LØSNINGSFORSLAG TIL OPPGAVER

5. + 6. MARS (...noen utvalgte!)

4

a) Sidebetingelser sier at

$$\text{I} \quad w_1\hat{r}_1 + w_2\hat{r}_2 = r$$

$$\text{II} \quad w_1 + w_2 = 1$$

II gir $w_2 = 1 - w_1$. Innsatt i I gir

$$w_1\hat{r}_1 + (1-w_1)\hat{r}_2 = r \Leftrightarrow (\hat{r}_1 - \hat{r}_2)w_1 + \hat{r}_2 = r$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{w_1 = \frac{r - \hat{r}_2}{\hat{r}_1 - \hat{r}_2}}}$$

Fra II får vi: $w_2 = 1 - w_1 = 1 - \frac{r - \hat{r}_2}{\hat{r}_1 - \hat{r}_2}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{w_2 = \frac{\hat{r}_1 - r}{\hat{r}_1 - \hat{r}_2}}}$$

Siden vi fra sidebetingelsene bare har

ett mulig valg av w_1 og w_2, så er det ingenting å minimere $\underline{w}^T C \underline{w}$ over, kun

$w_1 = \frac{r - \hat{r}_2}{\hat{r}_1 - \hat{r}_2}$ og $w_2 = \frac{\hat{r}_1 - r}{\hat{r}_1 - \hat{r}_2}$.

Risikoen blir

$$\underline{w}^T C \underline{w} = [w_1 \ w_2] \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$= C_{11} w_1^2 + 2 C_{12} w_1 w_2 + C_{22} w_2^2$$

$$= C_{11} \left(\frac{r - \hat{r}_2}{\hat{r}_1 - \hat{r}_2} \right)^2 + 2 C_{12} \left(\frac{r - \hat{r}_2}{\hat{r}_1 - \hat{r}_2} \right) \left(\frac{\hat{r}_1 - r}{\hat{r}_1 - \hat{r}_2} \right) + C_{22} \left(\frac{\hat{r}_1 - r}{\hat{r}_1 - \hat{r}_2} \right)^2$$

= ... pynt litt selv !

b) Med $d = 3$ vil sidebetingelsene bli

$$\text{I} \quad w_1 \hat{r}_1 + w_2 \hat{r}_2 + w_3 \hat{r}_3 = r$$

$$\text{II} \quad w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

II gir $w_3 = 1 - w_1 - w_2$. Innsatt i I finner vi

$$w_1 \hat{r}_1 + w_2 \hat{r}_2 + (1 - w_1 - w_2) \hat{r}_3 = r$$

$$\Rightarrow \quad w_2(\hat{r}_2-\hat{r}_3) = r-\hat{r}_3 - w_1(\hat{r}_1-\hat{r}_3)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{w_2 = \frac{r-\hat{r}_3}{\hat{r}_2-\hat{r}_3} - w_1 \frac{\hat{r}_1-\hat{r}_3}{\hat{r}_2-\hat{r}_3}}$$

Setter vi uttrykket for w_2 inn i $w_3 = 1-w_1-w_2$ finner vi

$$\underline{w_3} = 1-w_1-\left(\frac{r-\hat{r}_3}{\hat{r}_2-\hat{r}_3} - w_1\frac{\hat{r}_1-\hat{r}_3}{\hat{r}_2-\hat{r}_3}\right)$$

$$\underline{= \frac{\hat{r}_2-r}{\hat{r}_2-\hat{r}_3} + w_1\frac{\hat{r}_1-\hat{r}_2}{\hat{r}_2-\hat{r}_3}}$$

Fra dette konkluderer vi at både w_2 og w_3 er bestemt av w_1. Markowitz' optimeringsproblem blir derfor en minimering av uttrykket $\underline{w}^T C \underline{w}$ over kun w_1 for $\underline{d=3}$.

Merk at

$$[w_1\ w_2\ w_3]\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3\end{bmatrix}$$

$= w_1^2 C_{11} + 2w_1 w_2 C_{12} + w_2^2 C_{22} + 2 w_1 w_3 C_{13} +$

$+ 2 w_2 w_3 C_{23} + w_3^2 C_{33}.$

Setter inn sidebetingelsene, som gir (se over!)

$$w_2 = \underbrace{\frac{r - \hat{r}_3}{\hat{r}_2 - \hat{r}_3}}_{:= a} - w_1 \underbrace{\frac{\hat{r}_1 - \hat{r}_3}{\hat{r}_2 - \hat{r}_3}}_{:= b}, \quad w_3 = \underbrace{\frac{\hat{r}_2 - r}{\hat{r}_2 - \hat{r}_3}}_{:= \alpha} + w_1 \underbrace{\frac{\hat{r}_1 - \hat{r}_3}{\hat{r}_2 - \hat{r}_3}}_{:= \beta}$$

$$= w_1^2 C_{11} + 2w_1 \cdot (a - bw_1) C_{12} + (a - bw_1)^2 C_{22} +$$
$$+ 2w_1 (\alpha + \beta w_1) C_{13} + 2 (a - bw_1)(\alpha + \beta w_1) C_{23} + (\alpha + \beta w_1)^2 C_{33}$$

Derfor vil (for $d=3$!)

