LØSNINGSFORSLAG TIL OPPGAVER

9. + 10. APRIL

1) Er gjort på forelesning

2) Er gjort på forelesning.

3) Nyttefunksjonen er $L(h) = h^{1/4}$.

Vi finner at $\underline{\underline{V(3,B) = \rho^3 B^{1/4}}}$

Dynamisk programmeringsprinsipp (DPP):

$$V(2,B) = \max_{0 \le h(2) \le B} \rho^2 h(2)^{1/4} + \underbrace{V(3, B(3))}$$

$$= \rho^3 B(3)^{1/4} = \rho^3 (R(B(2) - h(2)))^{1/4}$$

$$= \rho^3 R^{1/4} (B - h(2))^{1/4}$$

$$= \max_{0 \le h(2) \le B} \rho^2 h(2)^{1/4} + \rho^3 R^{1/4} (B - h(2))^{1/4}$$

Introduserer funksjonen

$$f(x) = \rho^2 x^{1/4} + \rho^3 R^{1/4} (B-x)^{1/4}$$

Finner maksimum av denne:

$$f'(x) = \rho^2 \frac{1}{4} x^{-3/4} + \rho^3 R^{1/4} \cdot \frac{1}{4} (B-x)^{-3/4} (-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^{-3/4} = \rho R^{1/4} (B-x)^{-3/4} \quad \Big| \ ^{\left(-\frac{4}{3}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \left(\rho R^{1/4}\right)^{\left(-\frac{4}{3}\right)} (B-x)$$

$$\Rightarrow \quad x^* = \frac{B}{1+(\rho^4 R)^{1/3}}$$

Vi kan vise at $f''(x^*) < 0$ (sjekk selv!), og dermed er x^* et maksimumspunkt. Siden $0 \leq x^* < B$, har vi funnet at

$$h_1^*(2) = \frac{B(2)}{1+(\rho^4 R)^{1/3}}$$

Definer $k = (\rho^4 R)^{1/3}$

Vi regner ut $V(2,B)$:

$$\underline{\underline{V(2,B)}} = \rho^2 h^*(2)^{1/4} + \rho^3 R^{1/4}(B - h^*(2))^{1/4}$$

$$= \rho^2 \left(\frac{B}{1+k}\right)^{1/4} + \rho^3 R^{1/4} \Big(\underbrace{B - \frac{B}{1+k}}_{= \frac{(1+k)B}{1+k} - \frac{B}{1+k} = \frac{k}{1+k} B}\Big)^{1/4}$$

$$= \rho^2 \frac{B^{1/4}}{(1+k)^{1/4}} + \rho^3 R^{1/4} \frac{k^{1/4}}{(1+k)^{1/4}} B^{1/4}$$

$$= \rho^2 \frac{B^{1/4}}{(1+k)^{1/4}} \Big(1 + \underbrace{\rho R^{1/4}}_{=(\rho^4 R)^{1/4} = \left(\left(\underbrace{(\rho^4 R)^{\frac{1}{3}}}_{=k}\right)^3\right)^{\frac{1}{4}} = k^{\frac{3}{4}}} k^{1/4}\Big)$$

$$= \rho^2 \frac{B^{1/4}}{(1+k)^{1/4}} (1+k)$$

$$\underline{\underline{= \rho^2 (1+k)^{\frac{3}{4}} B^{1/4}}}$$

Finner $h(1)$ ved DPP :

$$V(1,B) = \max_{0 \le h(1) \le B} \Big(\rho\, h(1)^{1/4} + V(2, \underbrace{B(2)}_{=R(B(1)-h(1)) = R(B-h(1))})\Big)$$

$$= \max_{0 \le h(1) \le B} \rho h(1)^{1/4} + \rho^2 (1+k)^{\frac{3}{4}} \left(R(B - h(1)) \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \max_{0 \le h(1) \le B} \rho h(1)^{\frac{1}{4}} + \rho^2 (1+k)^{\frac{3}{4}} R^{\frac{1}{4}} (B - h(1))^{\frac{1}{4}}$$

Definerer funksjonen

$$f(x) = \rho x^{\frac{1}{4}} + \rho^2 (1+k)^{\frac{3}{4}} R^{\frac{1}{4}} (B - x)^{\frac{1}{4}}$$

