



Arne B. Sletsjøe

## **Kompendium, MAT 1050**

## MAT 1050 – Matematikk for anvendelser 1

### Kort om emnet

Emnet gir en innføring i bruk av matematikk som et verktøy for å forstå fysiske prosesser. Hovedvekten ligger innen analyse, med spesielt fokus på anvendelser av teorien innen fysikk og kjemi. Digitale hjelpemidler anvendes til visualisering av stoffet.

### Læringsutbyttebeskrivelse

Etter å ha fullført emnet:

- kan du regne med komplekse tall på kartesisk og polar form
- har du grunnleggende ferdigheter i analyse, herunder både teknisk og teoretisk innsikt i grenseverdier, derivasjon, integrasjon, og kjenner disse begrepene tolkning innen naturvitenskap
- kjenner du til følger og rekker, kan approksimere funksjoner med potensrekker og har kunnskap om de vanligste regneteknikker innen feltet
- har du kjennskap til funksjoner av flere variable og vet hvordan man bestemmer ekstremalpunkter til slike
- har du kjennskap til teorien for vektorfelt, hovedsakelig i 2 eller 3 dimensjoner, kan derivere og integrere vektorfelt, samt kjenner til noen av de teoretiske hovedresultatene innen feltet
- kan du beregne integraler over ulike områder i plan og rom
- er du kjent med minste kvadraters metode og kan gjennomføre enkel regresjon
- har du kjennskap til enkle ordinære differensiallikninger, og til systemer av slike, deres likevekts- og stabilitetsegenskaper, samt numeriske metoder for å illustrere eller beregne løsninger

## Forelesningsplan

**Uke 1** Funksjoner, derivasjon, funksjonsdrøfting

**Uke 2** Integrasjon

**Uke 3** Integrasjon, rekker

**Uke 4** Taylorrekker, polarkoordinater

**Uke 5** Komplekse tall, funksjoner i flere variable

**Uke 6** Funksjoner i flere variable

**Uke 7** Vektorfelt

**Uke 8** Parametriserte kurver, kurveintegraler og integralkurver

**Uke 9** Multiippel integrasjon

**Uke 10** Vekstmodeller

**Uke 11** System av differensiallikninger

**Uke 12** Oppgaveregning

**Uke 13** Oppgaveregning

# Innhold

<b>1</b>	<b>Funksjoner og derivasjon</b>	<b>5</b>
1.1	Funksjoner . . . . .	5
1.2	Derivasjon . . . . .	8
1.3	Ekstremalpunkter . . . . .	11
1.4	Kritiske punkter . . . . .	12
1.5	Globale ekstremalpunkter . . . . .	14
1.6	Krumning og vendepunkter . . . . .	16
1.7	L'Hôpitals regel . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Integrasjon</b>	<b>22</b>
2.1	Ubestemt integrasjon . . . . .	22
2.2	Bestemt integrasjon . . . . .	25
2.3	Fundamentalteoremet . . . . .	26
2.4	Riemannsummer* . . . . .	28
2.5	Archimedes beregning av volumet av en kule* . . . . .	30
2.6	Trapesmetoden og Simpsons metode . . . . .	31
2.7	Uegentlige integraler . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Følger og rekker</b>	<b>39</b>
3.1	Følger . . . . .	39
3.2	Rekker . . . . .	40
3.3	Rekker som funksjoner . . . . .	41
3.4	Konvergenzkriterier* . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Taylorrekke-utvikling</b>	<b>46</b>
4.1	Taylorpolynom . . . . .	46
4.2	Restleddsestimer* . . . . .	48
4.3	Taylorrekker . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Polarkoordinater</b>	<b>51</b>
5.1	Koordinatsystemer i planet . . . . .	51
5.2	Polare likninger . . . . .	51
5.3	Areal i polarkoordinater . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Komplekse tall</b>	<b>54</b>
6.1	Komplekse tall . . . . .	54
6.2	Det komplekse planet . . . . .	56
6.3	Eulers formel . . . . .	58

<b>7</b>	<b>Funksjoner i flere variable</b>	<b>60</b>
7.1	Definisjoner og eksempler . . . . .	60
7.2	Nivåmengder . . . . .	60
7.3	Partiell derivasjon . . . . .	61
7.4	Lokale ekstremalpunkter . . . . .	63
7.5	Kritiske punkter . . . . .	64
7.6	Globale ekstremalpunkter . . . . .	65
7.7	Minste kvadraters metode . . . . .	66
7.8	Lagranges metode* . . . . .	67
<b>8</b>	<b>Vektorfelt</b>	<b>74</b>
8.1	Vektorer . . . . .	74
8.2	Vektorfelt . . . . .	76
8.3	Gradient . . . . .	77
8.4	Konservative felt . . . . .	78
8.5	Virvling . . . . .	80
<b>9</b>	<b>Kurveintegraler</b>	<b>83</b>
9.1	Parametriserte kurver . . . . .	83
9.2	Buelengde . . . . .	84
9.3	Kurveintegraler . . . . .	85
9.4	Integrere vektorfelt* . . . . .	85
9.5	Kurveintegraler i konservative felt* . . . . .	87
9.6	Integralkurver . . . . .	88
<b>10</b>	<b>Multipel integrasjon</b>	<b>92</b>
10.1	Multipel integrasjon over rektangler . . . . .	92
10.2	Multipel integrasjon over mer generelle områder . . . . .	95
10.3	Areal og tyngdepunkt . . . . .	96
10.4	Greens teorem* . . . . .	98
<b>11</b>	<b>Vekstmodeller</b>	<b>102</b>
11.1	Enkle vekstmodeller . . . . .	102
11.2	Logistisk vekst . . . . .	104
11.3	Numeriske og analytiske løsninger . . . . .	106
11.4	Eulers metode . . . . .	107
<b>12</b>	<b>Systemer av differensiallikninger</b>	<b>111</b>
12.1	Lineære systemer med konstante koeffisienter . . . . .	111
12.2	Eulers metode i flere variable* . . . . .	115
12.3	Dynamiske systemer . . . . .	116
12.4	Likevektstilstander . . . . .	117
<b>13</b>	<b>Fasit til oppgavene</b>	<b>122</b>

# Kapittel 1

## Funksjoner og derivasjon

Det første kapitlet dreier seg om funksjoner i én variabel. Vi ser på hvordan de vokser/avtar, studerer deres kritiske punkter og beskriver krumning og vendepunkter.

### 1.1 Funksjoner

En **funksjon** er en regel som til et reelt tall tilordner et annet reelt tall etter en bestemt oppskrift. Denne oppskriften kan være veldig presist formulert, eller den kan være gitt mer vagt. Oppskrifter vil i hovedsak være formulert på en eller flere av følgende fire måter:

- Verbal beskrivelse
- Numerisk beskrivelse, tabellform
- Visuelt ved en graf
- Analytisk ved en formel

Noen funksjoner kan beskrives på alle fire måter, mens andre mangler beskrivelse på enkelte av de fire.

**Eksempel 1.1.1.** Arealet av en sirkel som funksjon av radius i sirkelen, analytisk gitt ved formelen  $A(r) = \pi r^2$ . Den verbale versjonen er at arealet av en sirkel vokser proporsjonalt med kvadratet av radius, og hvor vi kaller forholdet for  $\pi$ .

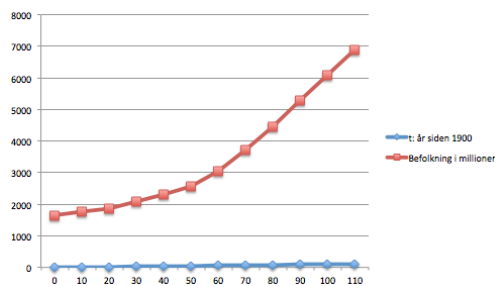
$$\frac{A(r)}{r^2} = \pi$$

Det har som regel liten hensikt å beskrive denne funksjonen med en graf eller tabell.

**Eksempel 1.1.2.** La  $P(t)$  være verdens befolkning ved tidspunktet  $t$ . Nedstående tabell gir befolkningens størrelse for hvert 10-år etter år 1900.

t: år siden 1900	Befolkning i millioner
0	1650
10	1750
20	1860
30	2070
40	2300
50	2560
60	3040
70	3710
80	4450
90	5280
100	6080
110	6870

Vi kan illustrere tabellen med en **graf**, der befolkningsmengden er gitt ved de røde punktene for hvert 10-år markert på den horisontale akse, og en rett linje er trukket mellom punktene.



Det viser seg at funksjonen kan approksimeres relativt godt ved den analytiske formelen

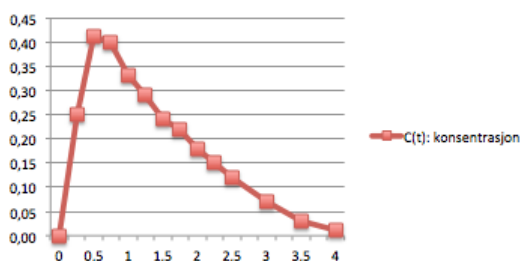
$$P(t) \approx (1.43653 \times 10^9) \cdot (1.01395)^t$$

Dette er et eksempel på bruk av alle fire måtene å beskrive funksjoner.

**Eksempel 1.1.3.** La  $C(t)$  være konsentrasjonen av alkohol i blodet ved tiden  $t$  ved et inntak av alkohol ved tiden  $t = 0$ .

t: timer	C(t): konsentrasjon
0	0,00
0,25	0,25
0,5	0,41
0,75	0,40
1	0,33
1,25	0,29
1,5	0,24
1,75	0,22
2	0,18
2,25	0,15
2,5	0,12
2,75	
3	0,07
3,25	
3,5	0,03
3,75	
4	0,01

**C(t): konsentrasjon**



Figurene over viser utdrag av funksjonen i tabellform, og en graf hvor vi har trukket rette linjer mellom datapunktene. Her er det naturlig å hoppe over den analytiske beskrivelsen, siden det er vanskelig å peke på noen funksjon som har akkurat den gitte grafen.

Det finnes mange slags forskjellige typer av funksjoner. Her er en oversikt over noen vanlige, med beskrivelser og bruksområder.

### Polynomer

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

hvor  $n$  er et helt tall og  $a_0, a_1, \dots, a_n$  er reelle tall som kalles polynomets koeffisienter. Polynomer utgjør de viktigste byggestenene for mer generelle funksjoner. Deres viktigste egenskap er at de lar seg beregne; polynomer reflekterer kun de vanlige regneartene. F.eks. kan vi regne ut verdien  $f(2)$  for funksjonen  $f(x) = 2x^3 - x - 5$  ved å sette inn

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 2 - 5 = 16 - 2 - 5 = 9$$

**Rasjonale funksjoner** er brøker av polynomer laget på sammen måte som man lager rasjonale tall fra de hele tall. Et eksempel på en rasjonal funksjon er

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x - 3}$$

Rasjonale funksjoner er i prinsippet like beregnbare som polynomer, siden det eneste ekstra som introduseres er divisjon. Vi kan regne ut verdien i et vilkårlig punkt;

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}{2\frac{1}{2} - 3} = \frac{\frac{5}{4}}{-2} = -\frac{5}{8}$$

**Ekspensialfunksjoner** er funksjoner av typen  $f(x) = a^x$  for et reelt **grunntall**  $a$ . Den mest perfekte ekspensialfunksjonen har grunntall  $e = 2,718281828459045 \dots$ . Ekspensialfunksjoner er grunnpilaren i alle vekstmodeller. For en populasjon med konstant vekst vil antallet individer være gitt ved en ekspensialfunksjon. Vi har

$$P(t) = P_0 e^{kt}$$

der  $P_0$  er størrelsen på populasjonen ved tiden  $t = 0$ , og  $k$  er en konstant som bestemmes av vekstraten til populasjonen.

**Trigonometriske funksjoner** er funksjoner med opphav i cosinus og sinus, dvs. forholdstallene mellom kateter og hypotenus i en rettvinklet trekant, som funksjon av en vinkel. Trigonometriske funksjoner er periodiske og de er velegnet til å beskrive bølger, svingninger eller andre periodiske størrelser.

**Rotfunksjoner** er funksjoner av typen  $f(x) = \sqrt{x}$ , eller kombinasjoner av slike med f.eks. polynomer. Funksjonen  $f(x) = \sqrt{x}$  tilordner til et positivt reelt tall  $x$  et annet positivt reelt tall  $\sqrt{x}$  som er slik at  $\sqrt{x}^2 = x$ . Tilsvarende uttrykker  $\sqrt[n]{x}$ , eller også skrevet  $x^{\frac{1}{n}}$  et tall som ganget med seg selv  $n$  ganger gir oss  $x$  tilbake.

