) = x^2 + \ln(y) = 0$ vi er ute etter, med andre ord, $\ln(y) = -x^2$ eller $y = e^{-x^2}$.

6.5 Sirkulasjon

Vi har sett at når vi har gitt et vektorfelt $\mathbf{F}(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$ kan vi bruke en derivert-test for å avgjøre om feltet er konservativt, dvs. om det kan skrives som en gradient av en funksjon i flere variable. Testen sammenlikner de partiellderiverte

$$\frac{\partial q}{\partial x} \quad \text{og} \quad \frac{\partial p}{\partial y}$$

og konklusjonen er at likhet er en nødvendig betingelse for at feltet er konservativt. Det betyr at differansen

$$\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}$$

har en viktig rolle i å avgjøre om et felt er konservativt. Uttrykket har fått et eget navn, vi kaller det **sirkulasjonen** til feltet

Definisjon 6.5.1. La $\mathbf{F}(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$ være et plant vektorfelt. Vi definerer **sirkulasjonen** til \mathbf{F} , $\text{curl}(\mathbf{F})$ ved

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}$$

Vi skal etter hvert se på hvorfor vi kaller dette for sirkulasjon. Vi skal først regne ut sirkulasjonen til noen vektorfelt:

Eksempel 6.5.1. La $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$ være et radially vektorfelt. Da er sirkulasjonen til \mathbf{F}

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}y - \frac{\partial}{\partial y}x = 0$$

så feltet er konservativt, gitt ved $\mathbf{F} = \nabla f$, der $f(x, y) = x^2 + y^2 + C$.

Eksempel 6.5.2. La $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ være et sirkulært vektorfelt. Da er sirkulasjonen til \mathbf{F}

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}(-y) = 2$$

dvs. at sirkulasjonen er konstant i hele planet.

Eksempel 6.5.3. Et konstant vektorfelt $\mathbf{F}(x, y) = (a, b)$ har selvfølgelig ikke noen sirkulasjon, siden

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}a - \frac{\partial}{\partial y}b = 0$$

Feltet er gradienten til funksjonen $f(x, y) = ax + by + C$, dvs. en lineær funksjon.

Navnet sirkulasjon indikerer at det er noe ved vektorfeltet som danner en eller annen form for sirkulasjon. Det stemmer, men begrepet er litt mer subtilt enn som så.

Eksempel 6.5.4. Selv et vektorfelt der alle pilene peker samme vei kan ha sirkulasjon. La $\mathbf{F}(x, y) = (y, 0)$ være et vektorfelt der alle pilene peker i x -retning. Sirkulasjonen til \mathbf{F} er gitt ved

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}0 - \frac{\partial}{\partial y}y = -1$$

Grunnen til at vi får en ikke-null sirkulasjon i dette eksempelet er at størrelsen på feltet øker når vi beveger oss ut fra x -aksen.

En måte å visualisere sirkulasjon er som følger. Vi tenker oss at vi fyller hele planet med mennesker som beveger seg med vektorfeltet. Det betyr at de i et hvert punkt beveger seg i den retningen som feltet foreskriver og med en hastighet gitt ved lengden av vektoren i punktet. For eksempel vil feltet $\mathbf{F}(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$ i punktet (a, b) ha retning $(p(a, b), q(a, b))$ og størrelse $\sqrt{p(a, b)^2 + q(a, b)^2}$. For å måle sirkulasjonen i feltet i punktet (a, b) plasserer vi en stolpe i punktet. Stolpen må bli værende i punktet, men må kunne sirkulere fritt om sin egen akse. Når folkemassen beveger seg med feltet vil sirkulasjonen i stolpen presis beskrive sirkulasjonen i feltet. I det ene eksempelet over så vi at feltet $\mathbf{F}(x, y) = (y, 0)$ har sirkulasjon $\text{curl}(\mathbf{F}) = -1$ selv om hele køen går i samme retning, langs x -aksen. Imidlertid går de fortere og fortere jo lenger ut fra x -aksen vi kommer. Det betyr at en stolpe som er passert i folkemassen blir skubbet mer på den ene enn den andre siden, og derfor vil rotere. Det er den samme effekten i eksemplet med det sirkulære vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$. Det er altså ikke det at feltet er sirkulært som skaper sirkulasjonen, men det er det at størrelsen på feltet øker når vi beveger oss på tvers av feltretningene. I det radiale feltet $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$ vil også størrelsen på feltet øke når vi beveger oss vekk fra origo, men feltet er konstant i størrelse på tvers av feltretningene, og da blir sirkulasjonen borte.

Eksempel 6.5.5. Vi skal regne ut sirkulasjonen til retningsdiagrammet til funksjonen $y = g(x)$. Retningsdiagrammet er i hvert punkt gitt som et vektorfelt $\mathbf{G}(x, y) = (1, g'(x))$. Sirkulasjonen blir da

$$\text{curl}(\mathbf{G}) = \frac{\partial}{\partial x} g'(x) - \frac{\partial}{\partial y} 1 = g''(x)$$

Det betyr at sirkulasjonen i dette tilfellet måles av samme uttrykk som måler funksjonenes krumning.

Vi kan gi en romlig versjon av begrepet sirkulasjon. I det tilfellet vil sirkulasjonen være et nytt vektorfelt.

Definisjon 6.5.2. La $\mathbf{F}(x, y, z) = (p(x, y, z), q(x, y, z), r(x, y, z))$ være et vektorfelt i rommet. Vi definerer sirkulasjonen til \mathbf{F} , $\text{curl}(\mathbf{F})$ ved

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = \left(\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z}, \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right)$$

Betrakt nå et vektorfelt i planet, gitt ved at $r(x, y, z) = 0$ og slik at p og q er konstante med hensyn på z . Alle vektorene i feltet er parallelle med xy -planet, og for gitte verdier av x og y er vektorene de samme for alle valg av z . Dette er det nærmeste vi kommer en romlig versjon av et plant vektorfelt. Det gir

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = \left(0, 0, \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right)$$

Mao. er sirkulasjonen til et plant vektorfelt gitt ved en retning ut av planet og i den retningen er størrelsen på feltet lik med definisjonen av sirkulasjon for et plant vektorfelt. De to definisjonene er dermed konsistente, men vi skal i våre eksempler holde oss til den plane versjonen.

Oppgaver til kapittel 6

Oppgave 1. Regn ut gradienten til funksjonene

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$

b) $f(x, y) = e^x \cos y$

c) $f(x, y) = x^2 y^3$

Oppgave 2. Regn ut gradienten til funksjonene

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 \sin(xy) + xyz$

b) $f(x, y, z, w) = e^{xz}(\cos y + \sin w)$

c) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$

Oppgave 3. Avgjør om vektorfeltet er konservativt og finn i så fall et potensial.

a) $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 y^2 + 1, 2x^3 y + 1)$

b) $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 e^y, 2x^3 e^y)$

c) $\mathbf{F}(x, y) = (y \cos(xy), x \cos(xy))$

Oppgave 4. Avgjør om vektorfeltet har et potensial, og finn i så fall dette.

a) $\mathbf{F}(x, y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$

b) $\mathbf{F}(x, y) = (\sin x, \cos x)$

Oppgave 5. Avgjør om vektorfeltet er konservativt og finn i så fall et potensial.

a) $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$

b) $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 y, x^3)$

c) $\mathbf{F}(x, y) = (2xe^y + y, x^2 e^y - x - 2y)$

Oppgave 6. Vis at et konstant vektorfelt er konservativt. Finn et potensial for et konstant vektorfelt.

Oppgave 7. Hvilke av parene av vektorer står normalt på hverandre?

a) $(1, 0)$ og $(0, 1)$

b) $(1, 2)$ og $(2, 1)$

c) $(2, 3)$ og $(-3, 2)$

Oppgave 8. Hvilke av parene av vektorfelt står normalt på hverandre?

a) $(x, y - 2)$ og $(2 - y, x)$

b) $(x, -y)$ og $(y, -x)$

c) $(x^2 - x, xy)$ og $(y, 1 - x)$

Oppgave 9. Et vektorfelt er gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = (-1, 1)$.

- a) Vis at vektorfeltet \mathbf{F}^\perp har et potensial.
- b) Finn et potensial for \mathbf{F}^\perp .
- c) Finn en kurve som går gjennom punktet $(2, 2)$ og slik at tangenten til kurven i hvert punkt på kurven er parallell med vektorfeltet \mathbf{F} .

Oppgave 10. Et vektorfelt er gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = (1, 2x)$.

- a) Vis at vektorfeltet \mathbf{F}^\perp har et potensial.
- b) Finn et potensial for \mathbf{F}^\perp .
- c) Finn en kurve som går gjennom punktet $(0, 1)$ og slik at tangenten til kurven i hvert punkt på kurven er parallell med vektorfeltet \mathbf{F} .

Oppgave 11. Et vektorfelt er gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = (-x^2, 2xy + 2)$.

- a) Vis at vektorfeltet \mathbf{F}^\perp har et potensial.
- b) Finn et potensial for \mathbf{F}^\perp .
- c) Finn en kurve som går gjennom punktet $(1, 1)$ og slik at tangenten til kurven i hvert punkt på kurven er parallell med vektorfeltet \mathbf{F} .

Oppgave 12. Beregn sirkulasjonen for vektorfeltene.

- a) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2y, xy^3)$
- b) $\mathbf{F}(x, y) = (x, x^2)$
- c) $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, x^2)$

Oppgave 13. Gitt et vektorfelt

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - y^3, x^3 - y^2)$$

- a) Beregn sirkulasjonen til vektorfeltet.
- b) Finn de kritiske punktene til sirkulasjonen og avgjør hvor den har sin minste verdi.

