UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1050 — Matematikk for anvendelser 1
Eksamensdag:	Onsdag 29. november, 2023
Tid for eksamen:	15.00 – 19.00
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator og ett A4-ark med valgfri håndskrevet eller trykt tekst på begge sider.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: Eksamensettet består av 4 oppgaver, med tilsammen 10 deloppgaver som alle gir maksimum 10 poeng ved sensuren. Maksimal total poengsum er 100. Dersom det er et punkt du ikke får til, kan du likevel bruke resultatene derfra i senere punkter om du skulle ønske det. For å kunne få poeng forventes det at du gir forklaringer for dine svar. Ubegrunnede svar vil få null poeng under sensuren.

Oppgave 1 (vekt 10 poeng)

Beregn det ubestemte integralet $\int \frac{x^2}{1+x^3}\,dx$. Avgjør deretter om det uegentlige integralet

$$\int_1^\infty \frac{x^2}{1+x^3}\,dx$$

er konvergent.

Løsning. Ved å substituere $u = 1 + x^3$, $\frac{1}{3}\,du = x^2\,dx$, får vi at

$$\int \frac{x^2}{1+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln|1+x^3| + C.$$

Det gir at

$$\int_1^\infty \frac{x^2}{1+x^3}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{x^2}{1+x^3}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{3}\ln|1+x^3|\right]_{x=1}^{x=b} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}(\ln(1+b^3)-\ln 2) = \infty$$

(siden $1 + b^3 \to \infty$, og dermed $\ln(1 + b^3) \to \infty$, når $b \to \infty$). Det oppgitte uegentlige integralet er dermed divergent.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2 (vekt 20 poeng)

La funksjonen f være definert ved

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

a) Beregn Taylor-polynomet p til f av grad 2 i $x = 0$. Bruk det til å anslå verdien av $\int_0^{1/2} f(x)\,dx$.

Løsning. Vi har at $f(0) = 1$. Videre er

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,, \text{ og } f''(x) = (-2)\,\frac{(1+x^2)^2 - 4x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}\,.$$

Så $f'(0) = 0$ og $f''(0) = -2$. Det gir at

$$p(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 = 1 - x^2.$$

Vi kan derfor anslå at

$$\int_0^{1/2} f(x)\,dx \simeq \int_0^{1/2} p(x)\,dx = \int_0^{1/2} (1-x^2)\,dx = \Big[x - x^3/3\Big]_{x=0}^{x=1/2} = 11/24.$$

b) Begrunn at rekken $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$ konverger mot $f(x)$ for alle $x \in (-1,1)$.

Løsning. For en geometriske rekke vet vi at

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots = \frac{1}{1-x}$$

for alle $x \in (-1,1)$. Når $x \in (-1,1)$ er $(-x^2) \in (-1,0] \subseteq (-1,1)$, så ved å erstatte x med $(-x^2)$ ovenfor, får vi at

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1-(-x^2)}\,,$$

og det gir at

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} = f(x)\,,$$

som ønsket.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 3 (vekt 30 poeng)

Betrakt funksjonen f som er definert på $\mathbb{R}^2$ ved

$$f(x,y) = x^2y + x^2 + y^2 - 2y.$$

a) Begrunn at de kritiske punktene til f er $(0,1)$, $(2,-1)$ og $(-2,-1)$.

Løsning. For alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ har vi at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + 2x = 2x(y+1)\,,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2y - 2\,.$$

Dermed er $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \Leftrightarrow (x = 0$ og $2y - 2 = 0)$ eller $(y = -1$ og $x^2 - 4 = 0) \quad \Leftrightarrow \quad (x = 0$ og $y = 1)$ eller $(y = -1$ og $x = \pm 2)$.

Dette gir at de kritiske punktene til f er $(0,1)$, $(2,-1)$ og $(-2,-1)$.

b) Bestem typen til de kritiske punktene til f (med andre ord, avgjør hvilke som gir et sadelpunkt, et lokalt minimumspunkt eller et lokalt maksimumspunkt).

Løsning. For alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ har vi at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2(y+1)\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x\,,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) = 2\,.$$

Hesse-determinanten $H(a,b)$ i et kritisk punkt (a,b) for f er derfor

$$\begin{aligned} H(a,b) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\,\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(a,b) - \big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\big)^2 \\ &= 4(b+1) - (2a)^2 = 4(1 + b - a^2)\,. \end{aligned}$$

Vi anvender annenderivert-testen:

- For $(a,b) = (0,1)$ er $H(0,1) = 4 \cdot 2 = 8 > 0$.

  Siden $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = 4 > 0$, så er $(0,1)$ et lokalt minimumspunkt for f.

- For $(a,b) = (\pm 2, -1)$ er $H(\pm 2, -1) = 4(1 - 1 - (\pm 2)^2) = -16 < 0$, så $(2,-1)$ og $(-2,-1)$ er begge sadelpunkter for f.