Finner maksimum:

$$f'(x) = \rho \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} + \rho^2 (1+k)^{\frac{3}{4}} R^{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} (B-x)^{-\frac{3}{4}} (-1) = 0$$

Etter litt regning, tilsvarende som over, finner vi

$$\underline{x^*} = \frac{B}{1 + \left(\rho (1+k)^{\frac{3}{4}} R^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{4}{3}}} = \underline{\frac{B}{1+k+k^2}}$$

Kan vise at $f''(x^*) < 0$, og vi får at $0 < x^* < B$.

$$\Rightarrow \underline{\underline{h^*(1)}} = \underline{\underline{\frac{B(1)}{1+k+k^2}}}$$

Husk at $k = (\rho^4 R)^{1/3}$

Regner ut $V(1,B)$:

$$\underline{\underline{V(1,B)}} = \rho\, h^*(1)^{1/4} + \rho^2 (1+k)^{3/4} \cdot R^{1/4} (B - h^*(1))^{1/4}$$

$$= \rho \frac{B^{1/4}}{(1+k+k^2)^{1/4}} + \rho^2 (1+k)^{3/4} R^{1/4} \Big(\underbrace{\frac{1+k+k^2}{1+k+k^2} B - \frac{1}{1+k+k^2} B}_{= \frac{k+k^2}{1+k+k^2} B} \Big)^{1/4}$$

$$= \rho \frac{B^{1/4}}{(1+k+k^2)^{1/4}} \Big(1 + \underbrace{\rho (1+k)^{3/4} R^{1/4} k^{1/4} (1+k)^{1/4}}_{= (1+k) k^{1/4} \rho R^{1/4} = (1+k) k^{1/4} (\rho^4 R)^{1/4} = (1+k) k^{1/4} k^{3/4} = k(1+k)} \Big)$$

$$= \rho \frac{B^{1/4}}{(1+k+k^2)^{1/4}} (1+k+k^2)$$

$$\underline{\underline{= \rho (1+k+k^2)^{3/4} B^{1/4}}}$$

Vi finner så $h^*(0)$ ved DPP:

$$V(0,B) = \max_{0 \le h(0) \le B} \Big(h(0)^{\frac{1}{4}} + V(1, B(1)) \Big)$$

$$= \max_{0 \le h(0) \le B} h(0)^{\frac{1}{4}} + \rho (1+k+k^2)^{\frac{3}{4}} \cdot R^{\frac{1}{4}} (B - h(0))^{\frac{1}{4}}$$

Definer funksjonen

$$f(x) = x^{\frac{1}{4}} + \beta(1+k_2+k_2^2)^{\frac{3}{4}} R^{\frac{1}{4}} (B-x)^{\frac{1}{4}}$$

Finner maksimum

$$f'(x) = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} + \beta(1+k_2+k_2^2)^{\frac{3}{4}} R^{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} (B-x)^{-\frac{3}{4}} (-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x^* = \frac{B}{1+k_2+k_2^2+k_2^3}}$$

Vi kan vise at $f''(x^*) < 0$, og $0 < x^* < B$.

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{h^*(0) = \frac{B}{1+k_2+k_2^2+k_2^3}}}$$

Vi trenger ikke å regne ut $V(0, B)$, siden vi nå har funnet alle innhøstingene $h^*(0), h^*(1)$ og $h^*(2)$.

La oss regne ut bestanden $B(3)$ hvis vi høster optimalt:

$$B(1) = R(B - h^*(0)) = R\left(B - \frac{B}{1+k_2+k_2^2+k_2^3}\right)$$

$$= \underbrace{R \frac{k(1+k_2+k_2^2)}{1+k_2+k_2^2+k_2^3} B}$$

$$B(2) = R\left(B(1) - h^*(1)\right) = R\left(B(1) - \frac{B(1)}{1+k+k^2}\right)$$

$$= R\,\frac{k(1+k)}{1+k+k^2}\,B(1)$$

$$= R\,\frac{k(1+k)}{\cancel{1+k+k^2}} \cdot R\,\frac{k(\cancel{1+k+k^2})}{1+k+k^2+k^3}\,B$$

