FORMELSAMLING FOR MAT 1050, HØST 2022

Derivasjonsregler

Spesielle: $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(e^x)' = e^x$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$

Generelle: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$, $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$

Spesielle funksjoner

Eksponensialfunksj.: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $\quad (a^x)^y = a^{xy}$
Logaritmer: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\quad \ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$
Trigonometriske: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1

Integrasjonsregler

Spesielle: $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$ $\quad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C,\ x > 0$
$\int e^x\,dx = e^x + C$, $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$, $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
Generelle: $\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$
$\int f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(x)) + C$

Komplekse tall

Skrivemåter: $z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$
Kompleks konjugert: $\overline{z} = a - ib = re^{-i\theta}$

Funksjoner av flere variable

Nivåkurver: $f(\mathbf{x}) = C$
Gradient: $\nabla f(\mathbf{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}))$
Annenderiverttest: $H(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2$.

i) Hvis $D < 0$, er (a,b) et sadelpunkt.
ii) Hvis $D > 0$ og $A > 0$, er (a,b) et lokalt minimum.
iii) Hvis $D > 0$ og $A < 0$, er (a,b) et lokalt maksimum.

Parametriserte kurver og linjeintegraler

Buelengde: $s = L(a,b) = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}\, dt$
Linjeintegral av funksjon: $\int_{\mathcal{C}} f\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}\, dt$
Linjeintegral av vektorfelt: $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$
Integral av gradient: $\int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$
Virvling for plant vektorfelt $\mathbf{F} = (P, Q)$: $\mathrm{curl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$

Multiple integraler

Areal og tyngdepunkt: $A = \iint_D 1\, dx\, dy$
$\overline{x}A = \iint_D x\, dx\, dy \qquad \overline{y}A = \iint_D y\, dx\, dy$
Greens teorem: $\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\mathcal{C}} P\, dx + Q\, dy$

Dynamiske systemer

System: $x'(t) = ax + by$, $y'(t) = cx + dy$
Diskriminant: $\mathcal{D} = (a-d)^2 + 4bc$
Egenverdi: $\lambda = \frac{a+d\pm\sqrt{\mathcal{D}}}{2}$
For $\mathcal{D} < 0$: $\alpha = \frac{a+d}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{\mathcal{D}}}{2}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} > 0,\ \lambda_1, \lambda_2 > 0 &: \text{ frastøtende likevektspunkt} \\
\mathcal{D} > 0,\ \lambda_1, \lambda_2 < 0 &: \text{ tiltrekkende likevektspunkt} \\
\mathcal{D} > 0,\ \lambda_2 < 0 < \lambda_1 &: \text{ bifurkasjon, én tiltrekkende linje} \\
\mathcal{D} < 0,\ \alpha > 0 &: \text{ utoverrettet spiral} \\
\mathcal{D} < 0,\ \alpha < 0 &: \text{ innoverrettet spiral}
\end{aligned}$$