Oppgave 14. Beregn sirkulasjonen for vektorfeltene.

- a) $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2y^2 + 1, 2x^3y + 1)$
- b) $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2e^y, 2x^3e^y)$
- c) $\mathbf{F}(x, y) = (y \cos(xy), x \cos(xy))$

Oppgave 15. Beregn sirkulasjonen til vektorfeltene og finn deres største verdi.

- a) $\mathbf{F}(x, y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$
- b) $\mathbf{F}(x, y) = (\sin y, \cos x)$

Oppgave 16. Vi har gitt en nivåkurve $f(x, y) = C$. Tangentvektorfeltet til denne kurven er gitt ved $\mathbf{T}(x, y) = (-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x})$. Vis at sirkulasjonen til tangentfeltet er gitt ved $f_{xx} + f_{yy}$, hvor vi bruker notasjonen $f_x = \frac{\partial}{\partial x}$, osv.

Oppgave 17. Regn ut $f_{xx} + f_{yy}$ for funksjonene

a) $f(x, y) = 2x + 3y - 1$

b) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$

c) $f(x, y) = e^{xy}$

Kapittel 7

Kurveintegraler

I dette kapitlet skal vi studere kurver i planet og se på hvordan vi kan integrere funksjoner som er definert over slike kurver. Når vi integrerer langs x -aksen kan vi tenke oss integralet som en uendelig sum av arealene til uendelig mange uendelig smale rektangler. Vi gjør det samme langs en kurve, men nå erstatter vi differensialet dx med et tilsvarende uendelig lite segment ds langs med kurven. Integralet blir i prinsippet det samme.

Vi skal også se hvordan vi beregner verdien av et vektorfelt langs en kurve. Et av hovedresultatene for kurveintegraler sier at integralet av et konservativt vektorfelt langs en lukket kurve er 0, alternativt at kurveintegraler i et konservativt felt kun avhenger av endepunktene. Vi skal se nærmere på dette resultatet.

7.1 Parametriserte kurver

Vi har tidligere beskrevet kurver på to forskjellige måter. Den ene er som grafen til en funksjon $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, og den andre er som løsningene av en likning, $x^2 + y^2 = 1$. Begge deler beskriver en sirkel (halvsirkel). En tredje måte å beskrive kurver i planet er ved parametriserte kurver. La

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$$

hvor $0 \leq t \leq 2\pi$. Vi betrakter $\mathbf{r}(t)$ for hver t som et punkt i planet. Til sammen vil alle punktene $\mathbf{r}(t)$, når t gjennomløper intervallet $[0, 2\pi)$ beskrive enhets sirkelen i planet. Hvis vi skriver $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, hvor $x(t) = \cos t$ og $y(t) = \sin t$, har vi at $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$. Det gir oss tilbake likningen for en sirkel.

Definisjon 7.1.1. *Funksjonen*

$$\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t))$$

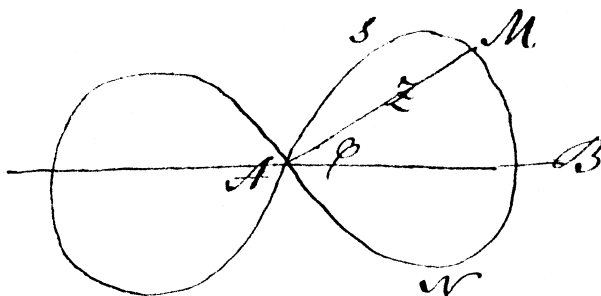
for $t \in I \subset \mathbb{R}$, kalles en **parametrisert kurve**.

Eksempel 7.1.1. *Parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (R \cos t, R \sin t)$ med $t \in [0, 2\pi)$ beskriver en sirkel med radius R .*

Eksempel 7.1.2. *En parabel kan parametriseres ved $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.*

Generelt kan vi parametrisere grafen til en funksjon $y = f(x)$ ved $\mathbf{r}(t) = (t, f(t))$. Dette gir oss en overgang fra beskrivelse av en kurve som grafen til en funksjon til en parametrisering av den samme kurven.

Eksempel 7.1.3. Parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{t^2 + t^4}, \sqrt{t^2 - t^4})$ beskriver en lemniscate.



Figur 7.1. Niels Henrik Abels håndtegnede lemniscate.

Det er ikke alltid helt enkelt å gi likningen til en kurve på bakgrunn av en parametrisering og vice versa. I noen tilfeller, slik som med lemniscaten i eksempelet over, kan vi få det til. Vi setter

$$x = x(t) = \sqrt{t^2 + t^4} \quad , \quad y = y(t) = \sqrt{t^2 - t^4}$$

Det gir

$$x^2 = t^2 + t^4 \quad , \quad y^2 = t^2 - t^4$$

og

$$x^2 + y^2 = 2t^2 \quad , \quad x^2 - y^2 = 2t^4$$

Kvadrerer vi det første uttrykket og sammenlikner med det andre, får vi likningen

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$$

som er likningen for Abels lemniscate.

Gitt en plan kurve $C \subset \mathbb{R}^2$ og et punkt $P \in C$ på kurven. En **tangentvektor** til kurven i punktet P er en vektor (med startpunkt i P) som er parallell med tangenten til kurven i punktet. En **normalvektor** til kurven C i punktet P er tilsvarende en vektor som står normalt på tangenten i punktet. Vi kan finne en tangentvektor til den parametriserte kurven i et punkt ved å derivere de to definerende funksjonene;

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t) = (f'(t), g'(t))$$

En normalvektoren vil da være gitt ved

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{r}'(t)^\perp = (g'(t), -f'(t))$$

Eksempel 7.1.4. Vi har gitt en sirkel ved $\mathbf{r}(t) = (R \cos t, R \sin t)$. Det gir tangentvektor $\mathbf{T}(t) = (-R \sin t, R \cos t)$ og normalvektor $\mathbf{N}(t) = (R \cos t, R \sin t)$. I det tilfellet vil posisjonsvektoren $\mathbf{r}(t)$ og normalvektoren $\mathbf{N}(t)$ peke i samme retning.

Eksempel 7.1.5. Parablen kan beskrives ved $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$ og vi har tangentvektor $\mathbf{T}(t) = (1, 2t)$ og normalvektor $\mathbf{N}(t) = (2t, -1)$.

Vi skal komme tilbake til anvendelser av tangent- og normalvektorer litt senere.

Vi kan bruke polarkoordinater til å regne ut arealet avgrenset av en kurve. Vi gir resultatet uten å føre et formelt bevis. Men ideen er å dele opp arealet i små trekkanter med toppunkt i origo, og så summere omtrent som vi gjorde med Riemannsummer i det kartesiske tilfellet.

Teorem 7.1.2. La D betegne området i planet avgrenset av en ikke-negativ polar funksjon $r = f(\theta)$ over et intervall $[a, b] \subset [0, 2\pi]$. Da er arealet av D gitt ved

$$\text{areal}(D) = \frac{1}{2} \int_a^b (f(\theta))^2 d\theta$$

Eksempel 7.1.6. Vi kan regne ut arealet av en sirkelskive ved å bruke polarkoordinater. En sirkel med radius R er gitt ved polarlikning $r = f(\theta) = R$, og arealet av sirkelskiva, dvs. for $0 \leq \theta \leq 2\pi$ er gitt ved

$$\text{areal}(D) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^2 d\theta = \frac{1}{2} R^2 [\theta]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} R^2 (2\pi - 0) = \pi R^2$$

Et annet eksempel er arealet av trekløveret K_3 og firkløveret K_4 . Vi beregner arealet av ett blad, og bruker $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ for trekløveret, og $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ for firkløveret. Det gir

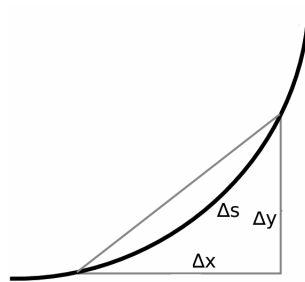
$$\begin{aligned} \text{areal}(K_3) &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} (1 + \cos 6\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4} [\theta + \frac{1}{6} \sin 6\theta]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

Så arealet av hele trekløveret blir $\frac{\pi}{4}$. Tilsvarende regning for firkløveret gir areal $\text{areal}(K_4) = \frac{\pi}{2}$.

7.2 Buelengde

Når vi har gitt en kurve vil vi i mange tilfeller være interessert i beregne lengden av kurven, vi omtaler denne lengden som buelengden. Problemet er at de eneste lengdene vi formelt sett kan regne ut er lengden av rette linjer, mens kurvene våre i svært få tilfeller vil være rette linjer. Vi skal derfor beregne buelengder ved at vi tilnærmer kurven med stykkvis rette linjer, som vi jo kan regne ut lengden til. Vi gjør denne oppdelingen finere og finere, dvs. vi tilnærmer med flere og flere, kortere og kortere rette linjer, og grenseverdien når vi lar antallet rette linjestykker gå mot uendelig vil gi oss buelengden.

Vi betrakter et lite buesegment, Δs som på figuren. Vi lar Δx og Δy være x - og y -koordinatene til Δs . Ved Pythagoras teorem får vi at $(\Delta s)^2 \approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$, og $\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Feilen vi gjør ved denne tilnærmingen blir mindre og mindre (og går faktisk mot 0) når vi lar $\Delta s \rightarrow 0$.