$$= R^2\,\frac{k^2(1+k)}{1+k+k^2+k^3}\,B$$

$$B(3) = R\left(B(2) - h^*(2)\right) = R\left(B(2) - \frac{B(2)}{1+k}\right)$$

$$= R\,\frac{k}{1+k}\,B(2)$$

$$= R\,\frac{k}{\cancel{1+k}} \cdot R^2\,\frac{k^2\cancel{(1+k)}}{1+k+k^2+k^3}\,B$$

$$= R^3\,\frac{k^3}{1+k+k^2+k^3}\,B$$

Vi setter nå inn verdiene $B = 100$, $\rho = \frac{1}{1,05}$ og $R = 1,1$ og analyserer hvordan vi optimalt forvalter den fornybare ressursen (torsken) med nyttefunksjonen $L(h) = h^{1/4}$

$$k = (\beta^4 R)^{1/3} = \left(\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^4 \cdot 1{,}1\right)^{1/3} \simeq \underline{0{,}9673}$$

Starter med $B(0) = B = 100$.

Hvertes optimalt av beholdningen:

$$\underline{\underline{h^*(0)}} = \frac{100}{1+k+k^2+k^3} = \underline{\underline{26{,}3}}$$

(med $L(h) = h^{1/2}$ finner vi $h^*(0) = 25{,}1$)

Vi fisker 26,3 fisk fra beholdningen på 100, litt mer enn med kvadratrot-nytte.

Regenerering:

$$\underline{B(1)} = 1{,}1 \cdot (100 - 26{,}3) \simeq \underline{81{,}1}$$

Hvertes optimalt av dette:

$$\underline{\underline{h^*(1)}} = \frac{81{,}1}{1+k+k^2} = \underline{\underline{27{,}9}}$$

(med $L(h) = h^{1/2}$ finner vi $h^*(1) = 27{,}5$)

Vi fisker 27,9 fisk fra beholdningen på 81,1 fisk, fortsatt litt mer enn med kvadratrot-nytte.

Regenerering

$B(2) = 1{,}1 \cdot (81{,}1 - 27{,}9) = 58{,}5$

Hvertes optimalt fra denne:

$h^*(2) = \frac{58{,}5}{1+\frac{1}{...}} = 29{,}7$ (med $L(h) = h^{1/2}$ er $h^*(2) = 30{,}2$)

Vi fisker 29,7 fisk fra bestanden på 58,5, som er litt færre fisk enn med kvadratrot-nytte.

Regenerering

$B(3) = 1{,}1 \cdot (58{,}5 - 29{,}7) = 31{,}7$

Vi overlater 31,7 fisk, som er litt færre enn det vi finner med kvadratrot-nytte

(med kvadratrot-nytte vil $B(3) = 33{,}2$)

Nyttefunksjonen påvirker hvordan vi optimalt skal høste og overføre til neste generasjon.

4

Løser optimeringsproblemet med DPP:

Først, for definisjonen av verdifunksjonen til dette optimeringsproblemet:

$$V(2,S) = \rho^2 S^{\gamma}$$

$$V(1,S) = \max_{0 \leq h(1) \leq S} \rho h(1)^{\gamma} + \rho^2 S(2)^{\gamma}$$

$$V(0,S) = \max_{\substack{0 \leq h(0) \leq S \\ 0 \leq h(1) \leq S(1)}} \sum_{s=0}^{1} \rho^s h(s)^{\gamma} + \rho^2 S(2)^{\gamma}$$

Vi finner først $h(1)$ ved bruk av DPP:

$$V(1,S) = \max_{0 \leq h(1) \leq S} \left(\rho h(1)^{\gamma} + V(2, \underbrace{S(2)}_{= S - h(1)})\right)$$

$$= \max_{0 \leq h(1) \leq S} \rho h(1)^{\gamma} + \rho^2 (S - h(1))^{\gamma}$$

Definerer

$$f(x) = \rho x^{\gamma} + \rho^2 (S - x)^{\gamma}$$

og maksimerer denne:

$$f'(x) = \rho \gamma x^{\gamma-1} + \rho^2 \gamma (S-x)^{\gamma-1} \cdot (-1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^{\gamma-1} = \rho (S-x)^{\gamma-1} \quad \Big| \ ^{\left(\frac{1}{\gamma-1}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad x = \rho^{\frac{1}{\gamma-1}} (S-x)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x^* = \frac{S}{1+\rho^{\frac{1}{1-\gamma}}}}$$

Kan vise at $f''(x^*) < 0$ (vis dette selv!)

