Oppgave 1. Betrakt den kontinuerlige funksjonen f som er definert på $\mathbb{R}$ ved

$$f(x) = 1 - 2\,x^2 e^{-x}.$$

a) *Bestem de kritiske punktene til f.*

Løsning. Funksjonen f er deriverbar for alle $x \in \mathbb{R}$, med

$$f'(x) = 0 - 2\,(2\,xe^{-x} - x^2 e^{-x}) = 2\,(x^2 - 2x)e^{-x} = 2\,x(x-2)e^{-x}.$$

Siden $e^{-x} \neq 0$ er

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x-2)e^{-x} = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \text{ eller } x = 2.$$

De kritiske punktene til f er derfor $x = 0$ og $x = 2$.

b) *Avgjør hvor f er strengt voksende og hvor den er strengt avtagende. Angi de lokale ekstrempunktene til f.*

Løsning. Lager vi et fortegnsskjema for $f'(x)$ finner vi at $f'(x)$ er positiv på $(-\infty, 0)$, negativ på $(0, 2)$, og positiv på $(2, \infty)$. Siden f er kontinuerlig på $\mathbb{R}$, gir det at f er strengt voksende på $(-\infty, 0]$, strengt avtagende på $[0, 2]$, og strengt voksende på $[2, \infty)$. Dermed er $x = 0$ et lokalt maksimumspunkt for f, mens $x = 2$ er et lokalt minimumspunkt for f.

c) *Undersøk hvor (grafen til) f krummer opp og hvor den krummer ned. Angi eventuelle vendepunkter for f.*

Løsning. Ved å derivere $f'(x)$ får vi

$$f''(x) = 2\left((2x-2)e^{-x} - (x^2 - 2x)e^{-x}\right) = -2\,(x^2 - 4x + 2)e^{-x}.$$

Siden

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-4)^2 - 8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2},$$

er

$$f''(x) = -2\left(x - (2 - \sqrt{2}\right)\left(x - (2 + \sqrt{2})\right)e^{-x}.$$

Ved å sette opp et fortegnsskjema for $f''(x)$ finner vi at $f''(x)$ er negativ på $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$ og på $(2 + \sqrt{2}, 0)$, mens den er positiv på $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$. Dermed krummer (grafen til) f ned på $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$ og på $(2 + \sqrt{2}, 0)$, mens den krummer opp på $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$.

Siden krumningen til f skifter rundt $x = 2 - \sqrt{2}$ og rundt $x = 2 + \sqrt{2}$ er disse vendepunkter for f.

d) *Bestem de globale ekstrempunktene til f på $[1/2, 4]$, og skisser grafen til f på dette intervallet. Skissen kan du gjøre for hånd eller ved å bruke en programpakke (oppgi i så fall hvilken).*

Løsning. Når vi betrakter f som er kontinuerlig funksjon på intervallet $[1/2, 4]$ vet vi at dens globale ekstrempunkter vil befinne seg blant de kritiske punktene til f som ligger i intervallet $(1/2, 4)$ eller i endepunktene $x = 1/2$ og $x = 4$. Siden $x = 0$ ligger utenfor $(1/2, 4)$, vil de globale ekstrempunktene til f være blandt $x = 1/2$, $x = 2$ og $x = 4$. Vi har at

$$f(1/2) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{e}} \simeq 0.6967,\ f(2) = 1 - \frac{8}{e^2} \simeq -0.0827,\ f(4) = 1 - \frac{32}{e^4} \simeq 0.4139.$$

Dermed kan vi konkludere at f har et globalt maksimumspunkt i $x = 1/2$, mens den har et globalt minimumspunkt i $x = 2$.

Grafen til f på $[1/2, 4]$ tegnet med Wolphram Alpha er gjengitt på siste side.

e) *Bruk delvis integrasjon to ganger til å beregne det ubestemte integralet $\int x^2 e^{-x}\, dx$. Beregn deretter det bestemte integralet $\int_{-1/2}^{4} f(x)\, dx$. Avrund svaret til 4 desimaler.*

Løsning.