Figur 7.2. *Et buesegment*

Vi deler dette uttrykket med Δt og får

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

Når vi går til grensen $\Delta t \rightarrow 0$ vil også $\Delta s \rightarrow 0$ og vi får likheten

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

som vi kan skrive

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

På samme måte som vi har tolket dx som et uendelig lite linjestykke langs x -aksen, kan vi tolke ds som et uendelig lite linjestykke langs kurven. Uttrykket for ds beskriver forholdet mellom lengden av det lille buesegmentet og lengden av det tilsvarende lille linjestykket dt på parameteraksen. Dette kan vi bruke til å beregne buelengden.

Definisjon 7.2.1. *Buelengden B til kurven $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t))$ mellom $t = a$ og $t = b$ er gitt ved integralet*

$$B = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt$$

Eksempel 7.2.1. *Buelengden til kurven $\mathbf{r}(t) = (R \cos t, R \sin t)$ mellom $t = 0$ og $t = 2\pi$ er gitt ved integralet*

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} R \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} R dt = [Rt]_0^{2\pi} = 2\pi R \end{aligned}$$

som vi gjenkjenner som omkretsen til en sirkel med radius R .

Eksempel 7.2.2. Buelengden til kurven $\mathbf{r}(t) = (t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}})$ mellom $t = 0$ og $t = 3$ er gitt ved integralet

$$\begin{aligned} B &= \int_0^3 \sqrt{(1)^2 + (\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}})^2} dt \\ &= \int_0^3 \sqrt{1+t} dt \\ &= \frac{2}{3}[(1+t)^{\frac{3}{2}}]_0^3 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Til slutt tar vi med et eksempel hvor vi beregner buelengden til en rett linje og ser at det faktisk blir lengden av den rette linja.

Eksempel 7.2.3. Linjestykket mellom origo og punktet $(1, 1)$ kan parametriseres ved $\mathbf{r}(t) = (t, t)$ der $0 \leq t \leq 1$. Det gir buelengde

$$B = \int_0^1 \sqrt{(1)^2 + (1)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{2} dt = \sqrt{2}$$

som presis er lengden av linja, beregnet ved Pythagoras setning.

7.3 Kurveintegraler

Hvis vi kombinerer vi det vi har sagt om buelengde med vår kunnskap om integraler kan vi definere mer generelle kurveintegral. Gitt en funksjon $f(x, y)$ i to variable og en kurve $\mathbf{r}(t)$. Vi skal beregne integralet av funksjonen langs med kurven.

Definisjon 7.3.1. *Kurveintegralet* av funksjonen $f(x, y)$ langs kurven C gitt ved $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ mellom $t = a$ og $t = b$ er gitt ved

$$\int_C f ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Eksempel 7.3.1. Vi skal beregne kurveintegralet av funksjonen $f(x, y) = \frac{y}{x}$ langs parabolen P , gitt ved $\mathbf{r}(t) = (t, \frac{1}{2}t^2)$ mellom $t = 0$ og $t = \sqrt{3}$. Merk at langs denne kurven ser funksjonen ut som

$$f(\mathbf{r}(t)) = f(t, \frac{1}{2}t^2) = \frac{t^2}{2t} = \frac{1}{2}t$$

og integralet blir

$$\begin{aligned} \int_P f ds &= \int_0^{\sqrt{3}} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(1)^2 + (t)^2} dt \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}t \cdot \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{6}(4^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

Eksempel 7.3.2. Vi skal beregne kurveintegralet av funksjonen $f(x, y) = -y$ langs sirkelen C , gitt ved $\mathbf{r}(t) = (R \cos t, R \sin t)$ fra $t = 0$ til $t = 2\pi$. Langs denne kurven ser funksjonen ut som

$$f(\mathbf{r}(t)) = f(R \cos t, R \sin t) = -R \sin t$$

Det gir integral

$$\begin{aligned}\int_C f ds &= \int_0^{2\pi} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt \\ &= - \int_0^{2\pi} R \sin t dt = -R[-\cos t]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

Integralet i det siste eksemplet beregnes rundt en hel sirkel slik at de to endepunktene faktisk er samme punkt i planet, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi)$. Slike integral har et eget (meget illustrerende) symbol, vi skriver

$$\oint_C f ds$$

som betyr at vi integrerer langs en **lukket kurve** C .

7.4 Integrere vektorfelt

I forrige avsnitt integrerte vi funksjoner langs en kurve. Vi kan også integrere vektorfelt langs kurver. Ideen er som følger. Vi tenker oss at vi dekomponerer vektorfeltet i en komponent langs med kurven og en normalt på kurven, dvs. i hvert punkt på kurven skriver vi vektorfeltet som en sum av en vektor som ligger langs kurven og en vektor som står normalt på kurven. Så bestemmer vi oss for at den komponenten som står normalt på kurven ikke skal gi noe bidrag til integralet, og vi står igjen med komponenten langs med kurven. Denne komponenten finner vi ved å ta prikkproduktet av vektorfeltet med en tangentvektor til kurven i punktet, av lengde 1. Vi vil at tangentvektoren skal ha lengde 1 fordi vi ikke vil at lengden av denne vektoren skal spille inn på resultatet, kun retningen av den.

For å finne en tangentvektor av lengde 1 bruker vi tangentvektoren definert i forrige avsnitt, og deler den på sin egen lengde. Da får vi en tangentvektor av lengde 1.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$$

Definisjon 7.4.1. La $\mathbf{F}(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$ være et vektorfelt i planet og $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ en parametrisering av kurven C i det samme planet. **Verdien av vektorfeltet \mathbf{F} langs C** er en funksjon i to variable gitt ved

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C = (p(\mathbf{r}(t)), q(\mathbf{r}(t))) \cdot \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}} = \frac{p(\mathbf{r}(t))x'(t) + q(\mathbf{r}(t))y'(t)}{\sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}}$$

På denne måten har vi skaffet oss en funksjon, definert i hvert punkt på kurven.

Eksempel 7.4.1. La $f(x, y)$ være en funksjon i to variable og anta at den parametriserte kurven C gitt ved $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ beskriver en nivåkurve for funksjonen, dvs. at $f(x(t), y(t)) = c$, c en konstant. Gradienten til f danner et vektorfelt ∇f i planet. Da er verdien av vektorfeltet ∇f langs nivåkurven C

lik 0. Vi kan se dette ved å regne ut

$$\begin{aligned}\nabla f \cdot \mathbf{T}_r(t) &= \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) \\ &= \frac{d}{dt} f((x(t), y(t))) = \frac{d}{dt} c = 0\end{aligned}$$

der overgangen fra første til andre linje er kjerneregelen for derivasjon. Alternativt kunne vi dedusert dette direkte siden vi vet at gradienten til en funksjon står normalt på nivåkurvene til funksjonen, og dermed også normalt på tangentene til nivåkurvene, og det er akkurat skalar-produktet mellom disse to vektorene vi regner ut.

Eksempel 7.4.2. La $f(t) = (R \cos t, R \sin t)$ og $g(x, y) = xy$. Da har vi $h(t) = g(f(t)) = R^2 \cos t \sin t$ og

$$h'(t) = -R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t$$

Bruker vi kjerneregelen på den samme funksjonen får vi

$$\begin{aligned}h'(t) &= (y, x) \cdot (-R \sin t, R \cos t) \\ &= R \sin t (-R \sin t) + R \cos t R \cos t\end{aligned}$$

siden $x = R \cos t$, og $y = R \sin t$.

Da har vi samlet nok bakgrunn til å kunne integrere et vektorfelt langs en kurve.

Definisjon 7.4.2. La $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ være et vektorfelt i planet og $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$ en parametrisering av kurven C i det samme planet. **Linjeintegralet** av vektorfeltet \mathbf{F} langs C er gitt ved

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C dt = \int_a^b (P(\mathbf{r}(t))x'(t) + Q(\mathbf{r}(t))y'(t)) dt$$

Eksempel 7.4.3. La $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ være et vektorfelt i planet (tangentfeltet til konsentriske sirkler) og $\mathbf{r}(t) = (R \cos t, R \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, en sirkulær kurve. Linjeintegralet av vektorfeltet \mathbf{F} langs C er gitt ved

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C dt &= \int_0^{2\pi} (-R \sin t)(-R \sin t) + R \cos t \cdot R \cos t dt \\ &= \int_0^{2\pi} R^2(\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi R^2\end{aligned}$$

Eksempel 7.4.4. La $\mathbf{F}(x, y) = (2y, -x)$ være et vektorfelt i planet og $\mathbf{r}(t) = (t, \frac{1}{2}t^2)$, $0 \leq t \leq 1$. Linjeintegralet av vektorfeltet \mathbf{F} langs C er gitt ved

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C dt = \int_0^1 (t^2 \cdot 1 + (-t)t) dt = 0$$

Hvorfor blir dette 0? Kurven er parabellen $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Tangentvektoren i punktet (x, y) har stigningstall $f'(x) = x$, dvs. tangentvektorfeltet har retning $(1, x)$. Det oppgitte vektorfeltet har retning $(2y, -x)$. Prikkproduktet av disse to retningene er $(1, x) \cdot (2y, -x) = 2y - x^2$. Men på kurven $y = \frac{1}{2}x^2$ er dette tallet lik 0, og vektorfeltet har derfor ingen verdi langs med kurven.