**Eksempel 1.1.4.** Vi betrakter et rektangel med sidekanter  $x$  og  $y$ . Omkretsen av rektangelet er  $O = 2x + 2y$ , og arealet er  $xy$ . Anta at vi har bestemt oss for at rektangelet skal ha areal  $A$ , dvs.  $xy = A$ . Det betyr at dersom lengden  $x$  av den ene sidekanten er gitt, så vil den andre være bestemt ved  $y = \frac{A}{x}$ . Det gir oss omkretsen av rektangelet gitt som en funksjon av den variable sidekanten  $x$ ;

$$O = O(x) = 2x + 2\frac{A}{x}$$

I dette tilfellet er det klart at vi har en begrensning på hvilke  $x$  vi kan bruke. Hvis det skal ha mening å snakke om  $x$  som sidekanten i et rektangel, må vi nødvendigvis ha  $x > 0$ . Vi sier at funksjonen  $O$  har definisjonsmengde gitt ved  $x > 0$ , eller skrevet på en av formene

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = \langle 0, \infty \rangle$$

Definisjonsområdet til en funksjon kan være gitt ved intervaller på tallinjen. Vi bruker notasjonen

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

for **lukkede** intervaller, dvs. intervaller som inneholder sine endepunkter,

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

for **åpne** intervaller (inneholder ingen av sine endepunkter) og

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

for **halvåpne** intervaller. Merk at  $\mathbb{R}$  står for de reelle tallene.

Den formelle definisjonen av en funksjon er som følger:

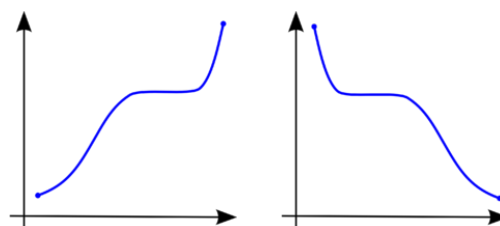
**Definisjon 1.1.1.** La  $A \subset \mathbb{R}$  være en delmengde av de reelle tallene. En funksjon  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  er en regel som til et hvert element  $x \in A$  tilordner nøyaktig ett element  $f(x) \in \mathbb{R}$ . Mengden  $A$  kalles **definisjonsområdet** til funksjonen.

Vi kan dele egenskapene til en funksjon i to grupper, lokale og globale egenskaper.

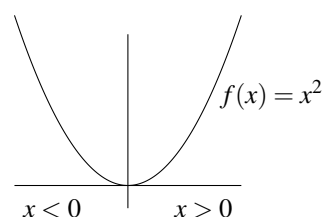
**Lokale egenskaper** til en funksjon er egenskaper som observeres i små intervaller om punkter i definisjonsområdet til funksjonen. Monotoni-egenskapene til en funksjon, dvs. hvor den vokser og hvor den avtar, er en lokal egenskap, det samme gjelder krumning. Kontinuitet, deriverbarhet og maksimums- og minimumspunkter er også lokale egenskaper. Vi skal komme tilbake til disse begrepene etter hvert.

**Definisjon 1.1.2.** En funksjon  $y = f(x)$  er (**strengt**) **voksende** på et intervall  $I$  dersom  $f(x_1) \leq f(x_2)$  ( $f(x_1) < f(x_2)$ ) for alle  $x_1 < x_2$  i intervallet. Funksjonen er (**strengt**) **avtagende** dersom  $f(x_1) \geq f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ ) for alle  $x_1 < x_2$  i intervallet.

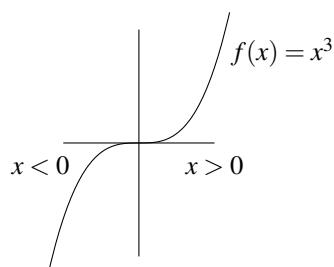
Forskjellen på voksende og strengt voksende funksjoner er at voksende funksjoner kan ha områder hvor de er konstante. Det tillater vi ikke for strengt voksende funksjoner.



**Figur 1.1.** Grafene til to monotone funksjoner, voksende til venstre og avtagende til høyre.



**Eksempel 1.1.5.** Funksjonen  $f(x) = x^2$  er strengt voksende på intervallet  $[0, \infty)$ , siden  $x_1^2 < x_2^2$  når  $x_1 < x_2$ . Tilsvarende er funksjonen strengt avtagende på intervallet  $(-\infty, 0]$  siden vi har at  $x_1^2 > x_2^2$  for to negative tall  $x_1$  og  $x_2$  hvor  $x_1 < x_2$ .



**Eksempel 1.1.6.** Funksjonen  $f(x) = x^3$  er strengt voksende overalt, siden  $x_1^3 < x_2^3$  når  $x_1 < x_2$ .

I motsetning til de lokale egenskapene som beskriver hvordan funksjonen ser ut i et lite intervall, karakteriserer de globale egenskapene funksjonen mer som en helhet. Et god illustrasjon er en funksjon som til et hvert punkt på Norgeskartet beskriver høyden over havet. Alle små og store fjelltopper vil være lokale maksimumsverdier, siden det ikke er noen steder i nærheten som er høyere. Den globale maksimumsverdien finner vi kun ettsted, nemlig på toppen av Galdhøpiggen. I et senere kapittel skal vi se nærmere på de globale egenskapene.

## 1.2 Derivasjon

Monotoni kan måles ved den **deriverte** til funksjonen. For å definere den deriverte av en funksjon trenger vi først begrepet **grenseverdi**. Grenseverdien til en funksjon er den verdien funksjonen  $f(x)$  nærmer seg når  $x$  nærmer seg en bestemt verdi.

Her er den formelle definisjonen.

**Definisjon 1.2.1.** La  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  være en funksjon, og  $a \in \mathbb{R}$  et punkt på tallinja. **Grenseverdien**  $L$  av  $f$  når  $x$  går mot  $a$  er definert som følger: For alle  $\varepsilon > 0$  så finnes en  $\delta > 0$  slik at for alle  $x \neq a$  slik at  $|x - a| < \delta$ , så er  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Vi skriver

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

eller alternativt

$$f(x) \rightarrow L \quad \text{når} \quad x \rightarrow a$$

For de fleste funksjoner vi har å gjøre med vil det være slik at

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Dersom dette er oppfylt sier vi at funksjonen  $f$  er **kontinuerlig** i punktet  $x = a$ . Polynomialfunksjoner, trigonometriske funksjoner og eksponensialfunksjoner er alle eksempler på funksjoner som er kontinuerlige overalt. Et eksempel på en funksjon med en **diskontinuitet** (punkt hvor funksjonen ikke er kontinuerlig) er

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

som ikke er kontinuerlig i punktet  $x = 0$ . Hvis  $x < 0$ , så vil funksjonsverdien uansett være  $f(x) = -1$ . Det betyr at grenseverdien når  $x$  går mot 0 også vil være  $-1$ . Tilsvarende har vi for  $x > 0$ . Funksjonsverdien  $f(x) = 1$  og grenseverdien av en funksjon som i det aktuelle området er konstant vil ha denne konstanten som sin grenseverdi. Men funksjonsverdien i  $x = 0$  er 0 og dermed ulik begge grenseverdiene, både den fra venstre (negative  $x$ ) og den fra høyre (positive  $x$ ).

Funksjoner som beskriver ting som opptrer i naturen er stort sett kontinuerlige. Ting kan ikke plutselig endre seg, og hvis de gjør det er det ofte bare tilsynelatende. Det er gjerne en kontinuerlig prosess som går, men den går så fort at det virker som om vi har å gjøre med en diskontinuitet.

Vi skal bruke grenseverdier til å definere den deriverte til en funksjon  $f(x)$  i punktet  $x = a$ . Ideen med den deriverte er å finne et mål for endringen av en funksjon i et bestemt punkt. For å måle denne endringen ser vi på funksjonsverdien i to nærliggende punkter og regner ut gjennomsnittlig endring mellom de to punktene. Ved å la de to punktene komme stadig nærmere hverandre er tanken at grensen for den gjennomsnittlige endringen måler endringen til funksjonen i ett punkt.

Litt mer presist beskrevet, skal vi finne endringen til funksjonen  $f(x)$  i punktet  $x = a$ . De to punktene vi studerer er  $x = a$  og  $x = a + h$ . Den gjennomsnittlige endringen i intervallet  $[a, a + h]$  er gitt ved

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Denne størrelsen regner vi ut for så å la  $h$  gå mot 0.

**Definisjon 1.2.2.** La  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  være en kontinuerlig funksjon. Den **deriverte**  $f'(a)$  av  $f$  i punktet  $x = a$  er gitt ved

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Merk at i definisjonen av den deriverte krever vi at  $h$  skal kunne være negativ så vel som positiv. Dersom grenseverdien bare eksisterer fra den ene siden sier vi at vi har en **ensidig grenseverdi**. Ensidige grenseverdier er ikke godt nok for definisjonen av den deriverte.

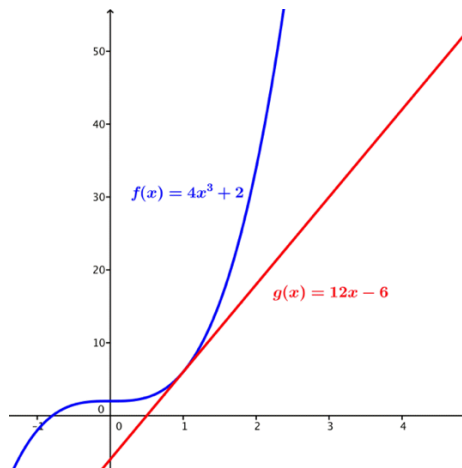
En funksjon sies å være **deriverbar** i et punkt  $x = a$  dersom den deriverte av funksjonen eksisterer i punktet, dvs. at grenseverdien over eksisterer, altså at de to ensidige grenseverdiene er like. En funksjon er deriverbar på et intervall  $I$  dersom den er deriverbar i alle punkter  $a \in I$  i intervallet. Det er lett å se at de vanlige funksjonene, polynomer, cosinus og sinus og eksponensialfunksjoner er deriverbare overalt.

Den deriverte av en funksjon er selv en funksjon, og den gir oss et uttrykk for endringen til funksjonen  $f(x)$ . Et eksempel er konstantfunksjonen  $f(x) = C$ . Den deriverte til denne funksjonen er  $f'(x) = 0$ , noe som sier at funksjonen ikke endrer seg. Og det er jo tilfellet for en konstant funksjon.

Hvis vi tegner grafen til en funksjon, så vil den deriverte til funksjonen i et punkt gi oss **stigningstallet** til funksjonen i punktet. Stigningstallet til funksjonen i et punkt måler vi ved å se på **tangenten** til funksjonen i punktet. Tangenten er en rett linje som **tangerer** grafen i punktet. Stigningstallet til en rett linje uttrykker hvor



mange enheter vi går opp (eller ned) når vi går en enhet mot høyre.



**Eksempel 1.2.1.** Vi skal regne ut den deriverte av funksjonen  $f(x) = x^2$ . Vi har

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

Tilsvarende regning for  $f(x) = x^3$  gir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 \end{aligned}$$

På samme måte får vi for  $f(x) = x^n$  for et heltall  $n > 0$  at  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

**Eksempel 1.2.2.** I eksemplet over så vi på potensfunksjoner med positiv eksponent. Man kan vise at nøyaktig samme formel gjelder for negative eksponenter  $n < 0$ . Som et eksempel kan vi regne ut den deriverte av funksjonen  $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ . Vi har

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - (x+h)}{hx(x+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2} \end{aligned}$$

som stemmer godt med formelen  $f'(x) = nx^{n-1}$  (sett  $n = -1$ ).

**Eksempel 1.2.3.** Vi skal regne ut den deriverte til eksponensialfunksjonen  $f(x) = e^x$ . For å gjøre det trenger vi å vite at for små verdier av  $h$ , så kan vi approksimere eksponensialfunksjonen ved  $e^h \approx 1 + h$ .

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x h}{h} = e^x$$

Eksponensialfunksjonen er altså lik sin egen derivert. Denne egenskapen er (med unntak av  $f(x) = 0$ ) unik for eksponensialfunksjonen med  $e$  som grunntall.

**Eksempel 1.2.4.** Hva med de deriverte av sinus og cosinus? Her bruker vi en annen approksimasjon; for små verdier av  $h$  har vi at  $\sin h \approx h$ . Vi har også at  $\cos h \approx 1$ . Det gir for  $f(x) = \sin x$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin h + \sin x(1 - \cos h)}{h} = \cos x \end{aligned}$$

hvor vi har brukt formelen for sinus til en sum av to vinkler.

Tilsvarende for  $g(x) = \cos x$ ,

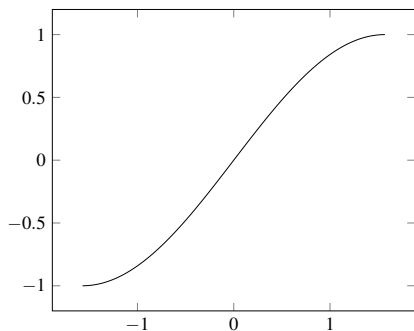
$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin x \sin h + \cos x(\cos h - 1)}{h} = -\sin x \end{aligned}$$

Vi kan bruke den deriverte til å studere monotoni-egenskapene til en funksjon. Generelt vil det være klar sammenheng mellom voksende funksjoner og positivt derivert, og avtagende funksjoner og negativt derivert.

**Teorem 1.2.3.** Dersom  $f'(x) > 0$  (henholdsvis  $f'(x) < 0$ ) på et intervall, så vokser (henholdsvis avtar)  $f(x)$  på intervallet.

