MAT 1012, Oblig 2

Innleveringsfrist: Torsdag 24. april 2014 kl. 1430

Det er lov til å samarbeide om løsning av oppgavene, men alle skal levere inn sin egen versjon. Husk å skrive på navn og kurskode (MAT 1012). Oppgaven leveres på ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt i 7. etg. i Niels Henrik Abels hus innen fristen.

Oppgave 1

La $\mathbf{F}(x,y) = \big(P(x,y),\, Q(x,y)\big)$ være et plant (deriverbart) vektorfelt. Vi kan da definere *den lineære approksimasjonen til* $\mathbf{F}(x,y)$ *rundt* $(0,0)$ ved vektorfeltet

$$\mathbf{L}(x,y) = (L_P(x,y), L_Q(x,y))$$

hvor

$$L_P(x,y) = P(0,0) + \frac{\partial P}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial P}{\partial y}(0,0)\,y,$$
$$L_Q(x,y) = Q(0,0) + \frac{\partial Q}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial Q}{\partial y}(0,0)\,y)$$

I resten av denne oppgaven lar vi

$$\mathbf{F}(x,y) = \Big((1+\sin 2x)\,e^{x+y}\,,(x+1)^2(y+1)\Big)$$

a) Beregn den lineære approksimasjonen $\mathbf{L}(x,y)$ til $\mathbf{F}(x,y)$ rundt $(0,0)$.

b) Beregn sirkulasjonen til $\mathbf{F}$ og til $\mathbf{L}$ i $(0,0)$ og sjekk at disse er like.

La $r > 0$ og la γ være sirkelen i xy-planet parametrisert ved

$$x(t) = r\cos t,\ y(t) = r\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$$

Sirkelskiva som γ omslutter kaller vi D. Dersom r er liten kan vi beregne linjeintegralet til $\mathbf{F}$ langs γ approksimativt ved å beregne linjeintegralet til $\mathbf{L}$ langs γ.

c) Beregn $\oint_\gamma \mathbf{L}\cdot\mathbf{T}_\gamma\,ds$. (Husk at $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.)

Ved Greens teorem har vi at

$$\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}_\gamma\,ds = \iint_D curl(\mathbf{F})\,dx\,dy$$

Hvis r er liten, kan vi approksimativt anta at $curl(\mathbf{F})$ er konstant på hele D.

d) Bruk dette til å beregne en tilnærmet verdi for $\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}_C\,ds$ i dette tilfellet, og sammenlikn dette svaret med verdien du fant i oppgave c).

Oppgave 2

La D betegne området som ligger i 1. kvadrant av xy-planet og som begrenses av y-aksen, linja $y = x$ og sirkelen med likning $x^2 + y^2 = 1$.

a) Lag en skisse av området D og angi D som et område av type I. Hvor stort er arealet av D?

b) La $P = (\overline{x}, \overline{y})$ angi tyngdepunktet til D. Beregn P. Tegn P inn i skissen du lagde i a).

c) Beregn verdien av tallet $a = \frac{\overline{y}}{\overline{x}}$. Gi en geometrisk forklaring for at $\tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) = a$. Du kan sjekke svaret ditt ved å bruke formelen

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

og det faktum at $\tan\left(2 \cdot \frac{3\pi}{8}\right) = \tan\frac{3\pi}{4} = -1$.

Vi betrakter i resten av oppgaven vektorfeltet i xy-planet gitt ved $F(x, y) = (xy, x^2)$.

d) Beregn sirkulasjonen til F. Avgjør om F er konservativt.

La så C betegne randkurven til området D, som vi gjennomløper i positivt retning, dvs mot klokkeretningen (sett ovenfra). Denne kurven C består av tre delkurver, C_1, C_2 og C_3 som kan parametriseres hver for seg. Vi har da at linjeintegralet til F langs C er gitt ved

$$(*) \qquad \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C \, dt = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_{C_1} \, dt + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_{C_2} \, dt + \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_{C_3} \, dt$$

e) Angi en parametrisering for hver av delkurvene C_1, C_2 og C_3. Pass da på at hver delkurve gjennomgåes i samme retning som C.

f) Bruk e) og $(*)$ til å beregne $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C \, dt$.

g) Greens teorem gjelder for området D og dets randkurve C. Bruk det til å beregne $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C \, dt$, og sjekk at du får samme svar som i f).

Oppgave 3

Forklar hvorfor mengden $\{1, x, 2x^2, 1 + x + x^2\}$ av polynomer i én variabel er lineært avhengig. Hva er dimensjonen til vektorrommet utspent av denne mengden?

SLUTT.