7.5 Kurveintegraler i konservative felt

Nå har vi kommet fram til et hovedresultat for kurveintegraler. Resultatet dreier seg om kurveintegraler i konservative felt. Vi starter med en funksjon $f(x, y)$ og ser på gradienten $\mathbf{F} = \nabla f$. Dette er et konservativt felt. Vi lar C være en lukket kurve i planet, gitt ved en parametrisering $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$ slik at $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$. Da har vi

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C dt &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}(t)) \cdot y'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) dt = [f(\mathbf{r}(t))]_a^b \\ &= f(\mathbf{r}(a)) - f(\mathbf{r}(b)) = 0 \end{aligned}$$

Dermed har vi bevist følgende teorem:

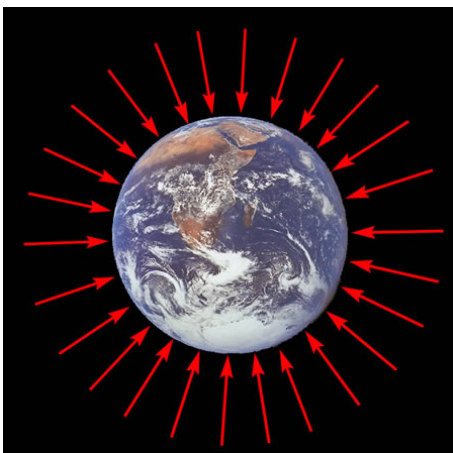
Teorem 7.5.1. *Kurveintegralet i et konservativt felt \mathbf{F} , langs en lukket kurve C er 0;*

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C dt = 0$$

Korollar 7.5.2. *Kurveintegralet i et konservativt felt er kun avhengig av potensialets verdi i kurvens endepunkter.*

Bevis. La p_0 og p_1 være endepunktene, og la C' være en annen, vilkårlig kurve mellom de to endepunktene. Vi setter sammen de to kurvene ved å gjennomløpe C' baklengs slik at vi får en lukket kurve. Kurveintegralet langs denne kurven er 0, og de to kurveintegralene, over C og C' må være like. \square

Eksempel 7.5.1. *En viktig anvendelse av dette teoremet/korollaret er gravitasjonsfeltet rundt jorda.*



Figur 7.3. *Gravitasjonsfeltet rundt jordkloden*

Dette er et konservativt felt der potensialet kun er avhengig av avstanden til jordas sentrum, dvs. høyden over havoverflaten. Kurveintegraler i et gravitasjonsfelt måler energiforbruk langs kurven. Resultatet sier da at energiforbruket ved å bevege seg fra et punkt til et annet punkt kun avhenger av differansen mellom de to punktenes høyde over havoverflaten.

Eksempel 7.5.2. Et eksempel på et ikke-konservativt kraftfelt er feltet som over et område beskriver vindretning og -styrke.



Figur 7.4. Et fyr på et værutsatt sted på Vestlandet.

Vi antar at det i området befinner seg noen store steiner, fyr, trær e.l. Skal man bevege seg mot vinden, og man ønsker å bruke minst mulig krefter, prøver man å gå man mest mulig i le av steinene eller trærne, der motvinden er svakest. Energiforbruket langs en kurve i dette vindfeltet er presis kurveintegralet langs kurven, og det er som vi alle har erfart, avhengig av valg av vei, dvs. feltet er ikke konservativt.

Oppgaver til kapittel 7

Oppgave 1. Skriv kurvene på parameterform:

- a) $x - y = 0$
- b) $x^2 - y = 2$
- c) $x^2 + y^2 = 1$

Oppgave 2. Finn en likning for de parametriserte kurvene

- a) $\mathbf{r}(t) = (2t + 1, t - 2)$
- b) $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$
- c) $\mathbf{r}(t) = (\sin^2 t, t - 1)$

Oppgave 3. Finn skjæringspunktene mellom de to kurvene $\mathbf{r}_1(t) = (t^2 + 1, 1 + t)$ og $\mathbf{r}_2(u) = (2u, 4 - 2u)$.

Oppgave 4. Finn en tangentvektor og en normalvektor for de gitte kurvene

- a) $\mathbf{r}(t) = (2t + 1, t - 2)$

b) $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$

c) $\mathbf{r}(t) = (\sin^2 t, t - 1)$

Oppgave 5. Regn ut buelengden av kurvene over de gitte intervallene.

a) $\mathbf{r}(t) = (t + 1, 2t + 1), 0 \leq t \leq 2$

b) $\mathbf{r}(t) = (at, bt), 0 \leq t \leq 1$

Oppgave 6. Regn ut buelengden av kurvene over de gitte intervallene.

a) $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2), 0 \leq t \leq 1$

b) $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^3), 0 \leq t \leq 1$

Oppgave 7. Regn ut buelengden av kurvene over de gitte intervallene.

a) $\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$

b) $\mathbf{r}(t) = (t, t^{\frac{3}{2}}), 0 \leq t \leq 5$

Oppgave 8. Beregn kurveintegralet av vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ langs parabelen $y = x^2$ fra $x = -1$ til $x = 1$.

Oppgave 9. Beregn kurveintegralet av vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (2 - y, x)$ langs kurven gitt ved $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ fra $t = 0$ til $t = 2\pi$.

Oppgave 10. Beregn kurveintegralet av vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$ langs den rette linja fra $(0, 0)$ til $(2, 4)$.

Oppgave 11. Beregn kurveintegralet av vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, -x + y)$ langs en hel runde av sirkelen $x^2 + y^2 = 1$

Oppgave 12. Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$ ikke er en gradient. Finn også en vei C slik at $\oint_C f \, ds \neq 0$.

Oppgave 13. Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (y, -xy - x)$ ikke er en gradient. Finn også en vei C slik at $\oint_C f \, ds \neq 0$.

Oppgave 14. a) Beregn gradienten ∇f til funksjonen $f(x, y) = x^2y + xy^2$.

b) Beregn kurveintegralet av vektorfeltet ∇f langs en rett linje mellom punktene $(0, 0)$ og $(2, 4)$.

c) Beregn kurveintegralet av det samme vektorfeltet mellom de samme punktene, men denne gangen langs parabelen $y = x^2$.

Oppgave 15. a) Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (y \sin(xy), x \sin(xy))$ er konservativt.

b) Finn et potensial for vektorfeltet gitt i a)

c) Regn ut kurveintegralet av vektorfeltet gitt i a) langs en rett linje mellom punktene $(-1, \frac{\pi}{2})$ og $(1, -\frac{\pi}{2})$.

Oppgave 16. a) Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (e^y, xe^y)$ er konservativt.

b) Finn et potensial for vektorfeltet gitt i a)

c) Regn ut kurveintegralet av vektorfeltet gitt i a) langs en rett linje mellom punktene $(-1, 1)$ og $(1, 1)$.

Oppgave 17. a) Vis at vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (1, 1)$ er konservativt.

b) Finn et potensial for vektorfeltet gitt i a)

c) Regn ut kurveintegralet av vektorfeltet gitt i a) rundt en hel sirkel, gitt ved $x^2 + y^2 = 4$

Kapittel 8

Multippel integrasjon

Fundamentalteoremet sier at integrasjon og derivasjon er motsatte operasjoner. I de foregående kapitlene har vi sett ulike måter vi kan derivere funksjoner i flere variable. Neste skritt er å integrere funksjoner i flere variable.

8.1 Multippel integrasjon over rektangler

Vi skal begynne med å integrere funksjoner i to variable over rektangler i planet. Ved partiell derivasjon deriverte vi med hensyn på en variabel og betraktet alle andre variable som konstanter. Multippel integrasjon baserer seg på nøyaktig samme prinsipp, bare motsatt vei. Vi integrerer med hensyn på variablene i tur og orden, og ved hver integrasjon betrakter vi de andre variablene som konstanter.

La $f(x, y)$ være en funksjon i to variable, og $Q : [a, b] \times [c, d]$ et rektangulært område i (x, y) -planet. Vi skal bruke notasjonen

$$\iint_Q f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Eksempel 8.1.1. Vi skal regne ut integralet av funksjonen $f(x, y) = xy + 1$ over rektangelet $Q : [0, 1] \times [-1, 1]$ i (x, y) -planet. Vi har

$$\begin{aligned} \iint_Q xy + 1 dx dy &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 xy + 1 dx \right) dy = \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2}x^2y + x \right]_0^1 dy \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}y + 1 dy = \left[\frac{1}{4}y^2 + y \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} - (-1) = 2 \end{aligned}$$

Eksempel 8.1.2. Vi kan regne ut det samme integralet, men i motsatt rekkefølge:

$$\begin{aligned} \iint_Q xy + 1 dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 xy + 1 dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2 + y \right]_{-1}^1 dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{2}x + 1 \right) dx = [2x]_0^1 = 2 - 0 = 2 \end{aligned}$$

Det er ikke noen tilfeldighet at disse to integralene er like. Det er et generelt faktum, kalt Fubinis teorem.

Teorem 8.1.1. *En funksjon $f(x, y)$ er definert og kontinuertlig over et rektangel $Q : [a, b] \times [c, d]$ i planet. Da har vi*

$$\iint_Q f \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx$$

Eksempel 8.1.3. *Funksjonen $f(x, y) = x \sin y - ye^x$ er definert over rektangelet $[-1, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$. Vi skal beregne integralet $\iint_Q f \, dx \, dy$.*

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin y - ye^x \, dy \right) dx &= \int_{-1}^1 \left[-x \cos y - \frac{1}{2} y^2 e^x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(-\frac{\pi^2}{8} e^x + x \right) dx = \left[-\frac{\pi^2}{8} e^x + \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^1 \\ &= -\frac{\pi^2}{8} e + \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8} e^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{1}{e} - e \right) \end{aligned}$$

På samme måte som at integralet av en positiv funksjon i en variabel uttrykker arealet mellom x -aksen og grafen, vil integralet av en positiv funksjon i to variable uttrykke volumet mellom xy -planet og grafen.