**Eksempel 1.2.5.** Vi ser på funksjonen  $f(x) = x^2$ . Den deriverte er gitt ved  $f'(x) = 2x$ , som betyr at funksjonen vokser på intervallet  $[0, \infty)$  og avtar på intervallet  $(-\infty, 0]$ .

**Eksempel 1.2.6.** Betrakt funksjonen  $f(x) = e^x$ . Den deriverte er gitt ved  $f'(x) = e^x > 0$ , som betyr at funksjonen vokser overalt.



**Eksempel 1.2.7.** Funksjonen  $f(x) = \sin x$ , hvor  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  har derivert  $f'(x) = \cos x$ . På intervallet  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  har vi  $\cos x \geq 0$  og funksjonen vil derfor være voksende på dette intervallet.

**Eksempel 1.2.8.** Betrakt en beholder fylt med gass ved en konstant temperatur. Boyles gasslov sier at trykket av gassen er omvendt proporsjonal med volumet av gassen. Vi uttrykker dette ved likningen

$$P = \frac{C_T}{V}$$

der  $P$  er trykket,  $V$  er volumet og  $C_T$  er en konstant som avhenger av temperaturen  $T$  i gassen. Dersom vi deriverer  $P$  med hensyn på  $V$  får vi

$$P'(V) = -\frac{C_T}{V^2}$$

som uttrykker at trykket er en avtagende funksjon med hensyn på volumet, ved konstant temperatur. Jo større volum, jo lavere trykk.

Hvis vi skal regne ut den deriverte til en funksjon kan vi alltid bruke definisjonen og regne ut grenseverdien. Men det er vanligvis ganske tungvint. Derfor har vi etablert et sett av regneregler for derivasjon. Den første sier at derivasjon er en lineær operator, dvs. at den deriverte av en sum er summen av de deriverte.

**Teorem 1.2.4.** La  $f(x)$  og  $g(x)$  være to deriverbare funksjoner på et område  $A \subset \mathbb{R}$ , og la  $h(x) = f(x) + g(x)$ . Da har vi

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

La videre  $a \in \mathbb{R}$  være et reelt tall og  $k(x) = af(x)$ . Da har vi

$$k'(x) = af'(x)$$

**Eksempel 1.2.9.** La  $f(x) = 2x^3 - 3x^4$ . Da har vi

$$f'(x) = 6x^2 - 12x^3$$

ved å kombinere regelen over med derivasjonsreglene for potensfunksjoner.

Det er ikke like rett fram å derivere et produkt av to funksjoner. Regnereglen er gitt ved følgende resultat:

**Teorem 1.2.5.** La  $f(x)$  og  $g(x)$  være to deriverbare funksjoner på et område  $A \subset \mathbb{R}$ , og la  $h(x) = f(x)g(x)$ . Da har vi

$$h'(x) = f'(x)g(x) + h(x)g'(x)$$

Denne regelen omtaler vi ofte som **produktregelen** eller **Leibniz regel**.

**Eksempel 1.2.10.** La  $f(x) = x^2 \sin x$ . Da har vi

$$f'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

**Eksempel 1.2.11.** La  $f(x) = x^2$  og  $g(x) = \frac{1}{x^2}$ . Da har vi  $h(x) = f(x)g(x) = x^2 \cdot \frac{1}{x^2} = 1$ , og  $h'(x) = 0$ . Ved produktregelen får vi

$$h'(x) = 2x \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) + x^2 \cdot \left(-2\frac{1}{x^3}\right) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x} = 0$$

Den siste i rekken av generelle regler for derivasjon gjelder for sammensatte funksjoner.

**Teorem 1.2.6.** La  $g(x)$  være en deriverbar funksjon på et område  $A \subset \mathbb{R}$ , og  $f(x)$  en deriverbar funksjon på  $f(A) \subset \mathbb{R}$ . La videre  $h(x) = f(g(x))$  være den sammensatte funksjonen. Da har vi

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Denne regneregelen for derivasjon kalles **kjerneregelen**. Begrepet kommer av at funksjonen  $g(x)$  omtales som **kjernen** i den sammensatte funksjonen.

**Eksempel 1.2.12.** Betrakt den sammensatte funksjonen  $h(x) = \cos(x^2)$ . Vi lar  $f(x) = \cos x$  og  $g(x) = x^2$ , og  $h(x) = f(g(x))$ . Det gir

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = -\sin(x^2) \cdot 2x = -2x \sin(x^2)$$

**Eksempel 1.2.13.** Betrakt funksjonen  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Vi kan sette denne funksjonen sammen med seg selv. Det gir

$$g(x) = f(f(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

Vi kan regne ut den derivert av denne funksjonen på to ulike måter. For det første har vi åpenbart at  $g'(x) = 1$ . Hvis vi bruker kjerneregelen får vi, siden  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ :

$$g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1$$

Vi har dermed verifisert kjerneregelen i dette tilfellet.

**Eksempel 1.2.14.** Vi kan bruke kjerneregelen til å regne ut den deriverte av logaritmefunksjonen  $f(x) = \ln x$ . Siden logaritmefunksjonen er den omvendte funksjonen til eksponensialfunksjonen  $g(x) = e^x$  har vi  $h(x) = g(f(x)) = e^{\ln x} = x$  og  $h'(x) = 1$ . Vi deriverer ved å bruke kjerneregelen

$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = e^{\ln x} \cdot f'(x) = x \cdot f'(x) = 1$$

og det følger at

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

siden  $g'(x) = e^x$

Logaritmefunksjonen  $\ln x$  er bare definert for positive  $x$ . Vi kan utvide definisjonsområdet ved heller å se på funksjonen  $f(x) = \ln |x|$ . Denne funksjonen er definert for alle reelle tall forskjellig fra 0, og er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & x < 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$$

Vi kan derivere denne funksjonen ved å derivere hvert av de to områdene hver for seg og får

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{-x} \cdot -1 = \frac{1}{x} & x < 0 \\ \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$$

Resultatet er at den deriverte av  $\ln |x|$  er  $\frac{1}{x}$ .

Nå kan vi kombinere regneregler for å utvide verktøykassen. Kombinasjon av potensregelen og kjerneregelen gir at den deriverte av  $h(x) = \frac{1}{g(x)}$  er gitt ved

$$h'(x) = -\frac{1}{g(x)^2} \cdot g'(x)$$

Hvis vi kombinerer dette videre med produktregelen, får vi formelen for den deriverte til en rasjonal funksjon:

**Teorem 1.2.7.** La  $f(x)$  og  $g(x)$  være to deriverbare funksjoner på et område  $A \subset \mathbb{R}$ , og anta at  $g(x) \neq 0$  på  $A$ . La  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ . Da har vi

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

**Eksempel 1.2.15.** Vi skal derivere kvosienten

$$f(x) = \frac{x}{1-x}$$

Etter formelen over får vi

$$f'(x) = \frac{(1-x) \cdot 1 - x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

**Eksempel 1.2.16.** Vi kan også bruke denne formelen til å vise potensformelen for negative potenser. La

$$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

Da har vi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -n \frac{x^{n-1}}{x^{2n}} \\ &= -n \frac{1}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1} \end{aligned}$$

### 1.3 Ekstremalpunkter

Vi er interessert i å finne punkter der funksjonen antar sin største/minste verdi. I første omgang leter vi etter lokale maksimums- og minimumspunkter, dvs. punkter der funksjonen er større (mindre) enn eller lik alle andre punkter i nærheten. Dette trenger ikke å gi oss de største (minste) verdiene for funksjonen.

Vi skal bruke begrepet *i nærheten av*  $x$  om punkter som er forskjellig fra  $x$ , men hvor avstanden til  $x$  er så liten som det er hensiktsmessig i det aktuelle tilfellet. Denne avstanden kan være 1 eller den kan være 0.00001, eller en enda mindre verdi. Det viktigste er at det finnes en fast avstand slik at påstanden vi kommer med er sann for alle  $y$  som ikke er lenger fra punktet  $x$  enn denne avstanden.

Et eksempel på bruk av begrepet *i nærheten av* er som følger: La  $f(x)$  være en kontinuerlig funksjon, dvs. at  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  for alle  $a$  i definisjonsområdet til  $f$ . F.eks. kan vi se på  $f(x) = x - x^2$ . For  $x = 0.9$  har vi  $f(0.9) = 0.9 - (0.9)^2 = 0.09 > 0$ . En kontinuerlig funksjon som er ekte større enn 0 i et punkt, vil alltid være ekte større enn 0 i nærheten av punktet. La nå  $x = 0.9 + h$  for en liten verdi for  $h$ , dvs. vi ser på et punkt som er i nærheten av 0.9. Da har vi at

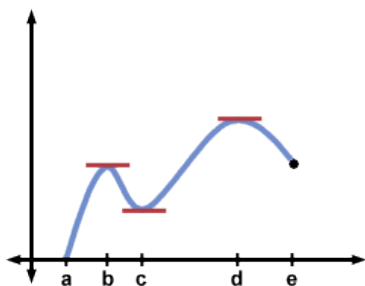
$$\begin{aligned} f(0.9 + h) &= 0.9 + h - (0.9 + h)^2 \\ &= 0.9 + h - 0.81 - 1.8h - h^2 \\ &= 0.09 - 0.8h - h^2 \end{aligned}$$

Vi ser at dersom  $|h| < 0.1$  så har vi  $f(0.9 + h) > 0$ . Det betyr at i dette eksemplet vil  $i$  nærheten av av 0.9 naturlig bety at avstanden til 0.9 er ekte mindre enn 0.1.

**Definisjon 1.3.1.** Det er to typer lokale ekstremalpunkter:

- i) Funksjonen  $y = f(x)$  har et **lokalt minimum** i  $x = c$  dersom  $f(c) \leq f(x)$  for alle  $x$  i et åpent intervall om  $x = c$ .
- ii) Funksjonen  $y = f(x)$  har et **lokalt maksimum** i  $x = c$  dersom  $f(c) \geq f(x)$  for alle  $x$  i et åpent intervall om  $x = c$ .

En fellesbetegnelse på punkter hvor funksjonen har lokale maks- eller minimumspunkter er **lokale ekstremalpunkter**.



**Figur 1.2.** Figuren indikerer lokale maksimums- og minimumspunkter.

**Eksempel 1.3.1.** Funksjonen  $f(x) = x^2$  definert på hele  $\mathbb{R}$  har et lokalt minimumspunkt i  $x = 0$  siden  $f(x) > f(0)$  for alle  $x \neq 0$ .

**Eksempel 1.3.2.** Funksjonen  $f(x) = \cos x$  definert på hele  $\mathbb{R}$  har et lokalt maksimumspunkt i  $x = 0$  siden  $\cos x < \cos 0 = 1$  for alle  $x \neq 0$  i nærheten av 0. Denne funksjonen er periodisk med periode  $2\pi$  (betyr at  $f(x + 2\pi) = f(x)$ ) og vi har derfor også maksimumspunkter for  $x = 2k\pi$ , for alle hele tall  $k$ . Tilsvarende har vi lokale minimumspunkter for  $x = \pi + 2k\pi$  for alle hele tall  $k$ , siden  $\cos(\pi + 2k\pi) = \cos \pi = -1 \leq \cos x$  for alle verdier av  $x$ .

**Eksempel 1.3.3.** Funksjonen  $f(x) = e^x$  har ingen lokale ekstremalpunkter siden dens deriverte  $f'(x) = e^x > 0$  for alle  $x$ . Funksjonen vokser derfor i hele sitt definisjonsområde, noe som ikke er forenlig med å ha et ekstremalpunkt.

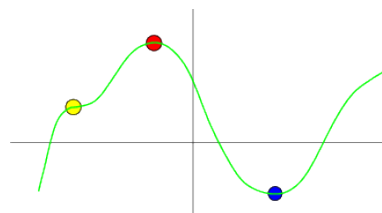
## 1.4 Kritiske punkter

Den deriverte til en funksjon  $y = f(x)$  i et punkt  $x_0$  gir oss stigningstallet til tangenten til funksjonen i punktet. I et maksimums- eller minimumspunkt for en deriverbar funksjon vil tangenten være horisontal, dvs. tangentlinja har stigningstall 0. Det betyr at  $f'(x_0) = 0$ . Slike punkter er så viktige at de har fått et eget navn.

**Definisjon 1.4.1.** Et punkt  $x = c$  i definisjonsområdet til en funksjon  $f(x)$  kalles et **kritisk punkt** for funksjonen dersom  $f'(c) = 0$  eller  $f'(c)$  ikke eksisterer.

Merk at vi bruker betegnelsen kritisk punkt både om punkter der den deriverte er 0, og om punkter der funksjonen ikke har noen derivert, f.eks. i *knekkpunkter* på grafen. Knekkpunkter er punkter der de ensidige deriverte er forskjellige. Det betyr at stigningstallet til grafen er forskjellig på de to sidene av punktet. Grafen ser dermed ut som en spiss i dette punktet. Dersom funksjonen  $f(x)$  er definert på et lukket intervall  $[a, b]$ , inkluderer vi endepunktene  $x = a$  og  $x = b$  blant funksjonens kritiske punkter. Dette passer med definisjonen siden den deriverte av en funksjon formelt sett ikke er definert i endepunktene av et lukket definisjonsområde.

