FORMELSAMLING FOR MAT 1050, H2023

Trigonometri:

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ \sin(x+2\pi) = \sin x,\ \cos(x+2\pi) = \cos x$
$\sin(2x) = 2\sin x\cos x,\ \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x,$
$\sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1-\cos(2x)\big),\quad \cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2x)\right)$
$\sin(x\pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x \sin y$
$\cos(x\pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$

Eksp.funksj.: $a^x = e^{x\ln a},\ a^{-x} = \frac{1}{a^x},\ a^x a^y = a^{x+y},\ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},\ (a^x)^y = a^{xy}$
Logaritmer: $\ln(xy) = \ln x + \ln y,\ \ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y,\quad \ln(x^a) = a\ln x$

Derivasjonsregler
Spesielle: $(x^n)' = nx^{n-1},\quad (\ln x)' = \frac{1}{x},\ (e^x)' = e^x,\quad (a^x)' = a^x\ln a,$
$(\sin x)' = \cos x,\ (\cos x)' = -\sin x,\ (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
Generelle: $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x),\quad (f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$
$(f(x)\cdot g(x))' = f(x)\,g'(x) + f'(x)\,g(x)$
$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}$

Integrasjonsregler
Spesielle: $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C\ (n\neq -1),\ \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C\ (x\neq 0)$
$\int e^x\,dx = e^x + C,\ \int \ln x\,dx = x\ln x - x + C\ (x>0),$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,\ \int \cos x\,dx = \sin x + C$
Generelle: $\int f(x)+g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$
$\int f'(g(x))g'(x)\,dx = f(g(x)) + C$

Numerisk approksimasjon av $\int_a^b f(x)\,dx$: $\Delta x := \frac{b-a}{n},\quad x_k = a + k\,\Delta x,\ y_k = f(x_k),\quad k = 0,1,\dots,n$
Trapesmetoden: $\int_a^b f(x)\,dx \simeq (y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)\,\frac{\Delta x}{2}$
Simpson's metode (n **partall**): $\int_a^b f(x)\,dx \simeq (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)\,\frac{\Delta x}{3}$

Taylor-polynomer og Taylor-rekker
Taylor-polynomet p av grad (opptil) n til en funksjon f i $x=a$:

$$p(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n.$$

Restleddet $E_n(x) = f(x) - p(x)$ tilfredstiller $E_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}$ for en c mellom a og x.
Taylor-rekka til f i $x=a$ er $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n$

Noen kjente rekkeutviklinger
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,\quad |x|<1$
$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\,x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,x^n,\quad x\in\mathbb{R}$
$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1},\quad x\in\mathbb{R}$
$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n},\quad x\in\mathbb{R}$

Komplekse tall: $z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$
Kompl. konjugert: $\overline{z} = a - ib = re^{-i\theta}$ **Modulus**: $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2} = r.$
Kompleks eksponential: $e^z = e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$
De Moivres formel: $(e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
2.grads likning: $ax^2 + bx + c = 0$ (der $a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0$). $\Delta := b^2 - 4ac$
Hvis $\Delta \geq 0$: reelle røtter, $x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
Hvis $\Delta < 0$: komplekse røtter, $z = \frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Polarkoordinater: (x,y) angies ved (r,θ) der $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ $(r\geq 0)$
Hvis området $D\subseteq\mathbb{R}^2$ kan angies ved $0\leq r\leq f(\theta)$, $\theta_1\leq\theta\leq\theta_2$ i polarkoordinater
er arealet $A(D) = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}\,f(\theta)^2\,d\theta$

Funksjoner av flere variable
$f : D \to \mathbb{R}$ (der $D \subseteq \mathbb{R}^n$), med kontinuerlige partiell deriverte
Nivåmengde: $\{\mathbf{x} \in D \mid f(\mathbf{x}) = c\}$ (der $c \in \mathbb{R}$)
Gradient: $\nabla f(\mathbf{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}))$
Kritisk punkt: $\mathbf{a} \in D$ slik at $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
Annenderiverttesten $(n = 2)$: $H(a, b) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)\right)^2$.
Betrakt (a, b) kritisk punkt:

i) Hvis $H(a, b) < 0$, er (a, b) et sadelpunkt.
ii) Hvis $H(a, b) > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$, er (a, b) et lokalt minimum.
iii) Hvis $H(a, b) > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$, er (a, b) et lokalt maksimum.