Eksempel 8.1.4. *Vi skal regne ut volumet under grafen til $f(x, y) = x^2 + y^2$ over rektangelet $[-1, 1] \times [-1, 1]$.*

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 x^2 + y^2 \, dy \right) dx &= \int_{-1}^1 \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{-1}^1 dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} - (-x^2) - \left(-\frac{1}{3}\right) \right) dx = \left[\frac{2}{3} x^3 + \frac{2}{3} x \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Anta nå at vi har gitt en funksjon i to variable $z = f(x, y)$ over et område D i planet, og vi av gode grunner ønsker å bruke polarkoordinater. Det kan f.eks. hende at området D er mye mer hensiktsmessig å beskrive i polarkoordinater, heller enn i kartesiske koordinater. Framgangsmåten minner mye om vanlig substitusjon i én variabel. Vi erstatter variablene i funksjonsuttrykket med $x = r \cos \theta$ og $y = r \sin \theta$. Det gir oss en ny funksjon i polar-variablene r og θ . For å utføre integrasjonen må vi også endre $dx \, dy$ til $dr \, d\theta$. Dersom vi tenker på $dx \, dy$ som arealet av en bitte liten firkant i (x, y) -planet vil ikke forholdet mellom denne og den tilsvarende firkanten $dr \, d\theta$ være konstant, men avhenge av r dvs. hvor langt unna origo vi er. Tenk på det som at en sektor med fast vinkel vil ha mindre areal, jo nærmere origo vi kommer. Dette gir oss følgende formel for integralet, hvor vi lar D' betegne området i (r, θ) -koordinatene som svarer til området D i (x, y) -planet.

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta$$

Eksempel 8.1.5. La oss bruke funksjonen $z = f(x, y) = x + y$ som eksempel, og la området D være øvre halvdel av en sirkelskive med sentrum i origo og radius 1. I polarkoordinater er D gitt ved $D': 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi$. Det gir integralet

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D'} (r \cos \theta + r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 r^2 (\cos \theta + \sin \theta) dr d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi (\cos \theta + \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{3} [\sin \theta - \cos \theta]_0^\pi \\ &= \frac{1}{3} (\sin \pi - \cos \pi - \sin 0 + \cos 0) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

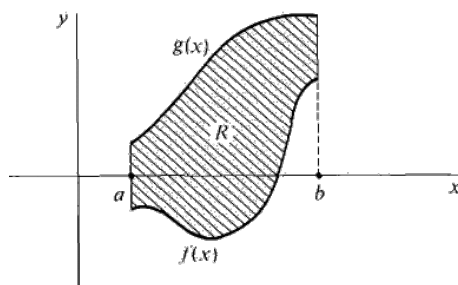
8.2 Multippel integrasjon over mer generelle områder

Vi skal se på dobbeltintegralet over mer generelle områder enn rektangler, områder som er begrenset av grafene til funksjoner i en variabel. Vi begynner med de områdene vi kaller type I. Dette er områder gitt ved

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

Dette området i (x, y) -planet er avgrenset av de to grafene til $g(x)$ og $h(x)$, mellom de to linjene $x = a$ og $x = b$. Grensene i den første integrasjonen, si med hensyn på y , vil være funksjoner i x . Disse setter vi inn for y i uttrykket for den anti-deriverte til funksjonen $f(x, y)$ med hensyn på y . Det gir oss en ny funksjon i x som vi så kan regne ut det bestemte integralet til.

Prosedyren for å regne ut slike integral er den samme som over rektangler, bortsett fra at rekkefølgen nå er vesentlig. I områder av type I er avgrensingen gitt ved at y ligger mellom to funksjoner i x . Det betyr at vi først må integrere med hensyn på y , og deretter med hensyn på x . Hvis vi integrerer med hensyn på x først vil integrasjon med hensyn på y etterpå gi oss et svar som er en funksjon i x , noe vi ikke skal ha. Svaret skal være et tall.



Figur 8.1. Område av type 1

Definisjon 8.2.1. Vi definerer integralet av funksjonen $f(x, y)$ over området D , gitt over, til å være

$$\iint_D f dA = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Eksempel 8.2.1. La D være området gitt ved ulikhetene $1 \leq x \leq 2$ og $0 \leq y \leq x^2$. Vi skal beregne dobbeltintegralet

$$\iint_D xy \, dx \, dy$$

I dette eksemplet er $g(x) = 0$ og $h(x) = x^2$. Det gir

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dx \, dy &= \int_1^2 \left(\int_0^{x^2} xy \, dy \right) dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{2} xy^2 \Big|_0^{x^2} \right] dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2} x^5 \, dx = \left[\frac{1}{12} x^6 \Big|_1^2 \right] = \frac{63}{12} \end{aligned}$$

Områder (integraler) av type II er avgrenset av kurver på formen $x = g(y)$, altså grafer der x -aksen og y -aksen har byttet roller i forhold til type I.

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

Formelen for dobbeltintegralet av en funksjon $f(x, y)$ over et slikt område er gitt ved

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) \, dx \right) dy$$

Det er viktig å merke seg at i disse tilfellene er det ikke nødvendigvis mulig å bytte om på integrasjonsrekkefølgen, det kan vi kun gjøre dersom området både er av type I og av type II.

Eksempel 8.2.2. Vi skal beregne dobbeltintegralet $\iint_D y^2 \sin xy \, dx \, dy$ der D er området mellom $x = y$ og $x = 0$ og der $y \in [0, a]$. Vi regner ut

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^a \left(\int_0^y y^2 \sin xy \, dx \right) dy = - \int_0^a \left[y^2 \cdot \frac{1}{y} \cos xy \Big|_0^y \right] dy \\ &= - \int_0^a y \cos y^2 - y \, dy = - \left[\frac{1}{2} \sin y^2 - \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^a \right] = \frac{a^2 - \sin a^2}{2} \end{aligned}$$

8.3 Areal og tyngdepunkt

Vi kan bruke dobbeltintegrasjon til å finne arealet til et område i xy -planet. Det gjør vi ved å betrakte konstantfunksjonen $f(x, y) = 1$ over det området vi skal finne arealet av. Det legemet vi da beregner volumet av vil være en sylindrisk boks med grunnflate lik området i xy -planet og høyde 1, og arealet får nøyaktig samme verdi som volumet. Vi kan se på et eksempel.

Eksempel 8.3.1. Vi skal finne arealet av området i xy -planet som ligger inni parabolen $y = x^2$, under $y = 1$ og mellom $x = -1$ og $x = 1$. Vi beregner dobbeltintegralet

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 1 \, dy \, dx = \int_{-1}^1 [y]_{x^2}^1 \, dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) \, dx \\ &= \left[x - \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^1 \right] = \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 - \frac{1}{3} (-1)^3 \right) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Vi kan bruke en tilsvarende teknikk for å finne **tyngdepunktet** av et areal i planet. Tyngdepunktet av et område D i planet er det punktet som ligger mest midt i området. Det betyr at dersom vi kutter ut området på en papplate og setter platen på toppen av en passerspiss, så vil platen balansere dersom vi har satt passerspissen i tyngdepunktet.

Vi skal vise at koordinatene (\bar{x}, \bar{y}) til tyngdepunktet til området D er gitt ved formelene

$$\bar{x}A = \iint_D x \, dx \, dy \quad \bar{y}A = \iint_D y \, dx \, dy$$

der A er arealet av området D . Vi skal vise dette for et type I-område. La området D være gitt ved

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

Fra Archimedes likevektsprinsipp vet vi at momentene av områdene på de to sidene av \bar{x} i x -retningen må være like store, og tilsvarende for \bar{y} i y -retningen. For en verdi av x er bredden av området gitt ved $h(x) - g(x)$ i y -retningen og vi får

$$\int_a^{\bar{x}} (\bar{x} - x)(h(x) - g(x)) \, dx = \int_{\bar{x}}^b (x - \bar{x})(h(x) - g(x)) \, dx$$

som vi kan skrive

$$\begin{aligned} \bar{x} \int_a^{\bar{x}} (h(x) - g(x)) \, dx - \int_a^{\bar{x}} x(h(x) - g(x)) \, dx \\ = \int_{\bar{x}}^b x(h(x) - g(x)) \, dx - \bar{x} \int_{\bar{x}}^b (h(x) - g(x)) \, dx \end{aligned}$$

eller

$$\bar{x} \int_a^b (h(x) - g(x)) \, dx = \int_a^b x(h(x) - g(x)) \, dx$$

Nå har vi at

$$\int_{g(x)}^{h(x)} 1 \, dy = h(x) - g(x)$$

og vi får derfor

$$\bar{x} \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} 1 \, dy \, dx = \int_a^b x \int_{g(x)}^{h(x)} 1 \, dy \, dx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} x \, dy \, dx$$

Dobbeltintegralet på venstresiden er akkurat arealet av området D og formelen gitt over følger. Argumentet er helt tilsvarende for et type II-område. Mer generelle områder kan man alltid dele opp i delområder av type I eller type II. og bruke dette til å vise at formen for tyngdepunktet blir på nøyaktig samme form som vi har vist for type I-områder.

