Oppgave 1.

Betrakt funksjonen f som er definert på intervallet $[-1,1]$ ved

$$f(x) = \ln(1+\sin x).$$

a) *Beregn Taylorpolynomet p til f av grad 3 i $x=0$ og lag en skisse som viser grafene til f og p over intervallet $[-1,1]$.*

Løsning. Vi har at $f(0) = \ln(1+\sin 0) = \ln 1 = 0$. Videre utregning gir

$$f'(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x}; \quad f'(0) = \frac{\cos 0}{1+\sin 0} = 1.$$
$$f''(x) = \frac{-\sin x(1+\sin x) - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-1-\sin x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-1}{1+\sin x}; \; f''(0) = \frac{-1}{1+\sin 0} = -1.$$
$$f^{(3)}(x) = \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}; \quad f^{(3)}(0) = \frac{\cos 0}{(1+\sin 0)^2} = 1.$$

Dermed er

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(0)x^3 = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3.$$

For skisse av grafene til f og p, se vedlegget bakerst. Vi ser at p gir en god approksimasjon av f rundt $x=0$.

b) La $E_3(x) = f(x) - p(x)$ betegne feilen man gjør hvis man approksimerer $f(x)$ med $p(x)$. Det kan regnes ut at $|f^{(4)}(c)| \le 2$ når $0 \le c \le 1$. *Bruk dette og restleddsformelen (jf. Teorem 4.2.1 i kompendiet) til å begrunne at*

$$|E_3(x)| \le \frac{1}{12}x^4 \quad \text{når } 0 \le x \le 1.$$

Løsning. Restleddsformelen (med $n=3$) gir at

$$E_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4 \quad \text{for en } c \text{ mellom } 0 \text{ og } x.$$

La $x \in [0,1]$. Da er $0 \le c \le x \le 1$, så den oppgitte ulikheten gir at $|f^{(4)}(c)| \le 2$. Dermed får vi at

$$|E_3(x)| = \left|\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4\right| = \frac{|f^{(4)}(c)|}{24}x^4 \le \frac{2}{24}x^4 = \frac{1}{12}x^4, \text{ som ønsket.}$$

c) *Bruk a) og b) til å begrunne at*

$$\int_0^{1/2} \ln(1+\sin x)\,dx \simeq \frac{41}{384}$$

med en feil mindre enn eller lik $1/1920$.

Løsning. Sett $E := \int_0^{1/2} E_3(x)\,dx$. Ved a) og b) får vi at

$$\int_0^{1/2} \ln(1+\sin x)\,dx = \int_0^{1/2}(p(x)+E_3(x))\,dx = \int_0^{1/2}(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3)\,dx + E,$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4\right]_0^{1/2} + E = \frac{1}{8} - \frac{1}{48} + \frac{1}{16\cdot 24} + E = \frac{41}{384} + E,$$

og da er

$$|E| = \left| \int_0^{1/2} E_3(x)\,dx \right| \leq \int_0^{1/2} |E_3(x)|\,dx \leq \int_0^{1/2} \frac{1}{12} x^4\,dx = \left[\frac{1}{60} x^5\right]_0^{1/2} = \frac{1}{60 \cdot 2^5} = \frac{1}{1920}.$$

Oppgave 2.

Bruk at Taylorrekken til eksponensialfunksjonen i punktet $x = 0$ konvergerer mot den opprinnelige funksjonen overalt til å begrunne at rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} = 1 - 2 + 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{15} + \cdots + (-1)^n \frac{2^n}{n!} + \cdots$$

er konvergent. Hva er summen?

Løsning.Taylorrekken til eksponensialfunksjonen i punktet $x = 0$ er

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

som vi vet konverger mot e^x for alle $x \in \mathbb{R}$. Setter vi inn $x = -2$, får vi at rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}$$

konverger mot e^{-2}. Summen av denne rekken er altså $e^{-2} \simeq 0.135335$.

Oppgave 3.

En kurve i planet er gitt i polarkoordinatene r og θ ved likningen

$$r = \theta\,(\pi - 2\,\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Plot punktene som svarer til $\theta = 0, \pi/6, \pi/4$ og $\pi/3$, og skisser kurven. Regn deretter ut arealet til området kurven omkranser.

Løsning. Punktet (x, y) på kurven som svarer til en vinkel $\theta \in [0, \pi/2]$ er

$$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = (\theta\,(\pi - 2\,\theta)\cos\theta,\ \theta\,(\pi - 2\,\theta)\,\sin\theta).$$

- $\theta = 0$ gir $(x, y) = (0, 0)$;
- $\theta = \pi/6$ gir $(x, y) = (\frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{1}{2}) \simeq (0.9497, 0.5483)$;
- $\theta = \pi/4$ gir $(x, y) = (\frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) \simeq (0.8724, 0.8724)$;
- $\theta = \pi/3$ gir $(x, y) = (\frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{1}{2}, \frac{\pi^2}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) \simeq (0.5483, 0.9497)$.

