FORMELSAMLING FOR MAT 1050

Derivasjonsregler

Spesielle: $(x^n)' = nx^{n-1}$
$(a^x)' = a^x \ln a$ spesielt $(e^x)' = e^x$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
Generelle: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
$(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$
$(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Spesielle funksjoner

Eksponensialfunksj.: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$
Logaritmer: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$
$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ $\ln(x^a) = a \ln x$
Trigonometriske: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–

Integrasjonsregler

Spesielle: $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ $n \neq -1$ $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C, \; x > 0$
$\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$ spesielt $\int e^x \, dx = e^x + C$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
Generelle: $\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$
$\int f(x) g'(x) \, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) \, dx$
$\int f'(g(x)) g'(x) \, dx = f(g(x)) + C$

Komplekse tall

Skrivemåter: $z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$
Komplekskonjugert: $\overline{z} = a - ib = re^{-i\theta}$
abc**-formelen:** $x^2 + bx + c = 0$ gir $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}$
Eksponentialfunksjonen: $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$

Funksjoner av flere variable

Gradient: $\nabla f(\mathbf{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}))$
Kjerneregel: For $h(t) = f(\mathbf{x}(t))$,

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}(t)) \cdot x_1'(t) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}(t)) \cdot x_n'(t) = \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t)$$

Annenderiverttest: Anta at (a, b) er et stajonært punkt og la $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$, $D = AC - B^2$. Da gjelder

i) Hvis $D < 0$, er (a, b) et sadelpunkt.
ii) Hvis $D > 0$ og $A > 0$, er (a, b) et lokalt minimum.
iii) Hvis $D > 0$ og $A < 0$, er (a, b) et lokalt maksimum.

Lagranges multiplikatormetode: $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y),\ g(x, y) = c.$

Numeriske formler

Taylors formel: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Parametriserte kurver og kurveintegraler

Tangent: $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t))$
Buelengde: $s = L(a, b) = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}\ dt$
Kurveintegral av funksjon: $\int_{\mathcal{C}} f\ ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}\ dt$
Kurveintegral av vektorfelt: $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\ dt$
Integral av gradient: $\int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$
Sirkulasjon av plant vektorfelt $\mathbf{F} = (P, Q)$: $\mathrm{curl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$
Nødvendig betingelse for konservativt felt: $\mathrm{curl}(\mathbf{F}) = 0.$

Multiple integraler

Polarkoordinater: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,$

$$\iint_{D(x,y)} f\,dx\,dy = \iint_{D(r,\theta)} fr\,dr\,d\theta$$

Areal og tyngdepunkt: $A = \iint_D 1\,dx\,dy$

$$\overline{x}A = \iint_D x\,dx\,dy \qquad \overline{y}A = \iint_D y\,dx\,dy$$

Greens teorem: $\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\mathcal{C}} P\ dx + Q\ dy$

Dynamiske systemer

System: $x'(t) = ax + by + e$, $y'(t) = cx + dy + f$
Diskriminant: $\mathcal{D} = (a-d)^2 + 4bc$
Egenverdier: $\lambda = \frac{a+d\pm\sqrt{\mathcal{D}}}{2}$
Type likevektspunkt: For $\mathcal{D} < 0$: $\alpha = \frac{a+d}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{\mathcal{D}}}{2}$:
$\mathcal{D} > 0$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$: frastøtende likevektspunkt
$\mathcal{D} > 0$, $\lambda_1, \lambda_2 < 0$: tiltrekkende likevektspunkt
$\mathcal{D} > 0$, $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$: bifurkasjon, én tiltrekkende linje
$\mathcal{D} < 0$, $\alpha > 0$: utoverrettet spiral
$\mathcal{D} < 0$, $\alpha < 0$: innoverrettet spiral
$\mathcal{D} < 0$, $\alpha = 0$: bifurkasjon med periodiske stabile baner utenfor likevektspunktet

Generell løsning av det homogene systemet $x'(t) = ax+by$, $y'(t) = cx+dy$:

$$x(t) = Ce^{\lambda_1 t} + De^{\lambda_2 t}$$
$$y(t) = \frac{\lambda_1 - a}{b}Ce^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2 - a}{b}De^{\lambda_2 t}$$