Vi bruker betegnelsen **indre punkter** om punktene i et intervall som ikke er endepunkter.



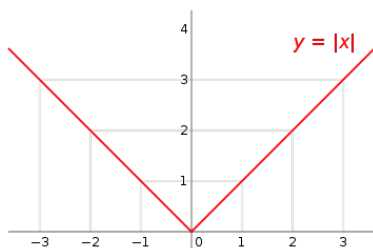
**Figur 1.3.** De markerte punktene viser de indre kritiske punktene.

**Eksempel 1.4.1.** Funksjonen  $f(x) = |x|$  har et kritisk punkt i  $x = 0$  siden  $f'(0)$  ikke er definert i det punktet. Absoluttverdifunksjonen er ikke deriverbar i  $x = 0$  siden grenseverdiene for de ensidige deriverte fra høyre og venstre side ikke er like. For positive verdier av  $h$  har vi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = 1$$

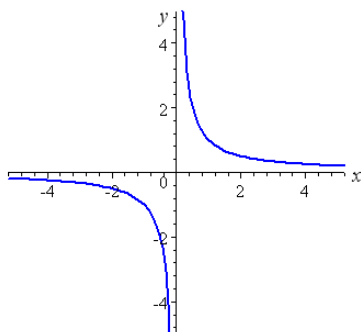
og for negative verdier av  $h$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = -1$$



**Figur 1.4.** Grafen til absoluttverdifunksjonen,  $f(x) = |x|$  med et kritisk punkt i  $x = 0$ .

**Eksempel 1.4.2.** Alle potensfunksjoner  $g(x) = x^n$  for  $n \geq 2$  har kritisk punkt i  $x = 0$  siden  $f'(0) = n \cdot 0^{n-1} = 0$ .



**Figur 1.5.** Grafen til  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

**Eksempel 1.4.3.** Funksjonen  $h(x) = \frac{1}{x}$  har **ikke** et kritisk punkt i  $x = 0$  siden funksjonen ikke er definert i dette punktet.

I mange tilfeller er det sammenfall mellom ekstremalpunkter og kritiske punkter, men det er ikke alltid slik. Imidlertid er alle ekstremalpunkter også kritiske punkter, mens det motsatte ikke nødvendigvis er riktig.

**Teorem 1.4.2.** Dersom  $f(x)$  har et lokalt maksimums- eller minimumspunkt i  $x = c$ , så er  $c$  et kritisk punkt for  $f$ .

*Bevis.* Anta at funksjonen er deriverbar i punktet  $x = c$ . Hvis ikke er punktet pr. definisjon et kritisk punkt. Vi har

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \approx \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

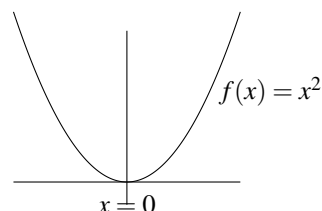
hvor vi i det siste uttrykket lar  $x = c + h$  være i nærheten av  $c$ , dvs. at  $h$  er liten. Anta at  $f(x)$  har et lokalt maksimum i  $x = c$ . Dersom  $f'(c) > 0$ , så vil  $f(x) > f(c)$  for  $x > c$ . Dette er ikke mulig siden

$c$  er et lokalt maksimumspunkt. Dersom  $f'(c) < 0$ , så vil  $f(x) > f(c)$  for  $x < c$ , som på tilsvarende måte er umulig og vi har en motsetning. Samme type argument gjelder for lokale minimumspunkter.  $\square$

**Teorem 1.4.3.** Hvis  $f(x)$  har et kritisk punkt i  $x = c$ , så er dette

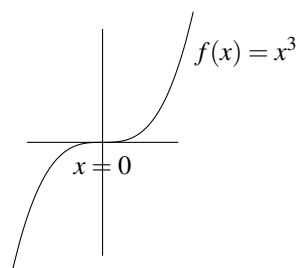
- i) et lokalt minimum dersom  $f'(x)$  skifter tegn fra negativ til positiv i  $x = c$ .
- ii) et lokalt maksimum dersom  $f'(x)$  skifter tegn fra positiv til negativ i  $x = c$ .

*Bevis.* Følger nokså direkte fra definisjonen av den deriverte ved å analysere fortegnet til uttrykkene som inngår.  $\square$



**Eksempel 1.4.4.** Vi ser på funksjonen  $f(x) = x^2$ . Den deriverte er gitt ved  $f'(x) = 2x$ , som betyr at funksjonen har et kritisk punkt i  $x = 0$ . Dette er også et lokalt minimumspunkt siden den deriverte til  $(x)$  skifter tegn fra negativt til positivt i  $x = 0$ .

Grunnen til at det ikke er en enetydig sammenheng mellom kritiske punkter og ekstremalpunkter, er at det finnes kritiske punkter som ikke er ekstremalpunkter. Det at den deriverte til en funksjon er 0 i et punkt, trenger ikke å bety at punktet er et maksimums- eller minimumspunkt for funksjonen. Det er fullt mulig at den deriverte til funksjonen er 0 i et punkt, samtidig med at funksjonen vokser overalt i nærheten av punktet (se eksemplet under).



**Figur 1.6.** Grafen til funksjonen  $f(x) = x^3$ .

**Eksempel 1.4.5.** Betrakt funksjonen  $g(x) = x^3$ . Den deriverte er gitt ved  $g'(x) = 3x^2$ , som betyr at funksjonen har et kritisk punkt for  $x = 0$ . Dette er imidlertid ikke noe ekstremalpunkt. Funksjonens deriverte skifter ikke tegn i dette punktet, vi har  $g'(x) > 0$  for alle  $x \neq 0$ .

**Definisjon 1.4.4.** Et punkt  $x = a$  hvor den deriverte  $f'(x)$  er 0, men ikke skifter tegn kalles et **terassepunkt**.

En typisk problemstilling vi er opptatt av, handler om å analysere monotoni-egenskapene og å finne lokale ekstremalpunkter for en funksjon. Det neste eksemplet illustrerer framgangsmåten, hvor fortegnsskjema er et sentralt hjelpemiddel. Et **fortegnsskjema** er en tabell hvor vi deler opp definisjonsområdet til funksjonen i intervaller hvor den deriverte har samme fortegn (negativ eller positiv).

**Eksempel 1.4.6.** Vi skal bestemme monotoni-egenskaper og lokale ekstremalpunkter for funksjonen

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 3$$

Vi regner ut den deriverte, faktoriserer og setter den lik 0;

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1) = 0$$

Vi tegner fortegnsskjema for  $f'(x)$ :

	$x < 0$	$0$	$0 < x < 1$	$1$	$x > 1$
$12x^2$	+	0	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	0	+
$f'(x)$	-	0	-	0	+
	↘		↘	↖	↗

Hver faktor i uttrykket for den deriverte har sin egen rad og  $\pm$ -tegnene angir tegnet til faktoren i det angitte intervallet. Tegnene multipliseres sammen i raden til  $f'(x)$  og i nederste rad er konklusjonen gitt, om hvorvidt funksjonen vokser eller avtar.

Det betyr at vi har et lokalt minimumspunkt for  $x = 1$ , at funksjonen er avtagende for  $x \leq 1$  og at den er voksende for  $x \geq 1$ . Vi har ikke noe ekstremalpunkt for  $x = 0$ , selv om  $f'(x) = 0$ . Den deriverte skifter ikke tegn i dette punktet.

## 1.5 Globale ekstremalpunkter

I motsetning til de lokale egenskapene, som sier noe om funksjonen i en liten omegn om et punkt, vil de **globale egenskapene** beskrive funksjonen på hele definisjonsområdet sett under ett.

**Definisjon 1.5.1.** (Globale maksimums- og minimumspunkter)

- Funksjonen  $y = f(x)$  har et **globalt minimum** i  $x = c$  dersom  $f(c) \leq f(x)$  for alle  $x$  i definisjonsområdet.
- Funksjonen  $y = f(x)$  har et **globalt maksimum** i  $x = c$  dersom  $f(c) \geq f(x)$  for alle  $x$  i definisjonsområdet.

Vi vil omtale funksjonsverdien i de globale minimums- og maksimumspunktene som funksjonens **minimums- og maksimumsverdier** og samlet som funksjonenes **ekstremalverdier**.

Funksjoner trenger verken å ha lokale eller globale ekstremalpunkter. Et eksempel er funksjonen  $f(x) = x$  definert på hele tallinja. Den har ingen ekstremalpunkter fordi for alle punkter  $x = a$  på tallinja så vil det finnes punkter  $x$  i nærheten av  $a$  slik at  $f(x) > f(a)$  og andre som oppfyller  $f(x) < f(a)$ . Funksjonen  $f(x) = x$  har heller ingen ekstremalverdier dersom definisjonsområdet er et åpent intervall  $(a, b)$ . På et lukket intervall derimot, har funksjonen  $f(x) = x$  både et globalt maksimumspunkt og et globalt minimumspunkt, nemlig endepunktene i intervallet.

Et åpent intervall som  $(0, 1)$  inneholder ikke sine endepunkter. Vi kan finne tall i intervallet som er så nær opp til 1 som vi måtte ønske. Men uansett hvilket tall vi velger, vil det alltid finnes tall mellom det valgte tallet og 1. Alle tall i det åpne intervallet  $(0, 1)$  har andre tall på begge sider. Dette er karakteristisk for åpne intervaller. I det lukkede intervallet  $[0, 1]$  finnes det to tall, 0 og 1, som kjennetegnes ved at de har naboer i intervallet kun på sin ene side.

En kontinuerlig funksjon vil alltid oppnå sine ekstremalverdier dersom definisjonsområdet er et lukket intervall. Dette er innholdet i **ekstremalverdi-teoremet** som vi gjengir uten bevis.

**Teorem 1.5.2.** En funksjon  $f(x)$  som er kontinuerlig på et lukket, begrenset intervall  $[a, b]$ , vil oppnå sine maksimums- og minimums-verdier i intervallet.

**Eksempel 1.5.1.** La  $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ . Vi skal finne maksimumsverdien til  $f(x)$  på intervallet  $[-1, 1]$ .

Vi observerer at  $f'(x) = -2x + 4 = 0$  når  $x = 2$ . Men  $x = 2$  er ikke i intervallet, så dette punktet er vi ikke interessert i. Det betyr at det er ingen kritiske punkter i det indre av definisjonsområdet, og de eneste punktene vi trenger å sjekke er endepunktene:  $f(-1) = -8$  og

$f(1) = 0$ . Så den største verdien til  $f(x)$  på  $[-1, 1]$  er  $f(1) = 0$ .

**Eksempel 1.5.2.** Vi skal finne ekstremalverdiene til funksjonen  $f(x) = 7 + |x - 2|$  på intervallet  $1 \leq x \leq 4$ . Den deriverte  $f'(x) \neq 0$  for alle  $x$ . Men den er ikke definert i punktet  $x = 2$ , så vi regner ut verdien her,  $f(2) = 7$ . For endepunktene har vi  $f(1) = 8$  og  $f(4) = 9$ . Det minste av disse tre verdiene er  $f(2) = 7$ , som derfor er minimumsverdien, mens den største er  $f(4) = 9$  som gir oss maksimumsverdien på intervallet  $[-1, 4]$ .

**Eksempel 1.5.3.** Av alle rektangler med areal 25, og sidekanter kortere enn 10, hvilket har den minste og hvilket har den største omkretsen?

Vi starter med å formulere problemet mer matematisk. Vi lar  $x$  være lengden på den ene sidekanten. Da vil den andre sidekanten ha lengde  $\frac{25}{x}$  siden arealet skal være 25. Omkretsen blir da gitt ved funksjonen

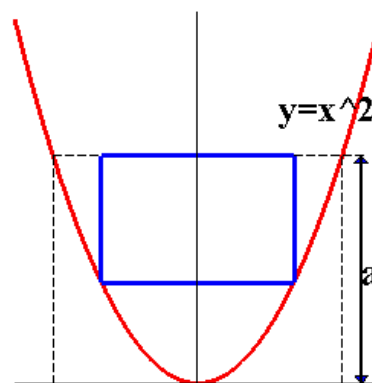
$$f(x) = 2x + 2 \cdot \frac{25}{x}$$

over intervallet  $(0, 10]$ . Denne funksjonen skal vi finne maksimumsverdien til. Vi deriverer og får

$$f'(x) = 2 - \frac{50}{x^2}$$

Løser vi likningen  $f'(x) = 0$  får vi  $x = \pm 5$ . Punktet  $x = -5$  er ikke med i definisjonsområdet, så det forkaster vi. Dermed står vi igjen med ett kritisk punkt,  $x = 5$ . Funksjonen er ikke definert i punktet  $x = 0$  (rektanglet kollapser) og vi må sjekke de to kritiske punktene  $x = 5$  og  $x = 10$ . Innsetting gir  $f(5) = 20$  og  $f(10) = 25$ . Dette gir kandidater for maksimum og minimum. Men vi er ikke ferdige enda. Siden definisjonsområdet ikke er lukket (men halvåpent) kan vi ikke bruke ekstremalverdisetningen, og vi må sjekke hva som skjer når  $x \rightarrow 0$ . Det er opplagt at omkretsen vil vokse over alle grenser når den ene sidekanten blir veldig liten, og den andre blir veldig stor. Derfor vil ikke  $f(10) = 25$  være noe globalt maksimum, men  $f(5) = 20$  er fortsatt minimumsverdien.