Ved å delvis integrere med $u = x^2$, $du = 2xdx$, $v = -e^{-x}, dv = e^{-x}dx$ får vi at

$$\int x^2 e^{-x}\, dx = \int u\, dv = uv - \int v\, du = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x}\, dx.$$

Ved å delvis integrere videre (nå med $u = x$), får vi at

$$\int x e^{-x}\, dx = -x e^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C.$$

Setter vi dette inn ovenfor får vi

$$\int x^2 e^{-x}\, dx = -x^2 e^{-x} + 2(-x e^{-x} - e^{-x}) + C = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C\,.$$

Dermed er

$$\int_{-1/2}^{4} f(x)\, dx = \int_{-1/2}^{4} (1 - 2x^2 e^{-x})\, dx = \Big[x + 2\left(x^2 + 2x + 2\right) e^{-x}\Big]_{-1/2}^{4}$$

$$= (4 + 52\, e^{-4}) - (-0.5 + 2.5\, e^{1/2}) \ \simeq\ 1.3306$$

Oppgave 2. *Beregn følgende grenser*:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-1}{x^3(2x-1)}$

Løsning.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-1}{x^3(2x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4\,(1-1/x^4)}{x^4\,(2-1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-1/x^4}{2-1/x} = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}\,.$$

Alternativt kan man bruke L'Hôpitals regel siden man får et $\frac{''\infty''}{\infty}$ uttrykk.

b) $\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x)-\sin(2x)}{x^3}$

Løsning. Vi bruker L'Hôpitals regel tre ganger og får

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x)-\sin(2x)}{x^3} &= \frac{''0''}{0} =_{\text{L'H.}} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x)-2\cos(2x)}{3\,x^2} \\
&= \frac{''0''}{0} =_{\text{L'H.}} \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(x)+4\sin(2x)}{6\,x} \\
&= \frac{''0''}{0} =_{\text{L'H.}} \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos(x)+8\cos(2x)}{6} \\
&= \frac{-2+8}{6} = 1\,.
\end{aligned}$$

Oppgave 3. *Betrakt den kontinuerlige funksjonen g som er definert på intervallet* $(0,\infty)$ *ved*

$$g(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+1}}.$$

a) *Bruk en passende substitusjon til å regne ut at*

$$\int g(x)\,dx = \ln(\sqrt{x+1}-1) - \ln(\sqrt{x+1}+1) + C$$

der C er en reell konstant. I utregningen kan du benytte deg av identiteten $\frac{2}{u^2-1} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}$, som gjelder når $u \neq \pm 1$, dersom du skulle trenge det.

Løsning. For $x > 0$ sett $u = \sqrt{x+1}$. Da er $u > 1$. Videre er $2\,du = \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$ og $u^2 = x+1$, dvs $x = u^2 - 1$. Ved å substituere $u = \sqrt{x+1}$ og benytte oss av den oppgitte identiteten får vi derfor

$$\begin{aligned}
\int g(x)\,dx &= \int \frac{2}{u^2-1}\,du = \int \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\,du \\
&= \ln(u-1) - \ln(u+1) + C \\
&= \ln(\sqrt{x+1}-1) - \ln(\sqrt{x+1}+1) + C\,.
\end{aligned}$$

b) *Bruk Simpsons metode med* $n = 4$ *til å approksimere verdien av integralet* $\int_1^3 g(x)\,dx$*. Avrund svaret til 4 desimaler og sammenlikn det med det du får ved å beregne dette integralet ved hjelp av a).*

Løsning. Vi deler opp $[1, 3]$ i $n = 4$ delintervaller med lik lengde $1/2$; endepunktene for disse er $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2.5$, $x_4 = 3$. Vi får da at

$y_0 := g(x_0) = g(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$,
$y_1 := g(x_1) = g(1.5) = \frac{1}{1.5\sqrt{2.5}}$,
$y_2 := g(x_2) = g(2) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$,
$y_3 := g(x_3) = g(2.5) = \frac{1}{2.5\sqrt{3.5}}$,
$y_4 := g(x_4) = g(3) = \frac{1}{6}$.

