MAT1050 – H23

Obligatorisk oppgavesett nr. 2 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 2. november 2023, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

Alle deloppgavene i oppgavesettet teller likt. Du må ha en total skår på minst 50 % for å få obligen godkjent. Ubegrunnede svar gir ingen uttelling.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Merk: I oppgave 1 a) og i oppgave 3 blir du bedt om å lage en skisse. Du kan selv velge om du vil lage disse skissene for hånd eller bruke et dataprogram.

Oppgave 1.

Betrakt funksjonen f som er definert på intervallet $[-1, 1]$ ved

$$f(x) = \ln(1 + \sin x).$$

a) Beregn Taylorpolynomet p til f av grad 3 i $x = 0$ og lag en skisse som viser grafene til f og p over intervallet $[-1, 1]$.

b) La $E_3(x) = f(x) - p(x)$ betegne feilen man gjør hvis man approksimerer $f(x)$ med $p(x)$. Det kan regnes ut[1] at $|f^{(4)}(c)| \leq 2$ når $0 \leq c \leq 1$. Bruk dette og restleddsformelen (jf. Teorem 4.2.1 i kompendiet) til å begrunne at

$$|E_3(x)| \leq \frac{1}{12}\, x^4 \quad \text{når } \; 0 \leq x \leq 1.$$

c) Bruk a) og b) til å begrunne at

$$\int_0^{1/2} \ln(1 + \sin x)\, dx \simeq \frac{41}{384}$$

med en feil mindre enn eller lik 1/1920.[2]

Oppgave 2.

Bruk at Taylorrekken til eksponensialfunksjonen i punktet $x = 0$ konvergerer mot den opprinnelige funksjonen overalt til å begrunne at rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} = 1 - 2 + 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{15} + \cdots + (-1)^n \frac{2^n}{n!} + \cdots$$

er konvergent. Hva er summen?

Oppgave 3.

En kurve i planet er gitt i polarkoordinatene r og θ ved likningen

$$r = \theta\,(\pi - 2\,\theta), \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Plot punktene som svarer til $\theta = 0, \pi/6, \pi/4$ og $\pi/3$, og skisser kurven. Regn deretter ut arealet til området kurven omkranser.

Oppgave 4.

Annengradslikningen $x^2 - 4x + 5 = 0$ har ingen reelle røtter, men den har to komplekse røtter. Finn disse.

---

[1] Du kan gjerne prøve å gjøre det hvis du har tid.

[2] For ordens skyld: hvis a, b og δ er reelle tall, og $\delta > 0$, skriver man at $a \simeq b$ *med en feil mindre enn eller lik* δ når $|a - b| \leq \delta$.

Oppgave 5.

Betrakt funksjonen f som er definert på $\mathbb{R}^2$ ved

$$f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + 6y^2 - 12xy + 27.$$

a) Bestem de kritiske punktene til f.

b) Bestem typen til hver av de kritiske punktene du fant i a) (med andre ord, avgjør om disse er sadelpunkt, lokalt minimumspunkt eller lokalt maksimumspunkt).

Oppgave 6.

Sett $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$. Betrakt den kontinuerlige funksjonen f som er definert på området D ved

$$f(x,y) = x^2 - x + y^2.$$

Siden D er lukket og begrenset, vet vi at f har en global maksimumsverdi f_{maks} og en global minimumsverdi f_{min} på D. Bestem disse verdiene.

Oppgave 7.

Tabellen nedenfor gir dataene fra et eksperiment der løseligheten (i g/100 mL) av natriumklorid i vann måles som en funksjon av temperaturen (angitt i grader celsius):

Temperatur	20	40	60	80
Løselighet	35.9	36.4	37.1	38.0

Vi ønsker å finne en best mulig tilpasning av disse dataene med en lineær modell på formen $y = ax + b$, der a og b er reelle tall.

Bruk minste kvadraters metode til å bestemme a og b. Anslå deretter hva løseligheten blir ved 100 grader celcius dersom denne modellen stemmer.

SLUTT