For plot av disse punktene og skisse av kurven, se vedlegget bakerst.
Arealet av området omkranset av denne kurven er

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} r^2\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \theta^2 (\pi - 2\,\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\pi^2\theta^2 - 4\,\pi\theta^3 + 4\,\theta^4)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi^2}{3}\,\theta^3 - \pi\,\theta^4 + \frac{4}{5}\,\theta^5\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \Big(\frac{\pi^5}{24} - \frac{\pi^5}{16} + \frac{\pi^5}{40}\Big) = \frac{\pi^5}{480} \simeq 0.6375. \end{aligned}$$

Oppgave 4.

Annengradslikningen $x^2 - 4x + 5 = 0$ har ingen reelle røtter, men den har to komplekse røtter. *Finn disse.*

Løsning. Vi regner diskriminanten Δ til likningen:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 5 = 16 - 20 = -4.$$

Siden Δ er negativ, har likningen ingen reelle røtter, men den har to komplekse røtter, som er gitt ved

$$z = \frac{-(-4) \pm i\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{4 \pm i\sqrt{4}}{2} = 2 \pm i\,.$$

Oppgave 5.

Betrakt funksjonen f som er definert på $\mathbb{R}^2$ ved

$$f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + 6y^2 - 12xy + 27.$$

a) *Bestem de kritiske punktene til f.*

Løsning. Vi har at $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 - 6x - 12y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 12y - 12x$. Så vi får at

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6x - 12y = 0 \\ 12y - 12x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - 18x = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3) = 0 \\ y = x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$ eller $(3,3)$. Så de kritiske punktene til f er $(0,0)$ og $(3,3)$.

b) *Bestem typen til hver av de kritiske punktene du fant i a) (med andre ord, avgjør om disse er sadelpunkt, lokalt minimumspunkt eller lokalt maksimumspunkt).*

Løsning. Vi skal bruke annenderivert testen. Vi har at

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x - 6, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -12.$$

Det gir at

- $H(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = (-6)(12) - (-12)^2 = -216 < 0.$

  Dermed er $(0,0)$ et sadelpunkt for f.

- $H(3,3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,3)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,3) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3,3) = (12 \cdot 3 - 6)(12) - (-12)^2 = 216 > 0.$

  Siden $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,3) = 30 > 0$, får vi at $(3,3)$ er et lokalt minimumspunkt for f.

Oppgave 6.

Sett $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ x \geq 0\}$. Betrakt den kontinuerlige funksjonen f som er definert på området D ved

$$f(x,y) = x^2 - x + y^2.$$

Siden D er lukket og begrenset, vet vi at f har en global maksimumsverdi f_{maks} og en global minimumsverdi f_{min} på D. *Bestem disse verdiene.*

Løsning. Vi vet at de globale ekstrempunktene til f på D vil befinne seg blandt de kritiske punktene til f som er innenfor D, eller på randkurven til D.

Siden $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 1$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$, får vi at $(x,y) = (1/2, 0)$ er eneste kritisk punkt til f, og den ligger innenfor D. Vi har at $f(1/2,0) = 1/4 - 1/2 + 0 = -1/4$.

Randkurven til D består av to delkurver:

$$C_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\} = \{(\cos\theta, \sin\theta) : -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\}, \text{ og}$$

$$C_2 = \{(x,y) : x = 0, -1 \leq y \leq 1\} = \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\}.$$

Langs C_1 er $f(\cos\theta, \sin\theta) = \cos^2\theta - \cos\theta + \sin^2\theta = 1 - \cos\theta$, der $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Den største verdien f oppnår langs C_1 er 1 (når $\theta = \pm\pi/2$), mens den minste er 0 (når $\theta = 0$).

Langs C_2 er $f(0,y) = y^2$, der $y \in [-1,1]$. Den største verdien f oppnår langs C_2 er 1 (når $y = \pm 1$), mens den minste er 0 (når $y = 0$).

Sammenlikner verdiene for f vi har funnet, kan vi konkludere med at f_{maks} på D er 1 (som oppnåes i $(0, \pm 1)$), mens f_{min} på D er $-1/4$ (som oppnåes i $(1/2, 0)$).

Oppgave 7.

Tabellen nedenfor gir dataene fra et eksperiment der løseligheten (i g/100 mL) av natriumklorid i vann måles som en funksjon av temperaturen (angitt i grader celsius):

Temperatur	20	40	60	80
Løselighet	35.9	36.4	37.1	38.0

Vi ønsker å finne en best mulig tilpasning av disse dataene med en lineær modell på formen $y = ax + b$, der a og b er reelle tall.

Bruk minste kvadraters metode til å bestemme a og b. Anslå deretter hva løseligheten blir ved 100 grader celcius dersom denne modellen stemmer.