Eksempel 8.3.2. *Vi kan bruke disse formelene til å finne tyngdepunktet til en trekant med grunnlinje a og høyde h . Vi legger de tre hjørnene i punktene $(-\frac{a}{2}, 0)$, $(\frac{a}{2}, 0)$ og $(0, h)$. Siden trekanten stikker like mye ut på hver side av y -aksen vil et enkelt symmetriargument gi at $\bar{x} = 0$. For å finne y -koordinaten deler vi trekanten i to og betrakter den delen som ligger i første kvadrant. Vi ser at y -koordinaten til tyngdepunktet er den samme for denne halve trekanten*

som for hele trekanten. Det betyr at området vi skal integrere over er gitt ved at $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$ og $0 \leq y \leq h - \frac{2h}{a}x$. Den siste ulikheten får vi fra uttrykket som gir likningen til hypotenusen i den halve trekanten, nemlig $y = h - \frac{2h}{a}x$. Arealet av denne trekanten vet vi er $A = \frac{ah}{2}$ og formelen over gir oss

$$\begin{aligned} \bar{y} \cdot \frac{ah}{2} &= \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{h - \frac{2h}{a}x} y \, dy \, dx = \int_0^{\frac{a}{2}} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{h - \frac{2h}{a}x} dx \\ &= \int_0^{\frac{a}{2}} h^2 - \frac{4h^2}{a}x + \frac{4h^2}{a^2}x^2 \, dx = \left[h^2x - \frac{2h^2}{a}x^2 + \frac{4h^2}{3a^2}x^3 \right]_0^{\frac{a}{2}} \\ &= h^2 \frac{a}{2} - \frac{2h^2}{a} \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \frac{4h^2}{3a^2} \left(\frac{a}{2} \right)^3 = ah^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) = ah^2 \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Deler vi ut får vi at $\bar{y} = \frac{1}{3}h$ som er y -koordinaten til tyngdepunktet.

I mange situasjoner er vi interessert i å beregne gjennomsnittet av en funksjon over et område i planet. En ikke-negativ funksjon $f = f(x, y)$ i to variable vil definere et volum over sitt definisjonsområde. Gjennomsnittsverdien \bar{f} til f finner vi ved å dele dette volumet på arealet av området. Formelen blir da

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{areal}(D)} \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

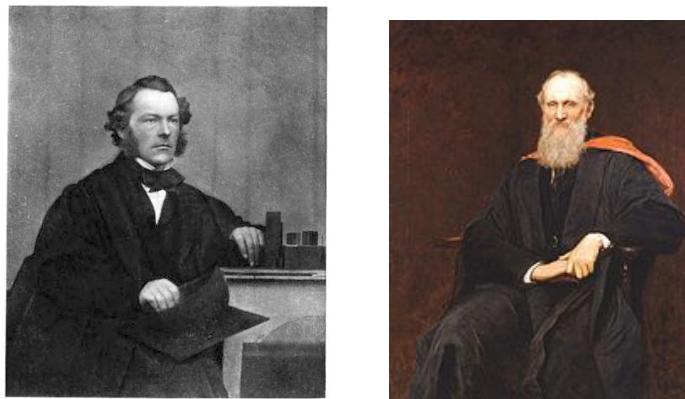
Eksempel 8.3.3. Vi skal beregne gjennomsnittsverdien til funksjonen $f(x, y) = x^2 + xy$ over rektangelet $[0, 1] \times [0, 2]$. Arealet av området er opplagt 2, og gjennomsnittsverdien blir da

$$\bar{f} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^2 x^2 + xy \, dy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (2x^2 + 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{5}{6}$$

Merk sammenhengen mellom gjennomsnittsverdien av en funksjon og tyngdepunkt, x -koordinaten til tyngdepunktet er gjennomsnittsverdien av variabelen x over området, tilsvarende for y . Vi kan altså betrakte tyngdepunktet som et slags gjennomsnittspunkt for området.

8.4 Greens teorem

Det dreier seg om et av matematikkens mest berømte resultater, nemlig det som kalles **Stokes teorem**. Stokes teorem ble først formulert av vitenskapsmannen William Thompson (1824-1907), eller Lord Kelvin, i 1850, men har fått navn etter Sir George Gabriel Stokes (1819-1903). Begge disse to satt dype spor etter seg innen matematikk og naturvitenskap.



Figur 8.2. Stokes og Lord Kelvin

Imidlertid heter den 2-dimensjonale versjonen av Stokes teorem som vi skal se på **Greens teorem**, oppkalt etter George Green (1793-1841). Green formulerte dette resultatet i det oppsiktsvekkende essayet *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* fra 1828. Essayet er oppsiktsvekkende av to grunner. For det første fordi det inneholder nye og banebrytende resultater, for det andre fordi det er skrevet av en legmann. Green hadde faktisk bare ett års skolegang! Her er hans resultat:

Teorem 8.4.1. *La C være en positivt orientert, lukket kurve i planet gitt ved parametriseringen $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ og la D være det området som kurven C omslutter. La $f(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$ være et vektorfelt. Da har vi*

$$\oint_C (p(\mathbf{r}(t))x'(t) + q(\mathbf{r}(t))y'(t)) dt = \iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy$$

Med andre ord, den totale sirkulasjonen til feltet over et område er lik kurveintegralet til feltet langs randa til området. Dersom feltet er konservativt vil begge sider i likheten være 0, venstresiden fordi lukkede kurveintegral i et konservativt felt er 0, høyresiden fordi integranden er 0 for et konservativt felt.

Eksempel 8.4.1. *Betrakt det sirkulære vektorfeltet $f(x, y) = (-y, x)$ og sirkelen $\mathbf{r}(t) = (R \cos t, R \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Vi har tidligere sett at venstresiden er lik $2\pi R^2$. Høyresiden kan vi også regne ut,*

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} (-y) \right) dx dy &= \iint_D (1 + 1) dx dy \\ &= 2 \cdot \text{areal}(D) = 2\pi R^2 \end{aligned}$$

Eksempel 8.4.2. *Vi skal beregne integralet*

$$\oint_C y^2 dx + 3xy dy = \oint_C y^2 x'(t) + 3xyy'(t) dt$$

rundt øvre halvpart av enhetssirkelen med sentrum i origo. Vi har

$$\begin{aligned}
 \oint_C y^2 dx + 3xy dy &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x} 3xy - \frac{\partial}{\partial y} y^2 \right) dx dy \\
 &= \iint_D (3y - 2y) dx dy = \iint_D y dx dy \\
 &= \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Eksempel 8.4.3. Vi kan uttrykke arealet av et område som et kurveintegral:

$$\begin{aligned}
 \oint_C -\frac{1}{2}y dx + \frac{1}{2}x dy &= \iint_D \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} (-y) \right) dx dy \\
 &= \iint_D 1 dx dy \\
 &= \text{areal}(D)
 \end{aligned}$$

Eksempel 8.4.4. Vi lar kurven C være firkanten gitt av hjørnene $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ og $(1, 1)$. Vi skal beregne kurveintegralet

$$\oint_C (5 - xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy) dy$$

Ved Greens teorem er dette ensbetydende med å regne ut dobbeltintegralet av $2x - 2y + x + 2y = 3x$ over firkanten.

$$\iint_D 3x dx dy = 3 \cdot \text{areal}(D) \cdot \bar{x} = \frac{3}{2}$$

Vi skal se på et eksempel der vi regner ut begge sidene i Greens teorem og selvfølgelig får samme svar.

Vi lar vektorfeltet være gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = (p(x, y), q(x, y)) = (xy, x + y)$, og vi skal integrere det over området D , gitt som første kvadrant av enhetsdisken i planet, dvs. i kartesiske koordinater, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$, eller i polarkoordinater, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq 1$. Randa til D , dvs. den lukkede kurven som omslutter D er gitt med tre deler, segmentet langs x -aksen; $\mathbf{r}_1(t) = (t, 0)$, $0 \leq t \leq 1$ med $\mathbf{r}'_1(t) = (1, 0)$, sirkelbuen $\mathbf{r}_2(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ med $\mathbf{r}'_2(t) = (-\sin t, \cos t)$ og segmentet langs y -aksen, $\mathbf{r}_3(t) = (0, 1-t)$, $0 \leq t \leq 1$, med $\mathbf{r}'_3(t) = (0, -1)$.

Venstresiden i Greens teorem ser da ut som

$$\begin{aligned}
 \oint_C p dx + q dy &= \int_0^1 p(t, 0)x'_1(t) + q(t, 0)y'_1(t) dt \\
 &\quad + \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\cos t, \sin t)x'_2(t) + q(\cos t, \sin t)y'_2(t) dt \\
 &\quad + \int_0^1 p(0, 1-t)x'_3(t) + q(0, 1-t)y'_3(t) dt \\
 &= \int_0^1 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t \cdot \sin t)(-\sin t) + (\cos t + \sin t)(\cos t) dt \\
 &\quad + \int_0^1 0 \cdot 0 + (1-t)(-1) dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^2 t \cos t + \cos^2 t + \sin t \cos t) dt + \int_0^1 t - 1 dt \\
 &= \left[-\frac{1}{3} \sin^3 t + \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{2} t^2 - t\right]_0^1 \\
 &= -\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Vi har $\text{curl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = 1 - x$ som gir høyresiden

$$\iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx dy = \iint_D 1 - x dx dy$$

Området D er både type 1 og type 2, vi skal beregne integralet som et type 1-integral. Som nevnt tidligere er området gitt ved $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$, og vi har

$$\begin{aligned}
 \iint_D 1 - x dx dy &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1 - x dy dx \\
 &= \int_0^1 [y - xy]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2} dx \\
 &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx - \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx
 \end{aligned}$$

Det første integralet gir precis arealet mellom x -aksen og grafen til $y = \sqrt{1-x^2}$, dvs. arealet av D . Dette er en kvart sirkelskive med radius 1, og areal $\frac{\pi}{4}$. Det andre integralet løser vi ved å substituere $u = 1 - x^2$, med $du = -2x dx$. Det gir

$$\int x\sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{-2} \int \sqrt{u} du = -\frac{1}{2} \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

Setter vi dette inn i integralet får vi

$$\begin{aligned}\iint_D 1 - x \, dx \, dy &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx - \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \, dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Vi kan også beregne dette integralet ved å bruke polarkoordinater, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq 1$. For polarkoordinater har vi alltid $dx \, dy = r \, dr \, d\theta$. Med $x = r \cos \theta$ gir det

$$\begin{aligned}\iint_D 1 - x \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - r \cos \theta) r \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r - r^2 \cos \theta) \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^1 [r\theta - r^2 \sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} \, dr \\ &= \int_0^1 \left(r \frac{\pi}{2} - r^2\right) \, dr \\ &= \left[\frac{1}{2}r^2 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}r^3\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Det fabelaktige med Greens teorem illustreres godt av dette eksemplet, vi beregner to forskjellige integraler, ett linjeintegral og ett dobbeltintegral. Det er vanskelig å se direkte at disse to utregningene gir samme svar, men det gjør det altså.