**Eksempel 1.5.4.** Vi skal finne det største rektangelet vi kan legge inne grafen til parabelen  $y = x^2$  når  $y$  skal være mindre enn en fast verdi  $a$ .



**Figur 1.8.** Rektangel i en parabel.

La  $A(x)$  være arealet av rektangelet med grunnlinje  $2x$  (begge sider av  $y$ -aksen). Høyden i rektangelet vil være  $a - x^2$ . Det gir areal  $A(x) = 2x(a - x^2) = 2xa - 2x^3$  hvor  $x$  ligger i intervallet  $[0, \sqrt{a}]$ . De kritiske punktene vil være endepunktene og punktene der  $A'(x) = 0$ . Den deriverte av  $A(x)$  er gitt ved

$$A'(x) = 2a - 6x^2$$

Setter vi denne lik 0 får vi  $x = \pm \sqrt{\frac{a}{3}}$ . Vi forkaster den negative løsningen siden den ikke er i definisjonsområdet. Innsetting gir  $A(0) = A(\sqrt{a}) = 0$  og  $A(\sqrt{\frac{a}{3}}) = (\frac{4}{9})\sqrt{3}a^{\frac{3}{2}}$ . Det gir minimumsareal (selvfølgelig) 0 og maksimumsareal  $(\frac{4}{9})\sqrt{3}a^{\frac{3}{2}}$ .

**Eksempel 1.5.5.** Vi ser på funksjonen

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad -1 \leq x \leq 3$$

For å finne ut hvor funksjonen vokser, hvor den avtar og hvor den har sine ekstremalpunkter, må vi se på dens deriverte. I dette tilfellet får vi

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = x(2 - x)e^{-x}$$

Denne informasjonen bruker vi til å tegne et fortegnsskjema for  $f'(x)$  (se figur 1.7). Skjemaet viser at funksjonen avtar på intervallene  $(-1, 0)$  og  $(2, 3)$  og vokser på intervallet  $(0, 2)$ . Den har lokale maksimumspunkter i  $x = -1$  og i  $x = 2$ , og lokale minimumspunkter for  $x = 0$  og for  $x = 3$ . For å finne ut hvilke punkter som gir oss de globale ekstremalverdiene regner vi ut funksjonsverdien i de lokale ekstremalpunktene, og i tillegg i endepunktene til det lukkede intervallet. Verdiene står i nederste linje. Av disse ser vi at  $x = -1$  gir den største verdien, altså et globalt maksimumspunkt og  $x = 0$  gir minste verdi og dermed svarer til et globalt minimumspunkt.

## 1.6 Krumning og vendepunkter

I dette avsnittet skal vi studere funksjonenes krumnings-egenskaper.

**Definisjon 1.6.1.** En deriverbar funksjon  $y = f(x)$  **krummer opp** (resp. **ned**) i et intervall  $(a, b)$  dersom  $f'(x)$  er voksende (resp. avtagende) i intervallet.

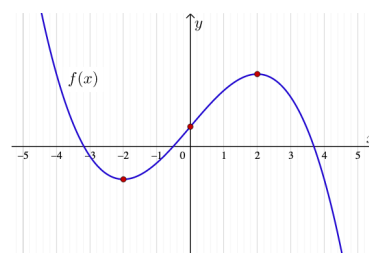
Krumning innebærer at stigningstallet til funksjonen endrer seg. Krumning oppover betyr at funksjonen blir brattere, som betyr at stigningstallet øker. Stigningstallet til funksjonen er gitt ved den deriverte, så økende stigningstall betyr at den deriverte av den deriverte er positiv. Den deriverte til den deriverte til en funksjon kalles den dobbelt-deriverte og vi skriver  $f''(x)$ .

**Teorem 1.6.2.** La  $f(x)$  være to ganger deriverbar på et intervall  $I$ , dvs. at den deriverte  $f'(x)$  også er deriverbar.

- i) Dersom  $f''(x) \geq 0$  på  $I$ , så krummer grafen oppover.
- ii) Dersom  $f''(x) \leq 0$  på  $I$ , så krummer grafen nedover.

*Bevis.* Bruk Teorem 1.2.3 på den deriverte. □

Vi kan bruke resultatet over til å bestemme type ekstremalpunkter for en funksjon  $f(x)$ . Dersom vi har et kritisk punkt  $x_0$  med  $f'(x_0) = 0$ , så positiv krumning betyr at vi har et minimumspunkt og negativ krumning betyr at vi har et maksimumspunkt. (se figur).



Dette leder oss fram til **andre-derivert-testen**.

**Teorem 1.6.3.** La  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  være en to ganger deriverbar funksjon på et intervall  $I$ . Anta at  $x_0 \in I$  er et kritisk punkt for  $f$ , dvs.  $f'(x_0) = 0$ . Da har vi

- i) Dersom  $f''(x_0) > 0$  så er  $x_0$  et lokalt minimumspunkt for  $f$ .
- ii) Dersom  $f''(x_0) < 0$  så er  $x_0$  et lokalt maksimumspunkt for  $f$ .

**Definisjon 1.6.4.** Et punkt  $x = c$  der funksjonen  $f(x)$  skifter krumning fra opp til ned eller motsatt, kalles et **vendepunkt** for  $f$ .

På samme måte som at ekstremalpunkter finnes der den deriverte skifter tegn, finner vi vendepunkter der den dobbelt-deriverte skifter tegn.

**Teorem 1.6.5.** Dersom  $x = c$  er et vendepunkt for  $f(x)$ , og  $f''(c)$  er veldefinert, så er  $f''(c) = 0$ .

*Bevis.* Et vendepunkt er et ekstremalpunkt for den deriverte, og Teorem 1.4.2 gir at  $x = c$  er et kritisk punkt for  $f'(x)$ . Siden den deriverte av  $f'(x)$  eksisterer i  $x = c$ , så følger det at  $f''(c) = 0$ . □

**Eksempel 1.6.1.** Funksjonen  $f(x) = x^3$  har et vendepunkt i  $x = 0$  siden  $f''(0) = 0$  og den dobbeltderiverte  $f''(x) = 6x$  skifter tegn i  $x = 0$ .

	-1	$-1 < x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$2 < x < 3$	3
$x$		-	0	+	+	+	
$2 - x$		+	+	+	0	-	
$e^{-x}$		+	+	+	+	+	
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
		↘	↘	↗	↘	↘	
$f(x)$	e		0		$\frac{4}{e^2}$		$\frac{9}{e^3}$

**Figur 1.7.** Fortegnsskjema for  $f'(x) = x(2 - x)e^{-x}$ .



Merk at vi kan ha  $f''(c) = 0$  uten at  $x = c$  er et vendepunkt, slik som tilfellet er for funksjonen  $f(x) = x^4$  i punktet  $x = 0$ . Den dobbelt-deriverte er gitt ved  $f''(x) = 12x^2$ . Den har et nullpunkt for  $x = 0$ , men  $f''(x) > 0$  for både positive og negative verdier for  $x$ . Den dobbelt-deriverte  $f''(x)$  skifter derfor ikke tegn i dette punktet, og  $x = 0$  er ikke noe vendepunkt.

**Eksempel 1.6.2.** Vi skal studere krumningsegenskapene til funksjonen

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 3$$

Vi regner ut den deriverte og den dobbelt-deriverte og finner deres nullpunkter. Dette bruker vi til å finne faktoriseringer:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x - 1)$$

$$f''(x) = 36x^2 - 24x = 12x(3x - 2)$$

For å finne monotoniegenskaper tegner vi fortegnsskjema for den deriverte:

	$x < 0$	$0$	$0 < x < 1$	$1$	$x > 1$
$12x^2$	+	$0$	+		+
$x - 1$	-		-	$0$	+
$f'(x)$	-	$0$	-	$0$	+
	↘		↘	↖	↗

Vi ser at  $x = 0$  er et kritisk punkt, men ikke noe ekstremalpunkt.

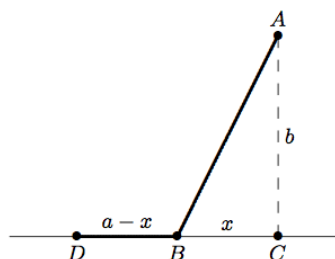
For å finne krumningsegenskapene tegner vi fortegnsskjema for den dobbelt-deriverte (se figur 1.9). Konklusjonen står i nederste linje.

I mange anvendelser betrakter vi størrelser som varierer med tiden. Et eksempel kan være en bil som kjører på en vei. Vi betegner avstanden bilen har kjørt fra et startpunkt ved funksjonen  $s(t)$ . Ved tiden  $t = 0$  setter vi  $s(0) = 0$ . Den deriverte til funksjonen  $s'(t)$  betegner farten til bilen ved tidspunktet  $t$ , mens den dobbelt-deriverte  $s''(t)$  gir et uttrykk for akselerasjonen til bilen.

Dersom  $s'(t) = 0$  står bilen stille, mens  $s''(t) = 0$  uttrykker at akselerasjonen er 0, eller at bilen beveger seg med konstant fart.

Et annet eksempl kan være en kjemisk reaksjon. Vi lar  $c(t)$  betegne konsentrasjonen av sluttproduktet i reaksjonen. Så lenge reaksjonen pågår har vi  $c'(t) > 0$ . Dersom reaksjonen eskalerer (går fortere) vil også  $c''(t) > 0$ . Ved et vendepunkt  $c''(t) = 0$  vil reaksjonshastigheten ha stabilisert seg, reaksjonen pågår fortsatt, men den går saktere. Til slutt har vi  $c'(t) = 0$ , som betyr at reaksjonen har stoppet opp.

**Eksempel 1.6.3.** Anta at vi skal gå til et punkt A ute i sanden og at vi befinner oss ved punktet D på veien illustrert ved linja DC (se figuren). Veien er rett og b gir avstanden fra A til det nærmeste punktet C på veien. Avstanden fra punktet D til punktet C kaller vi  $a$ . Anta at vi kan holde farten  $v$  langs veien og  $w < v$  ute i sanden. Hvor langt skal vi gå langs veien før vi svinger ut i sanden for å bruke kortest mulig tid mellom D og A?



Vi kaller punktet hvor vi svinger ut i sanden for B og lar avstanden fra B til C være  $x$ . Det betyr at vi beveger oss en avstand  $a - x$  langs veien, og ved Pythagoras vil avstanden fra B til A være  $\sqrt{x^2 + b^2}$ . Tid er gitt ved avstand delt med fart, og vi får samlet tid gitt ved funksjonen

$$f(x) = \frac{a - x}{v} + \frac{\sqrt{x^2 + b^2}}{w}$$

Vi skal finne minimum av  $f(x)$  når  $x$  ligger mellom 0 og

	$x < 0$	$0$	$0 < x < \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$x > \frac{2}{3}$
$12x$	-	$0$	+	+	+
$3x - 2$	-	-	-	$0$	+
$f''(x)$	+	$0$	-	$0$	+
	opp	vendepunkt	ned	vendepunkt	opp

Figur 1.9. Fortegnsskjema for  $f''(x) = 12x(3x - 2)$ .

a. Vi setter  $f'(x) = 0$  og får

$$0 = f'(x) = -\frac{1}{v} + \frac{x}{w\sqrt{x^2 + b^2}}$$

Det gir

$$w\sqrt{x^2 + b^2} = vx$$

Vi kvadrerer begge sider og får

$$w^2(x^2 + b^2) = v^2x^2$$

som ved litt enkel algebra gir

$$x = \frac{wb}{\sqrt{v^2 - x^2}}$$

Dette gir oss det kritiske punktet vi leter etter og (nokså opplagt) minimumspunktet.

Vi merker oss at  $a$  ikke inngår i dette uttrykket, noe som betyr at vi alltid skal gå til det samme punktet, uavhengig av utgangspunkt, men under en forutsetning, at det kritiske punktet ligger inne i intervallet  $[0, a]$ . Dersom dette ikke er tilfelle har vi ikke noe kritisk punkt inne i intervallet, og da vil minimumsverdien bli å finne i et av endepunktene. De to verdiene der er gitt ved

$$f(0) = \frac{a}{v} + \frac{b}{w}$$

$$f(a) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{w}$$

Nå har vi

$$\begin{aligned} f(a)^2 - f(0)^2 &= \frac{a^2}{v^2} + \frac{2ab}{vw} + \frac{b^2}{w^2} - \frac{a^2 + b^2}{w^2} \\ &= \frac{a^2}{v^2} + \frac{2ab}{vw} - \frac{a^2}{w^2} \\ &= a^2\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{w^2}\right) + \frac{2ab}{vw} \\ &= \frac{a^2(w^2 - v^2) - 2abvw}{v^2w^2} \end{aligned}$$

Siden  $w < v$  vil dette uttrykket alltid være negativt, noe som betyr at  $f(0) > f(a)$  og minimum vil være i  $x = a$ . Oppsummert, vi skal alltid gå langs veien til et punkt som ligger i avstand  $\frac{wb}{\sqrt{v^2 - x^2}}$  fra  $C$ , og deretter gjennom sanden. Dersom vi starter nærmere  $C$  enn denne avstanden skal vi gå rett ut gjennom sanden.