Simpsons metode med $n = 4$ gir da at

$$\begin{aligned}\int_1^3 g(x)\,dx &= (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)\,\frac{(3-1)}{3\cdot 4} \\ &= \frac{1}{6}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{4}{1.5\sqrt{2.5}} + \frac{2}{2\sqrt{3}} + \frac{4}{2.5\sqrt{3.5}} + \frac{1}{6}\Big) \\ &\simeq\ 0.6655\,.\end{aligned}$$

På den andre siden, ved å bruke formelen i a), får vi at

$$\begin{aligned}\int_1^3 g(x)\,dx &= \Big[\ln(\sqrt{x+1}-1) - \ln(\sqrt{x+1}+1)\Big]_1^3 \\ &= (\ln 1 - \ln 3) - (\ln(\sqrt{2}-1) - \ln(\sqrt{2}+1)) \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{3(\sqrt{2}-1)}\right) \simeq 0.6641\,.\end{aligned}$$

c) *Avgjør om det uegentlige integralet* $\int_3^\infty g(x)\,dx$ *konvergerer.*

Løsning. Ved å bruke formelen i a) får vi at

$$\int_3^\infty g(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_3^b g(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\Big[\ln(\sqrt{x+1}-1) - \ln(\sqrt{x+1}+1)\Big]_3^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\ln(\sqrt{b+1}-1) - \ln(\sqrt{b+1}+1) + \ln 3 = \lim_{b\to\infty}\ln\Big(\frac{\sqrt{b+1}-1}{\sqrt{b+1}+1}\Big) + \ln 3 = \ln 1 + \ln 3 = \ln 3 < \infty$$

siden

$$\lim_{b\to\infty}\frac{\sqrt{b+1}-1}{\sqrt{b+1}+1} = \lim_{b\to\infty}\frac{\sqrt{b+1}\big(1-1/\sqrt{b+1}\big)}{\sqrt{b+1}\big(1+1/\sqrt{b+1}\big)} = \lim_{b\to\infty}\frac{1-1/\sqrt{b+1}}{1+1/\sqrt{b+1}} = 1\,.$$

WolframAlpha computational intelligence.

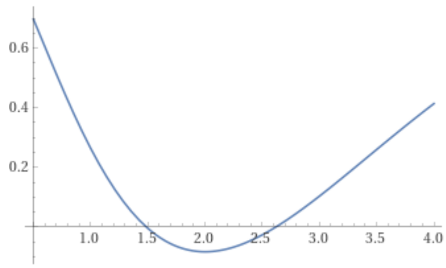
plot 1-2 x^2 e^-x, x=0.5 to 4

NATURAL LANGUAGE MATH INPUT EXTENDED KEYBOARD EXAMPLES UPLOAD RANDOM

Input interpretation

plot	$1 - 2x^2 e^{-x}$	$x = 0.5$ to 4

Plot



Arc length of curve

More digits Step-by-step solution

$$\int_{0.5}^{4} \sqrt{e^{-2x}\left(e^{2x} + 4(-2+x)^2 x^2\right)}\, dx \approx 3.80745834652495\ldots$$

Download Page POWERED BY THE **WOLFRAM LANGUAGE**

Standard computation time exceeded... Try again with Pro computation time

Related Queries:

- words that rhyme with plotting
- integrate 1 - 2 x^2 e^(-x)
- plot ln|1 - 2 x^2 e^(-x)|
- posterize image of 1 - 2 x^2 e^(-x)
- 1 - 2 x^2 e^(-x) vs differentiate 1 - 2 x^2 e^(-x)

Have a question about using Wolfram|Alpha?
Contact Pro Premium Expert Support »

Give us your feedback »