Oppgaver til kapittel 8

Oppgave 1. Beregn dobbeltintegralet $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ for

- a) $f(x, y) = xye^{x^2+y^2}$, hvor $D = [1, 3] \times [1, 2]$.
- b) $f(x, y) = xy + \frac{x}{y+1}$, hvor $D = [1, 4] \times [1, 2]$.
- c) $f(x, y) = \sin xe^y$, hvor $D = [0, \pi] \times [-1, 0]$.

Oppgave 2. Beregn dobbeltintegralet $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ for

- a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, hvor $D = [-1, 1] \times [-1, 1]$.
- b) $f(x, y) = x^4y^2 + x^2y^4$, hvor $D = [0, 1] \times [0, 1]$.
- c) $f(x, y) = xe^{xy}$, hvor $D = [0, 1] \times [-1, 1]$.

Oppgave 3. Finn volumet av legemet som ligger mellom området $[0, 1] \times [0, 1]$ i xy -planet og grafen til funksjonen $f(x, y) = x + y$.

Oppgave 4. En eske har grunnflate $G = [0, 1] \times [0, 1]$ og høyde gitt ved funksjonen $g(x, y) = 4 - x - y$. Finn volumet av esken.

Oppgave 5. Beregn dobbeltintegralene.

a) $\int_0^2 \int_{y^2-1}^{y^3} 3 \, dx \, dy$

b) $\int_0^1 \int_x^{2x} (x+y)^2 \, dy \, dx$

c) $\int_0^1 \int_0^{3y} e^{x+y} \, dx \, dy$

Oppgave 6. Finn gjennomsnittsverdien av $x^2 + y^2$ over følgende områder:

a) Kvadratet $[0, 1] \times [0, 1]$

b) Kvadratet $[a, a+1] \times [0, 1]$, hvor $a > 0$.

c) Kvadratet $[0, a] \times [0, a]$, hvor $a > 0$.

Oppgave 7. Finn tyngdepunktet til området i xy -planet som ligger mellom grafen til $y = 1 - x^2$ og $-1 \leq x \leq 1$ på x -aksen.

Oppgave 8. a) Finn arealet til området i xy -planet som ligger mellom grafene til $f(x) = x^2$ og $g(x) = x^3$, og for $0 \leq x \leq 1$.

b) Finn tyngdepunktet til området beskrevet i oppg. a).

Oppgave 9. En ellipse C er gitt ved $x(t) = a \cos t$, $y(t) = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Bruk Greens teorem på vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$ til å beregne arealet av ellipsen.

Oppgave 10. Et område D i (x, y) -planet er avgrenset av en kurve C gitt ved rette linjer gjennom de fire hjørnene $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ og $(2, 2)$. Beregn kurveintegralet (mot klokka)

$$\oint_C y^2 \, dx + x \, dy$$

ved å bruke Greens teorem.

Oppgave 11. Samme oppgave som over, men la området være avgrenset av hjørnene $(\pm 1, \pm 1)$.

Oppgave 12. Samme oppgave som over, men nå lar vi området være avgrenset av en sirkel om origo, med radius lik 2

Kapittel 9

Fasit

9.1 Kapittel 1

Oppgave 1. a) i) $x = \frac{3}{2}$, ii) Avtagende på $(-\infty, \frac{3}{2}]$, voksende på $[\frac{3}{2}, \infty)$, iii) lokalt minimum i $x = \frac{3}{2}$, iv) Krummer opp overalt, v) Ingen vendepunkter

b) i) $x = \pm 1$, ii) Voksende på $(-\infty, -1]$ og på $[1, \infty)$, avtagende på $[-1, 1]$, iii) lokalt minimum i $x = 1$, lokalt maksimum i $x = -1$, iv) Krummer opp på $[0, \infty)$, krummer ned på $(-\infty, 0]$, v) Vendepunkt for $x = 0$

c) i) $x = 1$, ii) Voksende på $[1, \infty)$, avtagende på $(-\infty, 1]$, iii) lokalt minimum i $x = 1$, iv) Krummer opp på overalt, v) Ingen vendepunkt

d) i) $x = 2^{\frac{1}{3}}$, ii) Voksende på $(-\infty, 0 >]$ og på $[2^{\frac{1}{3}}, \infty)$, avtagende på $(0, 2^{\frac{1}{3}}]$, iii) lokalt minimum i $x = 2^{\frac{1}{3}}$, iv) Krummer opp på $(-\infty, 0)$ og på $(0, \infty)$, v) Ingen vendepunkt

e) i) Ingen kritiske punkter, ii) Alltid voksende, iii) Ingen ekstremalpunkter, iv) Krummer opp på $[(4k+1)\frac{\pi}{2}, (4k+3)\frac{\pi}{2}]$ og ned på $[(4k-1)\frac{\pi}{2}, (4k+1)\frac{\pi}{2}]$ for alle hele tall k , v) Vendepunkt for $[(2k+1)\frac{\pi}{2}]$ for alle hele tall k ,

Oppgave 2. a) i) $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $x = -1$, $x = 2$, ii) Avtagende på $[-1, \frac{2}{\sqrt{3}}]$, voksende på $[\frac{2}{\sqrt{3}}, 2]$, iii) Lokalt minimum i $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$, lokale maksimum i $x = -1$ og i $x = 2$, iv) Krummer ned på $[-1, 0]$ og krummer opp på $[0, 2)$, v) vendepunkt for $x = 0$ vi) globalt maksimum i $x = -1$ og globalt minimum i $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

b) i) $x = 0$, $x = 2$, ii) Avtagende på $[0, 2]$, iii) Lokalt minimum i $x = 2$, lokalt maksimum i $x = 0$, iv) Krummer ned på hele $[0, 2]$, v) Ingen vendepunkter vi) Globalt minimum i $x = 2$, globalt maksimum i $x = 0$.

c) i) $x = 0$, $x = 2\pi$, ii) Voksende i hele definisjonsområdet, iii) Lokalt minimum i $x = 0$, lokalt maksimum i $x = 2\pi$, iv) Krummer opp på $[0, \pi]$ og ned på $[\pi, 2\pi]$, v) $x = \pi$ vi) globalt maksimum i $x = 2\pi$ og globalt minimum i $x = 0$.

d) i) $x = 0$, $x = \pm\frac{\pi}{2}$ og $x = \pm\pi$, ii) Avtagende på $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ og $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, voksende på $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ og $[0, \frac{\pi}{2}]$, iii) Lokalt minimum i $x = 0$ og i $x = \pm\pi$, lokale

maksimum i $x = \pm \frac{\pi}{2}$, iv) Krummer ned på $[-\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi]$ og på $[\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi]$, og krummer opp på $[-\pi, -\frac{3}{4}\pi]$, $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ og $[\frac{3}{4}\pi, \pi]$, v) vendepunkter for $x = -\frac{3}{4}\pi$, $x = -\frac{1}{4}\pi$, $x = \frac{1}{4}\pi$ og $x = \frac{3}{4}\pi$ vi) Globalt minimum i $x = 0$ og i $x = \pm\pi$, globalt maks i $x = \pm \frac{\pi}{2}$.

- Oppgave 3.** a) Vokser på $(-\infty, a]$, avtar på $[a, \infty)$, globalt maks for $x = a$.
 b) Krummer opp på $(-\infty, a-1]$ og på $[a+1, \infty)$, krummer ned på $[a-1, a+1]$, vendepunkt i $x = a \pm 1$

Oppgave 4. Vokser på $[1, 3]$, avtar på $[\frac{1}{4}, 1]$, minste verdi for $x = 1$, størst verdi for $x = 3$.

Oppgave 5. Kvadrat med side 25

Oppgave 6. Dimensjon $15m \times 30m$, med areal $450m^2$.