Videre er $0 < x^* < S$ siden $\rho^{\frac{1}{1-\gamma}} > 0$.

Dermed blir

$$\underline{\underline{h^*(1) = \frac{S(1)}{1+\rho^{\frac{1}{1-\gamma}}}}}$$

$\rightarrow \underline{k = \rho^{\frac{1}{1-\gamma}}}$

for å gjøre notasjonen enklere.

$$\underline{\underline{V(1,S)}} = \rho\, h^*(1)^\gamma + \rho^2 (S - h^*(1))^\gamma$$

$$= \rho \frac{S^\gamma}{(1+k)^\gamma} + \rho^2 \left(S - \frac{S}{1+k}\right)^\gamma$$

$$= \rho \frac{S^\gamma}{(1+k)^\gamma} + \rho^2 \frac{k^\gamma}{(1+k)^\gamma} S^\gamma$$

$$= \rho \frac{S^\gamma}{(1+k)^\gamma}\underbrace{\left(1+\rho k^\gamma\right)}$$

$$= 1+\rho\left(\rho^{\frac{1}{1-\gamma}}\right)^\gamma = 1+\rho\cdot\rho^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = 1+\rho^{1+\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

$$= 1+\rho^{\frac{1}{1-\gamma}} = 1+k$$

$$= \rho \frac{S^\gamma}{(1+k)^\gamma}\cdot(1+k) = \underline{\underline{\rho(1+k)^{1-\gamma} S^\gamma}}$$

Finner $h^*(0)$ ved DPP:

$$V(0,S) = \max_{0\le h(0)\le S}\left(h(0)^\gamma + V(1, S(1))\right)$$

$$= \max_{0\le h(0)\le S} h(0)^\gamma + \rho(1+k)^{1-\gamma}\cdot\left(S-h(0)\right)^\gamma$$

Definerer

$$f(x) = x^\gamma + \rho(1+k)^{1-\gamma}(S-x)^\gamma$$

$$f'(x) = \gamma x^{\gamma-1} + \rho(1+k)^{1-\gamma}\gamma(S-x)^{\gamma-1}(-1) = 0$$

$$\ldots\ldots \Rightarrow x^* = \frac{S}{1+k(1+k)}$$

Kan vise at $f''(x) < 0$, og siden $k > 0$ vil $0 < x^* < S$ (vi deler S på $1 + \underbrace{k(1+k)}_{>0} > 1$).

$$\Rightarrow \quad h^*(0) = \frac{S}{1+k+k^2}$$

Vi trenger ikke å regne ut hva $V(0,s)$ er siden vi nå har funnet $h^*(0)$ og $h^*(1)$.

Beregner $S(1)$ og $S(2)$ når vi pumper optimalt:

$$S(2) = S(1) - h^*(1) = S(1) - \frac{S(1)}{1+k}$$

$$= \frac{k}{1+k} S(1) = \frac{k}{k+1}\left(\underbrace{S(0)}_{= S} - h^*(0)\right)$$

$$= \frac{k}{k+1}\left(S - \frac{S}{1+k+k^2}\right)$$

$$= \frac{k}{k+1} \cdot \frac{\overbrace{k+k^2}^{= k(k+1)}}{1+k+k^2} S$$

$$= \frac{k^2}{1+k+k^2} \cdot S$$

$$k = \rho^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

Anta nå at vi ikke neddiskonterer. Dette betyr at

$\rho = 1$. Fra over ser vi da at $\left(k = \rho^{\frac{1}{1-r}} = 1^{\frac{1}{1-r}} = 1 \right)$

$$\underline{\underline{h^*(1)}} = \frac{S(1)}{1+1} = \underline{\underline{\tfrac{1}{2} S(1)}}$$

$$\underline{\underline{h^*(0)}} = \frac{S}{1+1+1} = \underline{\underline{\tfrac{1}{3} S}}$$

(evt. gjør optimeringen på nytt med DPP!)

$$\underline{\underline{S(2)}} = S(1) - h^*(1) = S(1) - \tfrac{1}{2} S(1) = \tfrac{1}{2} S(1)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(S - h^*(0)\right) = \tfrac{1}{2}\left(S - \tfrac{1}{3} S\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} S = \underline{\underline{\tfrac{1}{3} S}}$$

Hvis vi ikke neddiskonterer, sparer vi $\frac{1}{3} S$ til fremtiden (evt. vi lar $\frac{1}{3} S$ av djon ligge igjen), mens med diskontering lar vi $\frac{k^2}{1+k+k^2} S$ ligge igjen. Hvis vi ikke diskonterer, sparer vi mer?