## 1.7 L'Hôpitals regel

Anta at vi skal regne ut en grenseverdi  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  der enten  $f(x)$  og  $g(x)$  begge går mot 0 eller begge går mot  $\infty$ . Da finnes det ikke noen generell regel for hva grenseverdien blir, men det finnes en metode som ofte hjelper oss å finne svaret. Den heter **L'Hôpitals regel** etter den franske matematikeren og adelsmannen Guillaume Francois Antoine, marquis de L'Hôpital (1661-1704).

**Teorem 1.7.1** (L'Hôpitals regel). Anta at enten

$$(i) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

eller

$$(ii) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

Da er

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

forutsatt at den siste grensen eksisterer (den kan godt være  $\infty$  eller  $-\infty$ ).

L'Hôpitals regel finner altså ikke grenseverdien for oss, men fører oss videre til en annen grenseverdi som ofte er lettere å regne ut. Noen eksempler vil gjøre dette klarere.

**Eksempel 1.7.1.** Regn ut

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x}$$

Her går både teller og nevner mot 0 (vi sier gjerne at vi har et " $\frac{0}{0}$ "-uttrykk), og vi kan bruke L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{1} = \frac{-1}{1} = -1$$

Legg merke til at vi i den andre grenseverdien  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{1}$  ikke har et " $\frac{0}{0}$ "-uttrykk og derfor bare kan sette inn  $x = 0$ .

**Eksempel 1.7.2.** Regn ut

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x}$$

Her går både teller og nevner mot  $\infty$  (vi sier gjerne at vi har et " $\frac{\infty}{\infty}$ "-uttrykk), og vi kan igjen bruke L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = \infty$$

(husk at L'Hôpitals regel også virker når grenseverdien er uendelig).

Det er ikke uvanlig at man må bruke L'Hôpitals regel flere ganger for å komme frem til svaret.

**Eksempel 1.7.3.** Regn ut

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

Vi bruker L'Hôpitals regel to ganger:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} \stackrel{L'H}{=} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

Når vi bruker L'Hôpitals regel flere ganger etter hverandre på denne måten, må vi huske på å sjekke at vi virkelig har et " $\frac{0}{0}$ "- eller " $\frac{\infty}{\infty}$ "-uttrykk hver gang vi bruker regelen.

Ofte kan vi omdanne andre typer uttrykk til " $\frac{0}{0}$ "- eller " $\frac{\infty}{\infty}$ "-uttrykk og så bruke L'Hôpitals regel til å finne grenseverdien. Her er et typisk eksempel:

**Eksempel 1.7.4.** Regn ut

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x|$$

I dette uttrykket går den ene faktoren,  $x$ , mot 0 mens den andre,  $\ln |x|$ , går mot  $-\infty$ , og det er ikke lett å se hvem som "vinner". Omformer vi uttrykket til  $\frac{\ln |x|}{\frac{1}{x}}$ , får vi imidlertid et " $\frac{\infty}{\infty}$ "-uttrykk vi kan bruke L'Hôpitals regel på (strengt tatt er det et " $\frac{-\infty}{\infty}$ "-uttrykk, men regelen virker like godt på det). Dermed får vi

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |x|}{\frac{1}{x}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

Hvis vi nå ganger med  $-x^2$  over og under brøkstreken, ser vi at

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

Det kan være nyttig å vite at L'Hôpitals regel også gjelder for ensidige grenser, dvs. for uttrykk av typen  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$  og  $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)}$  (hadde vi ikke hatt tallverdien i Eksempel 1.7.4, måtte vi ha nøyd oss med å regne ut den ensidige grensen  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$  siden  $\ln x$  bare er definert for  $x > 0$ ).

Vi har ikke redskaper til å bevise L'Hôpitals regel i dette kurset, men vi kan vise en forenklet versjon som

sier at hvis  $f(a) = g(a) = 0$  og brøken  $\frac{f'(a)}{g'(a)}$  eksisterer, så er  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$ . Dette er bare et smart regnestykke der vi utnytter definisjonen av den deriverte:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Beviset for den fulle regelen er en litt mer sofistikert versjon av den samme ideen.

## Oppgaver

**Oppgave 1.** Regn ut den deriverte av funksjonene.

- a)  $f(x) = x^2 + x$
- b)  $f(x) = 3x^4 - 4x^3$
- c)  $f(x) = x + \sin x$
- d)  $f(x) = e^{2x}$
- e)  $f(x) = e^x \cos x$
- f)  $f(x) = \frac{x}{1+x}$
- g)  $f(x) = x \ln x$
- h)  $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

**Oppgave 2.** Avgjør hvor funksjonen  $f(x) = x^3 + 1$  vokser og hvor den (eventuelt) avtar. Finn de kritiske punktene til funksjonen. Er de ekstremalpunkter for funksjonen?

**Oppgave 3.** Betrakt funksjonen

$$g(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

definert på det åpne intervallet  $(0, \frac{\pi}{2})$ . Vis at funksjonen er strengt voksende i hele sitt definisjonsområde.

**Oppgave 4.** Vis at funksjonen  $f(x) = \frac{1}{x}$  definert på intervallet  $(0, \infty)$  ikke har noen ekstremalpunkter.

**Oppgave 5.** Finn de kritiske punktene til funksjonen  $f(x) = \cos 2x$ . Hvilke av dem er lokale maksimumspunkter og hvilke er lokale minimumspunkter?

**Oppgave 6.** Finn de kritiske punktene, bestem monotoni-egenskapene og finn de lokale ekstremalpunktene for funksjonene  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ,  $g(x) = (x-1)^2(x+2)$  og  $h(x) = x + \frac{1}{x^2}$ , alle definert over hele  $\mathbb{R}$ .

**Oppgave 7.** I de følgende oppgavene, i) finn alle kritiske punkter til  $f(x)$ , ii) beskriv monotoni-egenskapene til funksjonene ved å se på fortegnet til  $f'(x)$ , iii) finn lokale ekstremalpunkter, iv) bestem de intervallene der funksjonene krummer, henholdsvis opp og ned, v) finn funksjonenes vendepunkter, vi) finn globale maks og min

- a)  $f(x) = x^3 - 4x$ ,  $x \in [-1, 2]$
- b)  $f(x) = \frac{(x^2-4)}{(x^2-9)}$ ,  $x \in [0, 2]$

c)  $f(x) = x - \sin x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$

d)  $f(x) = \sin^2 x$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$

**Oppgave 8.** La funksjonen  $f$  være definert for alle reelle tall  $x$  ved

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}(x-a)^2}$$

hvor  $a$  er en konstant.

- a) Avgjør hvor  $f$  vokser og hvor den avtar. Finn eventuelle ekstremalpunkter for  $f$ .
- b) Finn eventuelle vendepunkter for  $f$  og undersøk hvor grafen til  $f$  krummer opp og hvor den krummer ned.

**Oppgave 9.** Funksjonen  $f(t)$  er gitt ved

$$f(t) = t \ln t - t, \quad \frac{1}{4} \leq t \leq 3$$

Avgjør hvor funksjonen  $f$  vokser og hvor den avtar og finn ut hvor i definisjonsområdet den antar sin største/minste verdi.

**Oppgave 10.** Finn dimensjonene til rektangelet med størst areal når omkretsen er gitt lik 100.

**Oppgave 11.** Du har 60 meter gjerde til rådighet og skal bruke det til å gjerde inn et rektangel langs med en rett fjellside (hvor du ikke trenger å sette opp gjerde). Hva er det største arealet du kan gjerde inn?

**Oppgave 12.** Et budfirma har følgende begrensning på hvilke rektangulære pakker de kan levere: Summen av lengden og omkretsen må ikke overstige 108cm. Anta at du skal sende en pakke som er kvadratisk i den ene enden. Hva er det maksimale volumet til en akseptabel (for budfirmaet) pakke?

**Oppgave 13.** Et firma produserer små notisblokker med festlige motiv på forsiden. Dersom prisen for hver blokk er 10 kroner vil firmaet ikke få solgt noen, men for hver krone de reduserer prisen vil de kunne selge 500 blokker. De faste kostnadene ved produksjonen (uavhengig av antall) er kr. 3000, og produksjonsprisen pr. blokk er 2 kroner. Hva bør prisen være for at firmaet skal tjene mest mulig på blokkene?

**Oppgave 14.** Van der Waals gass-likning har formen

$$(P + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$$

hvor  $P$  er trykket,  $V$  er volumet og  $T$  er temperetaturen i gassen, og  $a$ ,  $b$  og  $R$  er konstanter. Vi kan omskrive denne slik at trykket uttrykkes som en funksjon av volumet,

$$P(V) = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

Vis at  $V = 3b$  er et kritisk punkt for denne funksjonen når vi setter  $T = \frac{8a}{27Rb}$ .

**Oppgave 15.** La  $f$  være funksjonen gitt ved

$$f(x) = x\sqrt{8-x^2}, \quad -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$$

- Finn alle kritiske punkter for funksjonen  $f$ .
- Bestem hvor funksjonen vokser og hvor den avtar, og finn maksimums- og minimumspunktene til  $f$ .

**Oppgave 16.** Bruk L'Hôpitals regel til å vise at disse grensene er riktige:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{2x}-1} = \frac{1}{2}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} = \frac{1}{2}$ .
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$ .
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi} = -\frac{1}{2}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln |x| = 0$ .
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = 0$ .

## Kapittel 2

# Integrasjon

Matematiske modeller som beskriver naturvitenskapelige fenomener er i mange tilfeller ensbetydende med å gi en eller flere differensiallikninger. Differensiallikninger er likninger som knytter sammen funksjoner og deres deriverte. Siden den deriverte uttrykker endring av funksjonen, vil en differensiallikning gi oss en formel som knytter sammen funksjonsverdien og endringen av funksjonen i et bestemt punkt. Et typisk eksempel på dette er størrelsen på en populasjon som opplever konstant vekst. Tilveksten til populasjonen er proporsjonal med størrelsen på populasjonen, dobler vi populasjonen, dobler vi antall fødsler. Den **matematiske modellen** som beskriver dette fenomenet er gitt ved en funksjon  $f(t)$  (der  $t$  er tid) som oppfyller

$$f'(t) = k \cdot f(t)$$

For å løse differensiallikninger er utfordringen veldig ofte å finne funksjoner med en gitt derivert, dvs. det vi kaller anti-derivasjon. Et eksempel på dette er hastighet og akselerasjon. Akselerasjon er definert som endring av hastighet, og måles med den deriverte av hastighetsfunksjonen. Akselerasjonen til et legeme er styrt av kraftlover som vi tenker oss at vi kjenner fullt ut, og oppgaven blir å finne en hastighetsfunksjon med en derivert funksjon som passer med den aktuelle kraftloven. Dette kalles å anti-derivere funksjonen eller ubestemt integrasjon.

I dette kapitlet skal vi studere **ubestemte og bestemte integral**. Ubestemte integral er det samme som anti-derivasjon, mens bestemte integral beregnes ved å evaluere ubestemte integral over et intervall slik at svaret blir et tall og ikke en funksjon. Dette tallet kan vi for en positiv funksjon tolke som arealet mellom grafen og  $x$ -aksen, eller i mer generelle tilfeller som den akkumulerte verdien for en funksjon over et tidsrom, strekning eller annet valg av argumentet  $x$  (eller  $t$ ). Det bestemte integralet

til en funksjon som beskriver et legemes akselerasjon som funksjon av tiden, vil gi oss hastighetsendringen til legemet i det aktuelle intervallet.

Et svært viktig resultatet er fundamentalteoremet (introdusert av Newton og Leibniz) som knytter sammen derivasjon og integrasjon.

Når vi har gitt en funksjon, kan vi alltid regne ut dens deriverte, men det er ikke nødvendigvis mulig å finne et enkelt uttrykk for den anti-deriverte til funksjonen. Vi skal se på hvordan vi kan bruke numeriske beregninger til å bestemme verdien av et bestemt integral når vi ikke kan finne en anti-derivert til den aktuelle funksjonen. Videre skal vi ta for oss noen ulike fysiske tolkninger av det bestemte integral.

Det er ikke alltid at definisjonsområdet til en funksjon er et lukket intervall og da må vi gjøre noen modifikasjoner mht. definisjonen av det bestemte integralet. Det er heller ikke alltid slik at funksjonen vi skal integrere er begrenset, men vi kan likevel regne ut et areal under grafen. Dette vil involvere bruk av grenseverdier.

## 2.1 Ubestemt integrasjon

Vi starter med å gi en kort innføring i regnereglerne for anti-derivasjon. Disse reglene framkommer i stor grad ved å se på tilsvarende regneregler for derivasjon, og bruke dem baklengs.