Oppgave 7. $11664cm^3$

Oppgave 8. 6 kroner

9.2 Kapittel 2

Oppgave 1. a) 9 b) 18 c) 16 d) 0

Oppgave 2. a) $\frac{9}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $2 + \frac{1}{2}\pi^2$

Oppgave 3. a) $\frac{3}{2}$ b) $2 \ln 2 + \frac{14}{3}$ c) $\frac{\sin(2\pi\omega)}{\omega^2-1}$ d) $\frac{1}{6}(e^3-1)$ e) $\frac{1}{4}(e^2+1)$

Oppgave 4. a) $\frac{5}{2}$ b) 1 c) 1

Oppgave 5. a) $\frac{14}{3}$ b) $\frac{3}{2} + \ln 2$ c) $\frac{2}{3}$

Oppgave 6. a) 8 b) $\frac{16}{15}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\sqrt{2}-1$ e) $\frac{9}{2}$

Oppgave 7. a) $\frac{64}{3}$ b) $270 - \frac{112}{3}$ c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(\ln 2)^2$

Oppgave 8. $\frac{27}{2}$

Oppgave 9. a) 1.98 b) 1.88 c) 1.52 d) 1.76

Oppgave 10. $n = 2: 0.69444 \pm 0.00833$, $n = 4: 0.69325 \pm 0.00052$, $n = 8: 0.69315 \pm 0.00003$, $\ln 2 \approx 0.693147$

Oppgave 11. a) 1.9 b) 2.2

Oppgave 12. a) -38, -37.3 b) -37.9

Oppgave 13. $n = 2: 0.5$, $n = 8: 0.5$

Oppgave 14. a) 1 b) 2 c) 1 d) $\frac{1}{64}$

Oppgave 15. a) 10 b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{2}$

Oppgave 16. a) Eksisterer b) Eksisterer ikke

Oppgave 17. a) 2 b) 4

9.3 Kapittel 3

Oppgave 1. $1 - x + x^2 - x^3$

Oppgave 2. $1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{5}{16}(x-1)^3$

Oppgave 3. $x^2 - \frac{1}{3}x^4$

Oppgave 4. a) $x^3 + 2x + 1$ b) $4 + 5(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$

Oppgave 5. a) $x - \frac{1}{2}x^2$, $|E_2(x)| = \frac{1}{3}\left(\frac{x}{c+1}\right)^3$, $|E_2(x)| \leq \frac{1}{3}x^3$

b) $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$, $|E_3(x)| = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{c+1}\right)^4$, $|E_3(x)| \leq \frac{1}{4}x^4$

Oppgave 6. a) $1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4$

b) $1 - x^2 + x^4$

Oppgave 7. $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$, $E_n = \frac{x^{n+1}}{(1-c)^{n+2}}$, $-1 < x < \frac{1}{2}$ (men rekken konvergerer for $|x| < 1$)

Oppgave 8.

Oppgave 9. a) Konvergerer b) Konvergerer c) Divergerer

Oppgave 10.

Oppgave 11. a) $1 + 3 + 9 + 27 = 40$ b) $2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} = \frac{73}{12}$

Oppgave 12. a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n+2}$ b) $3 \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ c) $2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Oppgave 13. a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{3}{4}$

Oppgave 14. $\frac{27}{8}$

Oppgave 15. *Rekka divergerer og da kan vi ikke regne på denne måten.*

Oppgave 16.

Oppgave 17.

Oppgave 18. a) Divergerer b) Divergerer c) Konvergerer d) Divergerer

Oppgave 19. a) Konvergerer b) Konvergerer c) Divergerer d) Konvergerer

Oppgave 20. b) 1

Oppgave 21. Konvergerer

9.4 Kapittel 4

Oppgave 1. a) 2.292 b) 2.221 c) $2\sqrt{e} - 1 \approx 2.297$

Oppgave 2. a) 0.781 b) 0.796 c) $e^{-0.25} \approx 0.779$

Oppgave 3. a) 0.6250 b) 0.4593 c) $\sqrt{e} - 1 \approx 0.6487$

Oppgave 4. a) 2.12 b) 2.08

Oppgave 5. a) 4.7083 b) 4.5950 c) $2 + e \approx 4.7183$

Oppgave 6. a) -0.777 b) -0.810

Oppgave 7. 1.53

9.5 Kapittel 5

Oppgave 1.

Oppgave 2.

Oppgave 3.

Oppgave 4.

Oppgave 5. a) $2x, 3y^2$ b) $1 + \cos x, 0$ c) $2xy^2 + y, 2x^2y + x$

Oppgave 6. a) $\sin y + y \cos x, x \cos y + \sin x$ b) ye^{xy}, xe^{xy} c) $\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}$

Oppgave 7. a) $y + z, x + z, y + x$ b) $x_2x_3 - x_1x_3, x_1x_3, x_1x_2 - \frac{1}{2}x_1^2$
c) $2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n$

Oppgave 8. a) $2 \cdot 6y - 0^2 = 12y$ b) $0 \cdot 0 - 1^2 = -1$
c) $0 \cdot (-x \sin y) - (\cos y)^2 = -\cos^2 y$

Oppgave 9. a) 0 b) $2xy \sin(xy) \cos xy - \cos^2(xy)$

Oppgave 10. a) $(0, 0)$ b) $(-1, -1)$ c) $(0, y)$

Oppgave 11. a) $(0, 0)$ b) $(0, 0)$ og hyperbelen $xy - 1 = 0$ c) $(-1, 1)$

Oppgave 12. a) $(0, 0)$ og $(1, 1)$ b) $(0, 0)$ og $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$
c) $(0, 0)$ og sirkelen $x^2 + y^2 = 1$

Oppgave 13.

Oppgave 14.

Oppgave 15. a) 7500 b) 3056 c) 3750

Oppgave 16. 16 (sirkel: 4π)

Oppgave 17. $\ln N = 0.067 \cdot t + 0.84$ gir $N = 2.32e^{0.067t}$, ca. juni 2014

Oppgave 18. $z = 0, 51t - 0, 08, 5.0$

9.6 Kapittel 6

Oppgave 1. a) $(2x + y^3 \cos(xy), 2y \sin(xy) + xy^2 \cos(xy))$

b) $(e^x \cos y, -e^x \sin y)$

c) $(2xy^3, 3x^2y^2)$

Oppgave 2. a) $(2x + y^3 \cos(xy) + yz, 2y \sin(xy) + xy^2 \cos(xy) + xz, xy)$

b) $(ze^{xz}(\cos y + \sin w), -e^{xz} \sin y, xe^{xz}(\cos y + \sin w), e^{xz} \cos w)$

c) $(2x_1, \dots, 2x_n)$

Oppgave 3. a) *Konservativt, $x^3y^2 + x + y$* b) *Ikke konservativt*
c) *Konservativt, $\sin(xy)$*

Oppgave 4. a) *Konservativt, e^{xy}* b) *Ikke konservativt*

Oppgave 5. a) *Konservativt, $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$* b) *Konservativt, x^3y* c) *Ikke konservativt*

Oppgave 6. $ax + by$

Oppgave 7. a) og c)

Oppgave 8. a) og c)

Oppgave 9. b) $-x - y$ c) $x + y = 4$

Oppgave 10. b) $y - x^2$ c) $y - x^2 = 1$

Oppgave 11. b) $x^2y + 2x$ c) $x^2y + 2x = 3$

Oppgave 12. a) $y^3 - x^2$ b) $2x$ c) $2x - 2y$

Oppgave 13. a) $3x^2 + 3y^2$ b) $(0, 0), 0$

Oppgave 14. a) 0 b) $3x^2e^y$ c) 0

Oppgave 15. a) 0 b) $-\sin x + \cos y, 2$

Oppgave 16.

Oppgave 17. a) 0 b) 6 c) $(x^2 + y^2)e^{xy}$

9.7 Kapittel 7

Oppgave 1. a) (t, t) b) $(t, t^2 - 2)$ c) $(\cos t, \sin t)$

Oppgave 2. a) $x - 2y = 5$ b) $x^3 - y^2 = 0$ c) $x - \sin^2(y + 1) = 0$

Oppgave 3. $(2, 2), (5, -1)$

Oppgave 4. a) $(2, 1), (-1, 2)$ b) $(2t, 3t^2), (-3t^2, 2t)$ c) $(\sin 2t, 1), (-1, \sin 2t)$

Oppgave 5. a) $2\sqrt{5}$ b) $\sqrt{a^2 + b^2}$

Oppgave 6. a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}$

Oppgave 7. a) 2π b) $\frac{335}{27}$

Oppgave 8. $-\frac{14}{15}$

Oppgave 9. -2π

Oppgave 10. 10

Oppgave 11. -2π

Oppgave 12. *F.eks. sirkelen $x^2 + y^2 = 1$*

Oppgave 13. *Veldig mange muligheter*

Oppgave 14. a) $(2xy + 2, x^2 + 2xy)$ b) 48 c) 48

Oppgave 15. b) $-\cos(xy)$ c) 0

Oppgave 16. b) xe^y c) $2e$

Oppgave 17. b) $x + y$ 0

9.8 Kapittel 8

Oppgave 1. a) $\frac{1}{4}(e^4 - e)(e^9 - e)$ b) $\frac{45}{4} + \frac{15}{2} \ln 3 - \frac{15}{2} \ln 2$
c) $2 - \frac{2}{e}$

Oppgave 2. a) $\frac{8}{3}$ b) $\frac{2}{15}$ c) $e + \frac{1}{e} - 2$

Oppgave 3. 1

Oppgave 4. 3

Oppgave 5. a) 10 b) $\frac{19}{12}$ c) $\frac{1}{4}e^4 - e + \frac{3}{4}$

Oppgave 6. a) $\frac{2}{3}$ b) $a^2 + a + \frac{2}{3}$ c) $\frac{2}{3}a^2$

Oppgave 7. $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{2}{5}$

Oppgave 8. a) $\frac{1}{12}$ b) $\bar{x} = \frac{3}{5}, \bar{y} = \frac{12}{35}$

Oppgave 9. πab

Oppgave 10. -4

Oppgave 11. 4

Oppgave 12. 4π