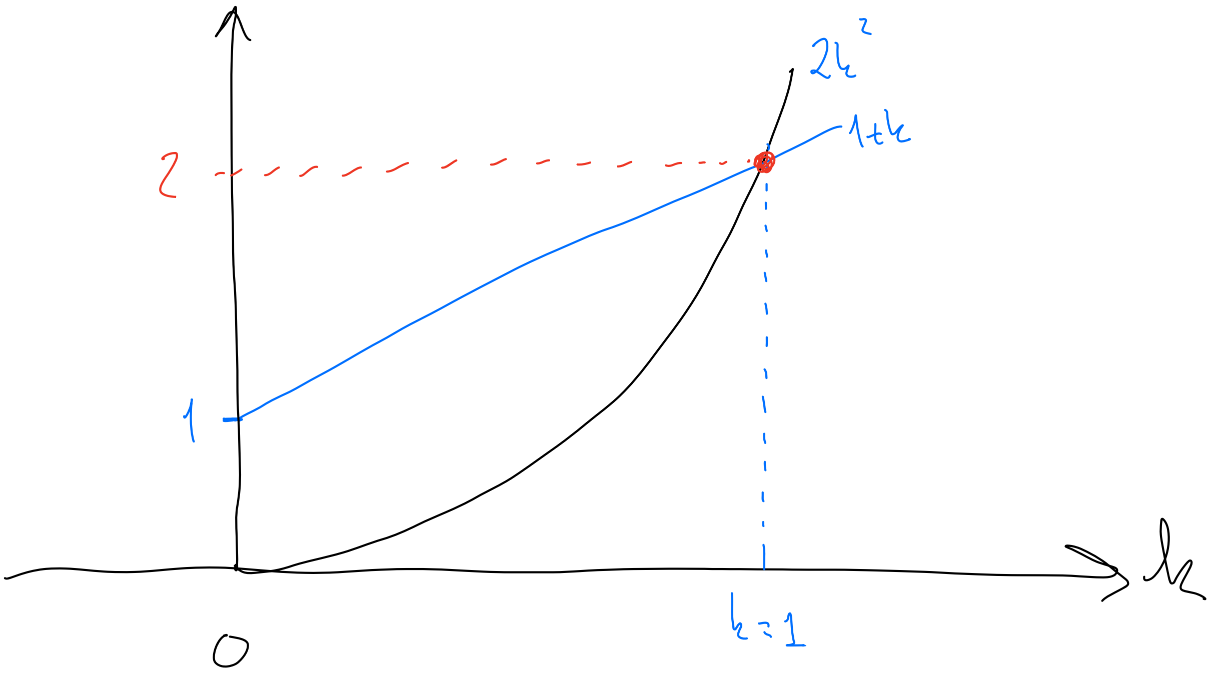
Altså, stemmer det at $\frac{k^2}{1+k+k^2} S < \frac{1}{3} S$?

Dette er det samme som å sperre om

$$3k^2 < 1 + k + k^2 \quad ?$$

eller

$$2k^2 < 1+k \quad ?$$



Fra grafen over ser vi at hvis $k \in [0,1)$, vil $2k^2 < 1+k$. Men $k = \rho^{\frac{1}{1-\gamma}}$, og så lenge vi neddiskonterer vil $\rho < 1$. Siden $0<\gamma<1$, vil $\frac{1}{1-\gamma} > 1$, og $\rho^{\frac{1}{1-\gamma}} < 1$ (la $\gamma = \frac{1}{2}$, og $\frac{1}{1-\gamma} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$!)

Med andre ord, $2k^2 < 1+k$, eller

$$\frac{k^2}{1+k+k^2} S < \frac{1}{3} S$$

Med neddiskontering verdsetter vi altså mer det vi kan få nå enn det som avventer til fremtiden. Evt, hvis vi ikke nedditerer vil vi la mer olje ligge igjen.