(Fortsettes på side 4.)

c) Beregn gjennomsnittsverdien $\overline{f}$ av f over rektanglet $R = [-1, 1] \times [0, 2]$.

Løsning. Vi har at

$$\iint_R f(x, y)\, dxdy = \int_{-1}^{1} \Big(\int_0^2 (x^2y + x^2 + y^2 - 2y)\, dy \Big)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \Big[\frac{1}{2}x^2y^2 + x^2y + \frac{1}{3}y^3 - y^2\Big]_{y=0}^{y=2} dx = \int_{-1}^{1} \Big(2x^2 + 2x^2 + \frac{8}{3} - 4\Big)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \big(4x^2 - \frac{4}{3}\big)\, dx = \Big[\frac{4}{3}x^3 - \frac{4}{3}x\Big]_{x=-1}^{x=1} = \frac{8}{3} - \frac{8}{3} = 0.$$

Arealet A til R er 4. Dermed er

$$\overline{f} = \frac{1}{A} \iint_R f(x, y)\, dxdy = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0.$$

Oppgave 4 (vekt 40 poeng)

a) La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet i xy-planet som er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (2xy - 2y, x^2 - 2x)$$

for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Begrunn at $\mathbf{F}$ er konservativt, og angi et potensial for $\mathbf{F}$.

Løsning. Vi har at $\mathrm{curl}(\mathbf{F})(x, y) = (2x - 2) - (2x - 2) = 0$ for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Siden $\mathbf{F}$ er et vektorfelt som er definert i hele xy-planet vet vi at dette medfører at $\mathbf{F}$ er konservativt. Hvis φ er et potensial for $\mathbf{F}$, er $\nabla\varphi = \mathbf{F}$, dvs at

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) = 2xy - 2y\,, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) = x^2 - 2x$$

for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ved å antiderivere disse likningene m.h.p. henholdsvis x og y, får vi at φ må tilfredstille at

$$\varphi(x, y) = x^2y - 2xy + C(y) = x^2y - 2xy + D(x)$$

for passende funksjoner $C(y)$ og $D(x)$. Vi ser at vi kan f.eks. velge $C(y) = D(x) = 0$, som gir $\varphi(x, y) = x^2y - 2xy$.

b) La C være kurven i xy-planet som er angitt i polarkoordinatene r og θ ved

$$r = 1 - 2\cos(2\theta)\,, \quad \text{der } \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Beregn kurveintegralet $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, der kurven C er orientert oppover.

(Fortsettes på side 5.)

Løsning. Når kurven C er orientert oppover begynner den i $(0,0)$ (når $\theta = \pi/6$) og ender i $(0,3)$ (når $\theta = \pi/2$). Med potensialet $\varphi(x,y) = x^2y - 2xy$ for $\mathbf{F}$ som vi fant i a) får vi at

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla(\varphi)\cdot d\mathbf{r} = \varphi(0,3) - \varphi(0,0) = 0 - 0 = 0.$$

c) La D være området i xy-planet som kan beskrives i polarkoordinatene r og θ ved

$$0 \le r \le 1 - 2\cos(2\theta)\,, \quad \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Regn ut arealet A til området D.

Løsning. Siden $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos(2t))$ har vi at $\cos^2(2\theta) = \frac{1}{2}(1+\cos(4\theta))$. Ved å bruke dette får vi at

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{2} r^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} (1-2\cos(2\theta))^2\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \big(1 - 4\cos(2\theta) + 4\cos^2(2\theta)\big)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \big(1 - 4\cos(2\theta) + 2 + 2\cos(4\theta)\big)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}\Big[3\theta - 2\sin(2\theta) + \frac{1}{2}\sin(4\theta)\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{2}\big(3\pi/2 - \pi/2 + 2\sin(\pi/3) - \frac{1}{2}\sin(2\pi/3)\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(\pi + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\big) = \frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8}.
\end{aligned}$$

d) La $\mathbf{G}$ være vektorfeltet i xy-planet som er gitt ved

$$\mathbf{G}(x,y) = (-y, x)\,,$$

og la C' være den lukkede kurven i xy-planet som er randkurven til området D ovenfor. Beregn kurveintegralet $\oint_{C'} \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r}$, der C' er orientert mot klokka.

Løsning. Vi har at $\mathrm{curl}(\mathbf{G})(x,y) = 1 - (-1) = 2$. Ved å bruke Green's teorem får vi at

$$\oint_{C'} \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \mathrm{curl}(\mathbf{G})(x,y)\, dxdy = \iint_D 2\ dxdy,$$

dvs at $\oint_{C'} \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r} = 2\cdot A$, der A er arealet av D. Ved å bruke c) får vi at

$$\oint_{C'} \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r} = 2\cdot\big(\frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\big) = \pi + \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$