# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

| | |
|---|---|
| Eksamen i: | MAT1050 — Matematikk for anvendelser 1 |
| Eksamensdag: | Mandag 20./tirsdag 21. november 2023 (Prøve!!!) |
| Tid for eksamen: | 00.00 – 00.00 |
| Oppgavesettet er på 2 sider. | |
| Vedlegg: | Ingen |
| Tillatte hjelpemidler: | Godkjent kalkulator og ett A4-ark med valgfri håndskrevet eller trykt tekst på begge sider. |

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

*Merk: Eksamensettet består av 6 oppgaver, med tilsammen 10 deloppgaver som alle gir maksimum 10 poeng ved sensuren. Maksimal total poengsum er 100. Dersom det er et punkt du ikke får til, kan du likevel bruke resultatene derfra i senere punkter om du skulle ønske det. For å kunne få poeng forventes det at du gir forklaringer for dine svar. Ubegrunnede svar vil få null poeng under sensuren.*

## Oppgave 1 (vekt 10 poeng)

Avgjør om det uegentlige integralet

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\,(1+x)^2}\,dx$$

er konvergent.

## Oppgave 2 (vekt 10 poeng)

La funksjonen $f$ være definert ved $f(x) = e^{\sin x}$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Beregn Taylor-polynomet til $f$ av grad opp til 3 i $x = 0$. Anslå verdien av $f(0.15)$.

## Oppgave 3 (vekt 10 poeng)

La $D$ være området i $xy$-planet som kan beskrives i polarkoordinater ved

$$\sin(2\theta) \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

Beregn arealet av $D$.

*(Fortsettes på side 2.)*

## Oppgave 4 (vekt 30 poeng)

La $f$ være funksjonen definert ved

$$f(x, y) = 2\,x^2 y - 4\,xy - y^2$$

for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Finn de kritiske punktene til $f$.

b) Bestem typen til de kritiske punktene til $f$ (med andre ord, avgjør hvilke som gir et sadelpunkt, et lokalt minimumspunkt eller et lokalt maksimumspunkt).

c) La $D$ være det lukkede, begrensede området i $xy$-planet som er gitt ved

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (2\,x^2 - 4\,x) \leq y \leq 0\}.$$

Begrunn at minimumsverdien som $f$ antar på $D$ er 0, mens maksimumsverdien som $f$ antar på $D$ er 1.

## Oppgave 5 (vekt 30 poeng)

La området $D$ være som i Oppgave 4 c).

a) Beregn dobbeltintegralet $\iint_D y \; dx\, dy$.

b) La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet i $xy$-planet som er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2, -xy)\,,$$

og la $C$ være randkurven til området $D$, orientert mot klokka.

Avgjør om $\mathbf{F}$ er konservativt, og beregn kurveintegralet $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

c) La $\mathbf{G}$ være vektorfeltet i $xy$-planet som er gitt ved

$$\mathbf{G}(x, y) = (3x^2 y, x^3 + 1)\,,$$

og la $C'$ være den delen av $C$ som er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (t, 2t^2 - 4t), \quad t \in [0, 2].$$

Beregn kurveintegralet $\int_{C'} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$.

## Oppgave 6 (vekt 10 poeng)

Betrakt differensiallikningsystemet

$$\begin{aligned} x' &= -3x + 2y \\ y' &= -x - y \end{aligned}$$

Finn løsningen $x = x(t)$, $y = y(t)$ av dette systemet som tilfredsstiller at $x(0) = 0$ og $y(0) = 1$.

SLUTT