UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1050 — Matematikk for anvendelser 1
Eksamensdag:	Tirsdag 13. desember 2022
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator og ett A4-ark med valgfri håndskrevet eller trykt tekst på begge sider.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

DEL 1

Denne delen består av 10 flervalgsoppgaver. Hver oppgave teller 3 poeng, og maksimalt oppnåelig poengsum på denne delen er 30. Det er bare ett riktig alternativ på hver oppgave. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på en oppgave, får du 0 poeng. Svarene fører du inn på dette svararket. Krysser du av mer enn ett alternativ på en oppgave, får du 0 poeng. Oppgavene står på neste side.

Lykke til!

Oppgave	Alt. a)	Alt. b)	Alt. c)	Alt. d)
A	X			
B	X			
C	X			
D				X
E	X			
F				X
G		X		
H		X		
I			X	
J	X	X		

(Trykkfeil i oppgave J, det er to svaralternativer som er rett, a) og b).)

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave A Den deriverte til funksjonen $f(x) = x^2 e^x$ er gitt ved (Her er det en trykkfeil, det skal være $f(x) = x^2 e^{2x}$)

a) $2(x + x^2)e^{2x}$ b) $4xe^{2x}$ c) $(2x + x^2)e^{2x}$ d) $2x + 2e^{2x}$

Oppgave B Verdien av det bestemte integralet $\int_0^\pi x \sin x \, dx$ er

a) π b) 1 c) $\frac{\pi}{2} + 1$ d) 0

Oppgave C Summen av den geometriske rekka $2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \ldots$:

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{4}$ d) 2

Oppgave D Tangentlinja til funksjonen $f(x) = xe^x$ i $x = 0$ er gitt ved

a) $y = 0$ b) $y = 2x$ c) $y = x + 1$ d) $y = x$

Oppgave E Normalformen til det komplekse tallet $z = ie^{i\frac{\pi}{2}}$:

a) -1 b) $i + 1$ c) $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ d) i

Oppgave F Hvilken av funksjonene er en potensialfunksjon for feltet

$$\mathbf{F}(x, y) = (4xy^2 + y, 4x^2y + x)$$

a) $f(x, y) = x^2y + 2xy$ b) $f(x, y) = xy^2 + y$ c) $f(x, y) = xy + 2x^3 + y$
d) $f(x, y) = 2x^2y^2 + xy + 1$

Oppgave G Virvlingen til feltet $\mathbf{F}(x, y) = (xy, 2x^2 + y)$ er gitt ved

a) $(y, 4x)$ b) $3x$ c) $(4x, y)$ d) $1 + x$

Oppgave H En nivåkurve for funksjonen $f(x, y) = x^2 + xy$ er gitt ved

a) $y = \frac{1-x}{x^2}$ b) $y = \frac{2-x^2}{x}$ c) $y = \frac{x}{1-x^2}$ d) $y = \frac{2x^2}{x+1}$

Oppgave I Gradienten til funksjonen $f(x, y) = \sin y + ye^x$ er gitt ved

a) $\cos y + e^x$ b) $\cos y + y + e^x$ c) $(ye^x, \cos y + e^x)$ d) $(\sin y, e^x)$

Oppgave J Hvilken av kurvene er en integralkurve for feltet

$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$$

a) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ b) $\mathbf{r}(t) = (-\sin t, \cos t)$ c) $\mathbf{r}(t) = (t, -t)$
d) $\mathbf{r}(t) = (e^t, e^{-t})$

(Trykkfeil, det er to svaralternativer som er rett, a) og b).)

(Fortsettes på side 3.)

DEL 2

Del 2 består av 3 oppgaver med til sammen 7 delspørsmål. Hvert delspørsmål teller 10 poeng, så maksimalt oppnåelig poengsum på denne delen er 70.

Oppgave A Gitt en funksjon $f(x,y) = x^2y - 2xy + \frac{1}{2}y^2$

a) Finn de partiellderiverte til funksjonen f.

b) Finn de kritiske punktene til funksjonen f og avgjør om de er maksimums-, minimums- eller sadelpunkter.

c) Finn det bestemte integralet av funksjonen f over rektangelet

$$[0,1] \times [0,2]$$

Løsning.

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 2y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2x + y$$

b) Vi setter $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ og får tre punkter $(1,1)$, $(2,0)$ og $(0,0)$. Hesseformen er gitt ved

$$H = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2 = 2y - (2x-2)^2 = 2y - 4x^2 + 8x - 4$$

Det gir $H(1,1) = 2$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 2$ som betyr et minimumspunkt, mens $H(2,0) = H(0,0) = -4$ er to sadelpunkter.

c)

$$\int_0^1 \int_0^2 x^2y - 2xy + \frac{1}{2}y^2 \, dy \, dx = \int_0^1 2x^2 - 4x + \frac{4}{3} \, dx = 0$$

Oppgave B Et område Q i xy-planet er gitt ved

$$y^2 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1$$

a) Vis at arealet av Q er lik $\frac{4}{3}$.

b) Finn koordinatene til tyngdepunktet til Q.

(Fortsettes på side 4.)

Løsning.

a)
$$\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} dx\,dy = \int_{-1}^{1} 1 - y^2\,dy = \frac{4}{3}$$

b) Q er symmetrisk om x-aksen, som betyr at $\overline{y} = 0$.

$$\overline{x} = \frac{1}{\frac{4}{3}}\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} x\,dx\,dy = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}y^4\,dy = \frac{3}{5}$$

Oppgave C Gitt et system av lineære differensiallikninger

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = x + 2y$$

a) Vis at $x(t) = e^t + 2e^{3t}$, $y(t) = -e^t + 2e^{3t}$ er en løsning av systemet med initialbetingelsen $x(0) = 3$, $y(0) = 1$.

b) Begrunn hvorfor $(x, y) = (0, 0)$ er et frastøtende likevektspunkt for systemet.

Løsning.

a)

$$\frac{dx}{dt} = e^t + 6e^{3t} = 2(e^t + 2e^{3t}) + (-e^t + 2e^{3t})$$
$$\frac{dy}{dt} = -e^t + 6e^{3t} = (e^t + 2e^{3t}) + 2(-e^t + 2e^{3t})$$

og $x(0) = e^0 + 2e^0 = 3$, $y(0) = -e^0 + 2e^0 = 1$.

b) Vi har $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$ og $d = 2$ gir $\mathcal{D} = (2-2)^2 + 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 > 0$. Videre har vi

$$\lambda = \frac{2 + 2 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

For $\mathcal{D}, \lambda_1, \lambda_2 > 0$ har vi et frastøtende likevektspunkt.

SLUTT.