$\min_{w} \underline{w}^T C \underline{w}$, slik at $\underline{w}^T \hat{\underline{r}} = r$ og $\underline{w}^T \underline{1} = 1$

bli

$$\min_{w_1} \; w_1^2 C_{11} + 2w_1 (a - bw_1) C_{12} + (a - bw_1)^2 C_{22}$$
$$+ 2 w_1 (\alpha + \beta w_1) C_{13} + 2 (a - bw_1)(\alpha + \beta w_1) C_{23} + (\alpha + \beta w_1)^2 C_{33}$$

For å finne minimum kan vi nå se på

funksjonen

$$f(x) = x^2 c_{11} + 2x(a-bx)c_{12} + (a-bx)^2 c_{22} + 2x(\alpha+\beta x)c_{13}$$
$$+ 2(a-bx)(\alpha+\beta x)c_{23} + (\alpha+\beta x)^2 c_{33}$$

og sette dens deriverte til 0 :

$$f'(x) = 2c_{11}x + 2(a-2bx)c_{12} + 2(a-bx)(-b)c_{22}$$
$$+ 2(\alpha+2\beta x)c_{13} + 2(a\beta-\alpha b-2b\beta x)c_{23}$$
$$+ 2(\alpha+\beta x)\beta c_{33} = 0$$

Deler på 2, og samler x ;

$$(c_{11} - 2bc_{12} + b^2 c_{22} + 2\beta c_{13} - 2b\beta c_{23} + \beta^2 c_{33})x$$
$$+ ac_{12} - bac_{22} + \alpha c_{13} + (a\beta-\alpha b)c_{23} + \alpha\beta c_{33} = 0$$

Som gir

$$\underline{\underline{\omega_1}} = x = \underline{\underline{\frac{ac_{12} - bac_{22} + \alpha c_{13} + (a\beta-\alpha b)c_{23} + \alpha\beta c_{33}}{c_{11} - 2bc_{12} + b^2 c_{22} + 2\beta c_{13} - 2b\beta c_{23} + \beta^2 c_{33}}}}$$

Kan vi sette inn for a, b, α, β. Videre, så kan vi sette inn denne ω_1 i uttrykkene for ω_2 og w₃ for å kalkulere med optimal allokering i tilfellet $d=3$!

5

a) $u(500.000)=\sqrt{500.000} \approx 707$

$u(750.000)=\sqrt{750.000} \approx 866$

$u(1.000.000)=\sqrt{1.000.000} = 1000$

b) 10% lønnsøkning for hver

$u(500.000+50.000)=\sqrt{550.000} \approx \underline{\underline{742}}$

%-økning i nytte: $\frac{742-707}{707} \approx 0{,}0488 \approx \underline{\underline{4{,}9\,\%}}$

$u(750.000+75.000)=\sqrt{825.000} = \underline{\underline{908}}$

%-økning i nytte: $\frac{908-866}{866} \approx 0{,}0488 \approx \underline{\underline{4{,}9\,\%}}$

$u(1.000.000+100.000)=\sqrt{1.100.000} \approx \underline{\underline{1049}}$

%-økning i nytte: $\frac{1049-1000}{1000} \approx 0{,}049 \approx \underline{\underline{4{,}9\,\%}}$

Er det en tilfeldighet at vi får samme marginale %-økning i nytte?

Hvis du har lønn x, og du øker denne med en %-økning p, har du $x + \frac{p}{100} \cdot x$ i lønn etterpå:

$$\frac{u(x+\frac{p}{100}\cdot x) - u(x)}{u(x)} = \frac{\sqrt{x+\frac{p}{100}\cdot x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{(1+\frac{p}{100})x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\left(\sqrt{1+\frac{p}{100}} - 1\right)\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}}}$$

$$= \underline{\sqrt{1+\frac{p}{100}} - 1}$$

Uansett lønn, vil nytten øke like mye i % når de får et %-tillegg.

c) Fast kronetillegg:

$$u(500.000 + 75.000) = \sqrt{575.000} \approx \underline{\underline{758}}$$

$$\text{\%-økning: } \frac{758 - 707}{707} = 0{,}072 = \underline{\underline{7{,}2\%}}$$

$U(750.000+75.000) = \underline{\underline{908}}$, og %-økning $= \underline{\underline{4,9\%}}$

(se b) over)

$U(1.000.000+75.000) = \sqrt{1.075.000} = \underline{\underline{1037}}$

%-økning: $\dfrac{1037-1000}{1000} = 0,037 = \underline{\underline{3,7\%}}$

Merk at med dette lønnstillegget vil nytten til den som tjener minst øke med nesten dobbelt så mye som nytten til den som tjener mest.

d) Gjør selv. Men merk at med %-tillegg på lønna øker nytten %-vis likt. Men vi får litt andre tall og %-er enn i b). Med lønnstillegg får vi også andre verdier enn i c). Hva vi får i nytte, og hvor mye ekstra "glede" vi får av lønnsøkning, avhenger av hva slags nyttefunksjon vi har.

Nyttefunksjoner, er de nyttige? Gruble litt på det!

③

Finner y^T :

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} = [a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4,\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4,$$

$$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4,\ a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4]$$

Dette betyr at $y^T = [y_1\ y_2\ y_3\ y_4]$ med

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4$$

$$y_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4$$

$$y_3 = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4$$

$$y_4 = a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4$$

Videre, vil dermed

$$y = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 \end{bmatrix}$$

Finner z :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 \end{bmatrix} = z$$

Vi ser at $z = y$!

Oppgavene 2, 6 og 7 er gjort på forelesninger.

Alle oppfordres til å gjøre oppgave 1.