**Definisjon 2.1.1.** Dersom  $F(x)$  er en funksjon med derivert lik  $F'(x) = f(x)$ , så sier vi at  $F(x)$  er en anti-derivert av  $f(x)$ , og vi skriver

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Familien  $F(x) + C$  for varierende konstanter  $C$  kalles det **ubestemte integralet** av funksjonen  $f$ .

I formelen over inngår det et uttrykk  $dx$ . Dette kalles et differensial og har en viktig betydning. For å gjøre det enkelt kan vi tenke på differensialet som en angivelse av hvilken variabel vi anti-derivere med hensyn på.

Bakgrunnen for leddet  $C$  på høyre side i formelen er som følger: Det er enkelt å vise at den deriverte av en konstant er 0, men det motsatte er også tilfellet. Dermed vil alle konstante funksjoner være anti-deriverte av 0-funksjonen, og for kompletthets skyld tar vi derfor med denne konstanten.

**Lemma 2.1.2.** *Dersom en funksjon  $f(x)$  oppfyller  $f'(x) = 0$  for alle  $x$  i et intervall, så er funksjonen konstant,  $f(x) = C$  i intervallet.*

*Bevis.* Anta for en motsigelse at funksjonen  $f$  ikke er konstant, og at  $a \neq b$  er to punkter slik at  $f(a) \neq f(b)$ . Betrakt funksjonen

$$h(x) = f(x)(b - a) - x(f(b) - f(a))$$

Vi har  $h(a) = h(b)$ . Dersom  $h'(x) \neq 0$  overalt i  $(a, b)$ , så må  $h$  ha sine ekstremalpunkter i endepunktene. Siden verdien av  $h(x)$  er lik i endepunktene, betyr det at funksjonen er konstant på  $[a, b]$ , noe som betyr at for alle punkter  $c \in [a, b]$  så er  $h'(c) = 0$ . Det følger at  $f'(c)(b - a) = c(f(b) - f(a))$ . Siden vi kan anta at  $c \neq 0$  og  $f(b) - f(a) \neq 0$  betyr det at  $f'(c) \neq 0$ , som gir en motsigelse mot antagelsen at  $f$  ikke er konstant, og vi har vist lemmaet.  $\square$

**Teorem 2.1.3.** *Dersom  $F_1(x)$  og  $F_2(x)$  begge er anti-deriverte til samme funksjon  $f$  på et intervall  $I$ , så er de like på en konstant nær, dvs.  $F_1(x) - F_2(x) = C$ .*

*Bevis.* Vi vet fra lemmaet over at dersom funksjonen  $f$  oppfyller  $f'(x) = 0$  for alle  $x$ , så er funksjonen konstant. Lar vi  $f(x) = F_1(x) - F_2(x)$  og bruker denne kunnskapen, så følger resultatet.  $\square$

Dette er den formelle grunnen til at vi alltid må legge til en konstant når vi anti-derivere. Vi kaller denne konstanten for en **integrasjonskonstant**.

**Eksempel 2.1.1.** *Vi skal finne det ubestemte integralet av en funksjon som allerede er den deriverte av en annen funksjon. Så la*

$$f(x) = F'(x)$$

*En anti-derivert av en funksjon er en ny funksjon som har den første funksjonen som sin deriverte, og i dette tilfellet er det naturlig å bruke  $F(x)$ . Det gir*

$$\int F'(x) dx = F(x) + C$$

Eksemplet illustrerer et viktig resultat, formulert i **fundamentalteoremet for differensial- og integralregningen**. Det sier at derivasjon og integrasjon er omvendte operasjoner. Vi kommer tilbake til dette senere.

Det finnes mange gode regneregler for ubestemt integrasjon, og vi skal presentere de viktigste.

I likhet med derivasjon er anti-derivasjon en lineær operasjon. Det innebærer at vi har de to formelene

$$\int (f(x) + g(x))x = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

og

$$\int af(x)x = a \int f(x) dx$$

for funksjoner  $f(x)$  og  $g(x)$ , og reelle tall  $a \in \mathbb{R}$ . Dermed kan vi alltid anti-derivere ledd for ledd;

**Eksempel 2.1.2.** *Vi har*

$$\int x^2 + 2x dx = \int x^2 dx + 2 \int x dx$$

Videre har vi en del *spesielle* integrasjonsregler:

**Eksempel 2.1.3.** *Det ubestemte integralet av potensfunksjonen er gitt ved*

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad n \neq -1$$

**Eksempel 2.1.4.** *For det spesielle tilfellet der  $n = -1$  har vi*

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

**Eksempel 2.1.5.** *Det ubestemte integralet av eksponentialfunksjonen er gitt ved*

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

**Eksempel 2.1.6.** *Det ubestemte integralet av de trigonometriske funksjonene er gitt ved*

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

og

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

I tillegg til de spesielle integrasjonsreglene har vi mer generelle integrasjonsregler. Den første bygger på formelen for derivasjon av et produkt av to funksjoner og kalles **delvis integrasjon**. Produktregelen sier at

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Dersom vi flytter litt rundt på leddene og integrerer begge sider av likhetstegnet, får vi

$$\begin{aligned}\int f'(x)g(x) dx &= \int (f(x)g(x))' dx - \int f(x)g'(x) dx \\ &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx\end{aligned}$$

siden derivasjon og integrasjon er omvendte operasjoner, dvs.

$$\int f'(x) dx = f(x) + C$$

Dette viser seg å være en nyttig regel, og vi skal se på et eksempel på hvordan vi bruker den:

**Eksempel 2.1.7.** Vi skal regne ut det ubestemte integralet av funksjonen  $x \sin x$ . Vi lar  $f'(x) = \sin x$  og  $g(x) = x$  i formelen over. Da får vi at  $f(x) = -\cos x$  (Vi trenger ikke å ta med integrasjonskonstanten  $C$  ennå). Setter vi dette inn i formelen får vi

$$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int (-\cos x \cdot 1) dx$$

$g = x$	$f' = \sin x$
$g' = 1$	$f = -\cos x$

$$\begin{aligned}&= -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

Ved siste integrasjon tar vi med en integrasjonskonstant.

**Eksempel 2.1.8.** Det ubestemte integralet av funksjonen  $f(x) = \ln x$  er gitt ved

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

siden den deriverte av  $x \ln x - x + C$  med hensyn på  $x$  ved produktregelen er  $\ln x + x \frac{1}{x} - 1 = \ln x$ .

Men vi kan også se dette ved å bruke delvis integrasjon. I så fall setter vi  $f'(x) = 1$  og  $g(x) = \ln x$ . (Dette er et lite triks, siden det på ingen måte er noe opplagt

at man skal betrakte  $\ln x$  som  $1 \cdot \ln x$ .) Dette gir

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx$$

$g = \ln x$	$f' = 1$
$g' = \frac{1}{x}$	$f = x$

$$\begin{aligned}&= x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - x + C\end{aligned}$$

En annen generell regneregul er **substitusjon**. Substitusjon baserer seg på baklengs bruk av kjerneregelen. Kjerneregelen sier noe om den deriverte til en sammensatt funksjon:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

og regelen gir da at

$$\begin{aligned}\int f'(g(x)) \cdot g'(x) dx &= \int (f(g(x)))' dx \\ &= f(g(x)) + C\end{aligned}$$

For å bruke denne regneregelen baklengs må vi identifisere de to leddene på høyre side av formelen med faktorer i den oppgitte integranden.

**Eksempel 2.1.9.** Vi skal integrere funksjonen  $f(x) = 2x(x^2 + 1)^3$ . Hvis vi setter  $y = g(x) = x^2 + 1$  og  $h(x) = \frac{1}{4}x^4$ , så ser vi at

$$h(g(x)) = h(y) = \frac{1}{4}y^4 = \frac{1}{4}(x^2 + 1)^4$$

Det gir at  $h'(y) = y^3$  og dermed  $h'(g(x)) = (x^2 + 1)^3$ . Videre har vi  $g'(x) = 2x$ . Dermed følger det at

$$\begin{aligned}\int 2x(x^2 + 1)^3 dx &= \int h'(g(x))g'(x) dx \\ &= \int (h(g(x)))' dx \\ &= h(g(x)) + C \\ &= \frac{1}{4}(x^2 + 1)^4 + C\end{aligned}$$

**Eksempel 2.1.10.** Et annet eksempel på bruk av substitusjon er integralet:

$$\int \frac{1}{x-a} dx$$



hvor  $a$  er et reelt tall. Vi setter  $u = x - a$ , som gir  $du = dx$  og derfor

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \int \frac{1}{u} du = \log|u| + C = \log|x-a| + C$$

**Eksempel 2.1.11.** Vi kan kombinere eksemplet over med polynomdivisjon. Vi har

$$\frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x-1} = x^2 + 3x + 2 + \frac{3}{x-1}$$

og derfor

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x-1} dx &= \int x^2 + 3x + 2 + \frac{3}{x-1} dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 3 \log|x-1| + C \end{aligned}$$

Dette eksempelet gir oss en generell formel for integraler av brøker der nevneren er et lineært uttrykk. Der som nevneren er et produkt av lineære faktorer må vi gjøre et forarbeid før vi kan bruke denne metoden. Forarbeidet kalles gjerne for **delbrøkkoppstilling**. Metoden baserer seg på at vi alltid kan splitte en brøk  $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$  i to brøker med lineær nevner. Vi skal illustrere dette med et eksempel.

Vi ønsker å skrive

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

for noen passende tall  $A$  og  $B$ . Vi setter høyresiden på felles brøkstrek og får

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

Hvis de to brøkene med den samme nevneren skal være like, må også tellerene være like. Det betyr at vi må ha  $1 = Ax - A + Bx + 2B = (A+B)x - (A-2B)$ , som betyr at  $A+B=0$  og  $-(A-2B)=1$  eller  $A=-\frac{1}{3}$  og  $B=\frac{1}{3}$ . Dermed får vi

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx &= \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} \right) + C \\ &= \frac{1}{3} (-\log|x-1| + \log|x+2|) + C \\ &= \frac{1}{3} \left( \log \left| \frac{x+2}{x-1} \right| \right) + C \end{aligned}$$

Vi kan skrive opp den generelle formelen;

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{b-a} \left( -\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} \right)$$

som gir

$$\int \frac{1}{(x-a)(x-b)} dx = \frac{1}{b-a} \left( \log \left| \frac{x-b}{x-a} \right| \right) + C$$

Vi skal komme tilbake til flere eksempler på bruk av disse regnereglene.

## 2.2 Bestemt integrasjon

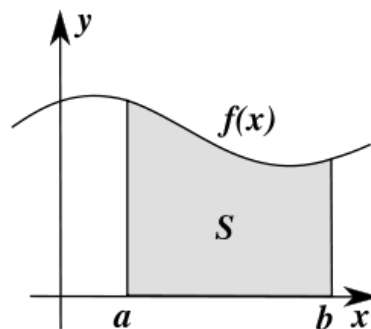
Fra ubestemte integraler går vi over til bestemte integraler. Selv om begrepene har omtrent samme navn og veldig lik notasjon så har de svært forskjellig definisjon. Men vi skal se at selv om definisjonene er forskjellige, så er begrepene likevel nær beslektet.

Vi starter med å definere det bestemte integralet av en positiv funksjon over et intervall.

**Definisjon 2.2.1.** La  $y = f(x)$  være en positiv funksjon definert på et intervall  $[a, b]$ . Da er

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

definert som arealet over intervallet  $[a, b]$  mellom  $x$ -aksen og grafen til  $f$ .



**Figur 2.1.** Bestemt integral tolket som areal.

Man kan vise at følgende generelle regler gjelder for bestemte integral:

Linearitet ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ):

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx \\ = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

Additivitet av definisjonsområde:

$$([a, c] = [a, b] \cup [b, c])$$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Degenerert areal:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

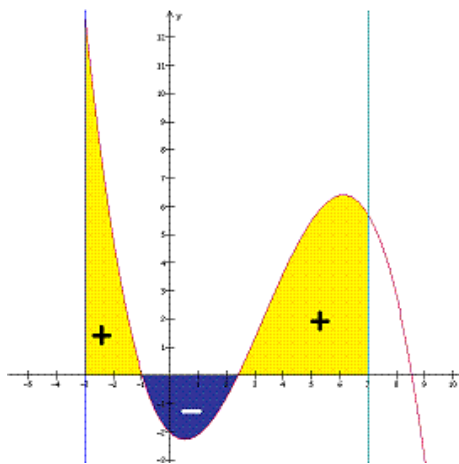
De to siste er nokså opplagte ut i fra definisjonen, mens den første følger fra et tilsvarende resultat for ubestemte integral. I tillegg til disse tre definerer vi et bestemt integral beregnet i motsatt retning,

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

For å beregne det bestemte integralet til en vilkårlig funksjon (ikke kun positiv), deler vi opp intervallet i delintervaller slik at funksjonen enten er positiv eller negativ på delintervallene. For en negativ funksjon  $g(x) < 0$  setter vi

$$\int_a^b g(x)dx = - \int_a^b (-g(x))dx$$

hvor  $-g(x)$  nå er en positiv funksjon.