Minste kvadaters tilpasning av punktene $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ med rett linje $y = ax + b$:

$$a = \frac{n\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}, \quad b = \frac{n\left(\sum_{i=1}^n y_i\right) - a\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)}{n}$$

Dobbeltintegraler
Type I, $D : g(x) \le y \le h(x), a \le x \le b :$ $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\, dy\right) dx$

Type II, $D : g(y) \le x \le h(y), c \le y \le d :$ $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y)\, dx\right) dy$

Dersom $D \to D'$ i **pol. koord.** : $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$
Areal av område $D \subseteq \mathbb{R}^2$: $A(D) = \iint_D 1\, dx\, dy$
Tyngdepunkt: $\overline{x} = \frac{1}{A(D)} \iint_D x\, dx\, dy, \quad \overline{y} = \frac{1}{A(D)} \iint_D y\, dx\, dy$
Gjennomsnitt av f over D: $\overline{f} = \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x, y)\, dx\, dy$

Parametriserte kurver og kurveintegraler
$(n = 2$ eller $3)$ $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$
C: kurve i $\mathbb{R}^n$ parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ der $a \le t \le b$.
Derivert: $\mathbf{r}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t))$ (gir retn.vektor for tangenten til C i $\mathbf{r}(t)$)
Buelengde av C: $L = \int_C ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$
Kurveintegral av funksjon langs C: $\int_C f\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\, \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$
Kurveintegral av vektorfelt langs C: $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$
Kurveintegral av gradientfelt langs C: $\int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}(\mathbf{b})) - \phi(\mathbf{r}(a))$
Virvling/sirkulasjon for plant vektorfelt $\mathbf{F} = (P, Q)$: $\mathrm{curl}(\mathbf{F})(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$
Konservativt vektorfelt: $\mathbf{F} = \nabla\phi$ ($\Leftrightarrow \mathrm{curl}(\mathbf{F})(x, y) = 0$ dersom $\mathbf{F}$ def. på hele $\mathbb{R}^n$)
Greens teorem: $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \mathrm{curl}(\mathbf{F})(x, y)\, dx\, dy$,
der D lukket, begrenset område i $\mathbb{R}^2$ med randkurve C (orientert mot klokka)

Eksponensiell vekst: $y'(t) = \lambda\, y(t)$ $(\lambda \in \mathbb{R}, c \neq 0)$. Gen. løsning: $y(t) = y_0\, e^{\lambda\, t}$ der $y_0 \in \mathbb{R}$

Logistisk vekst: $y'(t) = \lambda\, y(t)(A - y(t))$ $(\lambda, A > 0)$.
Gen. løsning: $y(t) = \frac{A y_0}{y_0 + (A - y_0)\, e^{-A\lambda t}}$. Dessuten $y(t) = 0$ og $y(t) = A$.

System av differensiallikninger
$x' = ax + by$, $y' = cx + dy$ (der $a, b, c, d \in \mathbb{R}, b \neq 0$). **Diskriminant:** $D := (a - d)^2 + 4bc$

- **Hvis $D > 0$:** $\lambda_1 := \frac{a + d + \sqrt{D}}{2}, \quad \lambda_2 := \frac{a + d - \sqrt{D}}{2}$
  Gen. løsning: $x(t) = \alpha\, e^{\lambda_1 t} + \beta\, e^{\lambda_2 t}, \ y(t) = \alpha\, \frac{\lambda_1 - a}{b}\, e^{\lambda_1 t} + \beta\, \frac{\lambda_2 - a}{b}\, e^{\lambda_2 t}$ der $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- **Hvis $D < 0$:** $p := \frac{a + d}{2}, \ q := \frac{\sqrt{-D}}{2}$
  Gen. løsning: $x(t) = e^{pt}(A\cos(qt) + B\sin(qt)), \ y(t) = e^{pt}(\widetilde{A}\cos(qt) + \widetilde{B}\sin(qt))$,
  der $A, B \in \mathbb{R}$ og $\widetilde{A} = \frac{p - a}{b} A + \frac{q}{b} B, \quad \widetilde{B} = \frac{p - a}{b} B - \frac{q}{b} A$.