Løsning. Med $x_1 = 20, x_2 = 40, x_3 = 60, x_4 = 80$, og $y_1 = 35.9, y_2 = 36.4$, $y_3 = 37.1$, $y_4 = 38.0$, regner vi ut at

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 200, \quad \sum_{i=1}^{4} y_i = 147.4, \quad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 12000, \quad \sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 7440.$$

Setter vi dette inn for formelen for a og b i minste kvadraters metode får vi at

$$a = \frac{4 \cdot 7440 - 200 \cdot 147.4}{4 \cdot 12000 - 200^2} = 0.035,$$

$$b = \frac{147.4 - 0.035 \cdot 200}{4} = 35.1\,.$$

Vi kan dermed anslå at løseligheten ved 100 grader celcius blir

$$a \cdot 100 + b = 0.035 \cdot 100 + 35.1 = 38.6\,.$$

WolframAlpha computational intelligence.

plot ln(1+ sin x), x-x^2/2 + x^3/6, x=-1 to 1

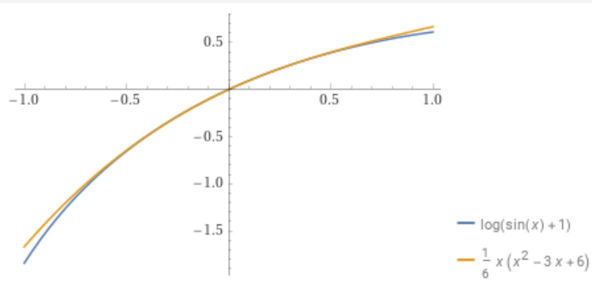
NATURAL LANGUAGE MATH INPUT EXTENDED KEYBOARD EXAMPLES UPLOAD RANDOM

Input interpretation

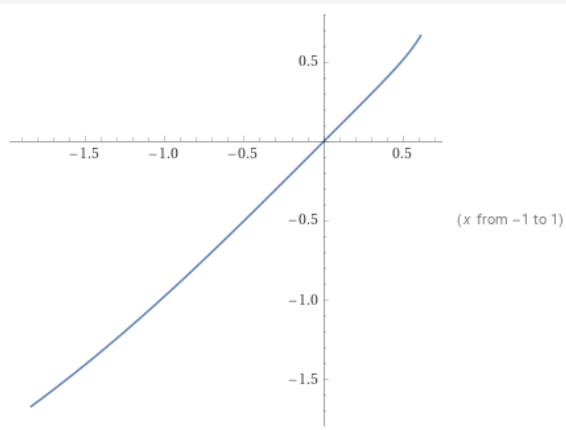
plot	$\log(1+\sin(x))$ $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$	$x = -1$ to 1

$\log(x)$ is the natural logarithm

Plot



Parametric plot



Arc length of parametric curve — More digits — Step-by-step solution

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{4}(2 - 2x + x^2)^2 + \frac{\cos^2(x)}{(1+\sin(x))^2}}\, dx \approx 3.39246\ldots$$

Download Page

POWERED BY THE **WOLFRAM LANGUAGE**

Standard computation time exceeded...

Try again with Pro computation time

WolframAlpha computational intelligence.

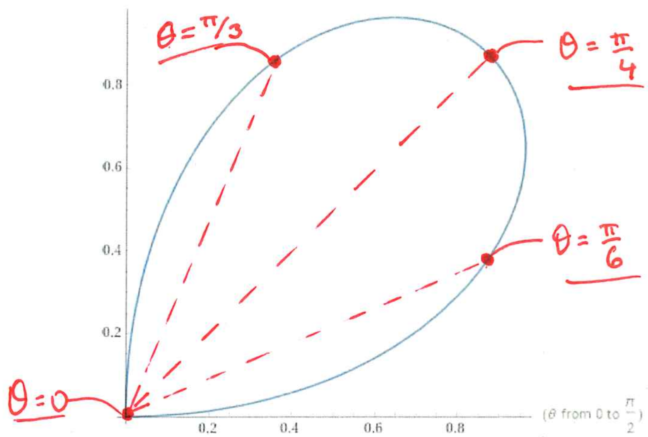
polar plot r=theta(pi-2theta), theta=0 to pi/2

NATURAL LANGUAGE | MATH INPUT | EXTENDED KEYBOARD | EXAMPLES | UPLOAD | RANDOM

Input interpretation

polar plot	$r = \theta(\pi - 2\theta)$	$\theta = 0$ to $\frac{\pi}{2}$

Polar plot



Arc length of polar curve

More digits | Step-by-step solution

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\pi - 4\theta)^2 + (\pi - 2\theta)^2 \theta^2}\, d\theta \approx 3.04755511179\ldots$$

Download Page

POWERED BY THE **WOLFRAM LANGUAGE**

Standard computation time exceeded...

Try again with Pro computation time

Related Queries:

- parametric space curves
- Plot vs Plot3D vs ContourPlot vs DensityPlot
- polar plot (theta (pi - 2 theta))^2
- plot theta (pi - 2 theta)
- Apple iPods