**Figur 2.2.** Integralet er summen av arealene med positivt tegn over x-aksen og negativt tegn under.

**Eksempel 2.2.1.** Vi skal beregne det bestemte integralet

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx$$

Siden  $\sin x$  er positiv på intervallet  $[0, \pi]$  og negativ på intervallet  $[\pi, 2\pi]$ , så deler vi opp integralet i to deler

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx$$

Vi vet at  $\sin x = -\sin(x - \pi)$ . Det betyr at for hver  $x$  mellom  $\pi$  og  $2\pi$  så finnes en  $u = x - \pi$  mellom 0 og  $\pi$  hvor funksjonen  $\sin x$  har akkurat samme verdi, men med motsatt fortegn. Dermed vil arealet mellom grafen og x-aksen for de to delene være nøyaktig likt, men med motsatt fortegn. Til sammen vil derfor integralet bli nullt ut og vi har

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$$

## 2.3 Fundamentalteoremet

Neste skritt er å finne metoder for å beregne bestemte integral. Det viktigste hjelpemiddelet vil være det såkalte fundamentalteoremet for differensial- og integralregningen. Dette resultatet setter i system det vi har sagt så langt om derivasjon og anti-derivasjon og gir oss linken mellom ubestemt og bestemt integrasjon.

**Teorem 2.3.1.** La  $f(x)$  være en kontinuerlig funksjon på et intervall  $[a, b]$ , og la  $F(x)$  være en anti-derivert til  $f(x)$ . Da har vi

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

og

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

**Merk:** Dette er den mest fundamentale egenskapen ved integralet og faktisk den egenskapen som er grunnlaget for hele differensial- og integralregningen.

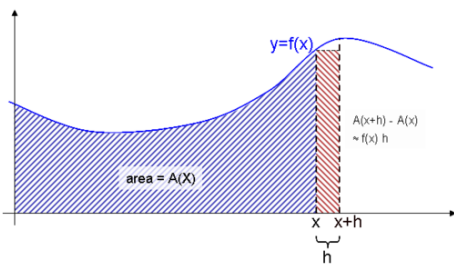
Merk også at vi bruker notasjonen

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

I tillegg har vi her introdusert den ofte hensiktsmessige notasjonen

$$\frac{d}{dx} g(x) = g'(x)$$

Begge deler vil bli brukt i det som følger.



**Figur 2.3.** Fundamentalteoremet for differensial- og integralregningen.

Figuren illustrerer fundamentalteoremet. Vi lar  $A(x)$  være arealet under grafen fra  $x = 0$  og ut til en vilkårlig  $x$ . Den relative tilveksten fra  $x$  til  $x + h$  er gitt ved (se figur)

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx \frac{f(x) \cdot h}{h} = f(x)$$

hvor uttrykkene har samme grenseverdi når  $h \rightarrow 0$ . Den deriverte av det bestemte integralet som arealfunksjon er altså funksjonen selv.

Ved å kombinere fundamentalteoremet med regne-reglene for ubestemte integral får vi følgende liste over spesielle integrasjonsregler for bestemt integrasjon:

$$\begin{aligned} \int_a^b x^k dx &= \frac{1}{k+1} (b^{k+1} - a^{k+1}) \\ \int_a^b \frac{1}{x} dx &= \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a} \\ \int_a^b e^{kx} dx &= \frac{1}{k} (e^{kb} - e^{ka}) \\ \int_a^b \sin x dx &= -\cos b + \cos a \\ \int_a^b \cos x dx &= \sin b - \sin a \end{aligned}$$

**Eksempel 2.3.1.** Vi kan bruke dette til å beregne integralet av  $\sin x$  over intervallet  $0 \leq x \leq 2\pi$  som vi har sett på tidligere.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin x dx &= [-\cos x]_0^{2\pi} \\ &= -\cos(2\pi) + \cos 0 \\ &= -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Når vi beregner et bestemt integral trenger vi ikke å bry oss om integrasjonskonstanten. Grunnen er at

dersom  $F(x)$  er en anti-derivert til funksjonen  $f$ , og vi velger en annen anti-derivert  $F(x) + C$ , så vil

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= [F(x) + C]_a^b \\ &= F(b) + C - (F(a) + C) \\ &= F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \end{aligned}$$

så svaret blir det samme.

I tillegg til de spesielle integrasjonsreglene har vi de generelle integrasjonsteknikkene, substitusjon og delvis integrasjon. Disse er helt analoge med tilsvarende teknikker for å regne ut ubestemte integral.

Substitusjon, hvor vi setter  $y = g(x)$ ,  $dy = g'(x) dx$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(g(x))g'(x)dx &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) \end{aligned}$$

og hvor  $F(x)$  er en anti-derivert til  $f(x)$ , og delvis integrasjon

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Når vi regner ut bestemte integraler ved substitusjon er det viktig å være påpasselig med integrasjonsgrensene, vi sier gjerne at når vi substituerer så må vi **skifte grenser**.

Det generelle oppsettet er som følger: Vi skal integre-re en sammensatt funksjon  $f(x) = h(g(x)) \cdot g'(x)$  over intervallet  $[a, b]$ . Vi setter  $u = g(x)$  og  $du = g'(x) dx$  og får da

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b h(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} h(u) du$$

Grensene følger på denne måten variablene;  $x = a$  gir  $u = g(x) = g(a)$ . Vi skal se på et eksempel.

**Eksempel 2.3.2.** Vi skal beregne det bestemte integralet

$$\int_0^1 2x(x^2 + 1)^3 dx$$

og bruker substitusjonen  $u = (x^2 + 1)$ , som gir  $du = 2x dx$  og nye grenser  $u(0) = 1$  og  $u(1) = 2$ . Dermed får vi

$$\int_0^1 2x(x^2 + 1)^3 dx = \int_1^2 u^3 du = \left[ \frac{1}{4} u^4 \right]_1^2 = \frac{15}{4}$$

**Eksempel 2.3.3.** Vi skal beregne det bestemte integralet

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx$$

Vi bruker delvis integrasjon

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx = [u \cdot v]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u' \cdot v dx$$

$u = x$	$v' = \cos x$
$u' = 1$	$v = \sin x$

$$= [x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin x dx$$

$$= [x \sin x + \cos x]_0^{\pi}$$

$$= \pi \sin \pi + \cos \pi - 0 - \cos 0 = -2$$

**Eksempel 2.3.4.** Vi skal beregne det bestemte integralet

$$\int_0^2 x e^{x^2} dx$$

Vi bruker substitusjon

$$\int_0^2 x e^{x^2} dx = \int_0^2 \frac{1}{2} e^{x^2} 2x dx$$

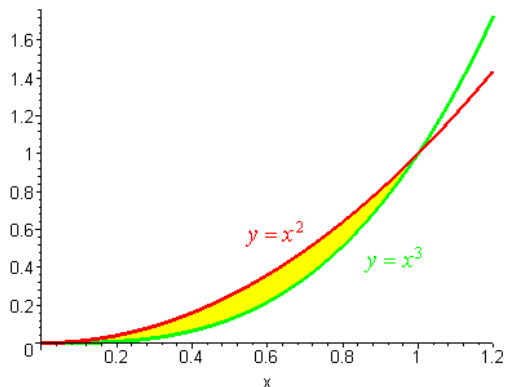
$u = x^2$	$du = 2x dx$
$x = 0$ gir $u = 0$	$x = 2$ gir $u = 4$

$$= \int_0^4 \frac{1}{2} e^u du$$

$$= [\frac{1}{2} e^u]_0^4 = \frac{1}{2}(e^4 - 1)$$

Vi kan bruke det bestemte integralet til å beregne arealet mellom to kurver  $y = f(x)$  og  $y = g(x)$ , der  $f(x) \geq g(x)$  på hele intervallet  $[a, b]$ :

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = [\text{Areal mellom } f \text{ og } g]$$



**Figur 2.4.** Arealet mellom grafene til  $y = x^2$  og  $y = x^3$ .

**Eksempel 2.3.5.**

$$\int_0^1 (x^2 - x^3) dx = [\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

**Eksempel 2.3.6.**

$$\int_0^1 (y^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{2}}) dy = [\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}] = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

Det er ikke tilfeldig at de to siste eksemplene gir samme svar. Begge uttrykkene gir oss arealet av den gule halvmånen i eksempelet over. Forskjellen er at vi det ene tilfellet betrakter  $y$  som en funksjon av  $x$ , mens vi i det andre tilfelte betrakter  $x$  som en funksjon av  $y$ .

I alle integral-uttrykk inngår et *differensial*  $dx$  eller  $dt$  eller tilsvarende. Denne notasjonen ble innført av Gotfried Leibniz for rundt 300 år siden, og har flere ulike tolkninger. Den fysiske tolkningen, slik Newton så det, er som en ørliten del av størrelsen  $x$  eller  $t$ . Differensialet  $dx$  har ingen utstrekning, men er heller ikke 0. Man kan tenke på den som en liten størrelse som vi lar gå mot 0. Vi kommer tilbake til denne tolkningen i avsnittet om Riemannsummer.

En annen tolkning kommer fra Leibniz selv. Han betraktet  $dx$  som et formelt uttrykk, som ikke skal tillegges noen fysisk størrelse, differensialet lever i en annen verden enn den fysiske størrelsen  $x$ . Operasjonen  $x \mapsto dx$  tilordner til en størrelse  $x$  et differensial  $dx$ . Den motsatte operasjonen kalte Leibniz  $\int$ . Den tilordner en størrelse til et differensial, Altså  $\int dx = x$ , eller Leibniz sin versjon av fundamentalteoremet.

## 2.4 Riemannsummer\*

Vi skal se på en måte å beregne et areal under grafen til en funksjon og som også kan være med på å illustrere fundamentalteoremet. Vi tenker oss at vi deler opp intervallet  $[a, b]$  i delintervaller med delingspunkter (kalles ofte en **partisjon** av intervallet)

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$

og at vi velger ut et punkt  $x_i^*$  i hvert delintervall, altså  $x_i^* \in [a_i, a_{i+1}]$ . Da vil summen (som vi kaller en **Riemannsum**, etter den tyske matematikeren Bernhard Riemann),

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*) (a_{i+1} - a_i)$$



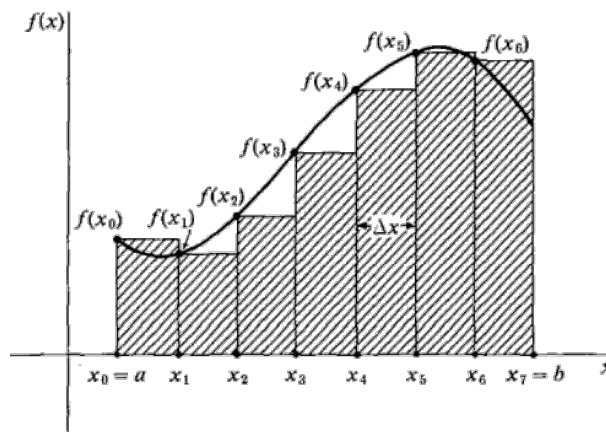
Berhard Riemann,  
(1826-1866)

være en god approksimasjon til integralet  $\int_a^b f(x)dx$ , og bedre jo flere delingspunkter vi velger. Vi sier at vi approksimerer funksjonen ved hjelp av **trappefunksjoner**. Trappefunksjoner er funksjoner som er stykkvis konstante og derfor ser litt ut som trappetrinn. Forde-

len med å bruke trappefunksjoner er at det er enkelt å regne ut arealet under grafen. Samtidig kan vi lage dem på en slik måte at når vi gjør en finere og finere oppdeling, dvs. at trinnene blir flere og flere og smalere og smalere, så vil grenseverdien gi oss det arealet vi egentlig vil beregne. Vi kan faktisk i mange tilfeller definere

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*)(a_{i+1} - a_i)$$

Vi skal i alle eksempler holde oss til uniforme oppdelinger, dvs. der  $a_{i+1} - a_i = \Delta x$  er den samme for alle  $i$ .



**Figur 2.5.** Trappefunksjon som approksimerer en funksjon, med  $x_i$  som venstre endepunkt i hvert delintervall. Merk at partisjonen her er skrevet  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_7 = b$ .

I noen tilfeller kan vi bruke trappefunksjoner direkte til å beregne et bestemt integral, men ofte vil dette involvere veldig mye regning. For en datamaskin er ikke

mye regning noe problem og gode numeriske tilnærminger til et bestemt integral kan derfor lett gjennomføres med datamaskiner ved å approksimere funksjonen med en trappefunksjon med millioner av trappetrinn.

I det neste eksempelet skal vi beregne arealet av en trekant, med grunnlinje  $g$  og høyde  $h$ . For enkelthet skyld lar vi trekanten være rettvinklet. En vilkårlig trekant kan alltid deles opp i rettvinklede trekanter og ved å summere areal kan vi lett generalisere formelen til å gjelde for alle trekanter.

**Eksempel 2.4.1.** Vi lar trekanten ligge med den rette vinkelen inn mot  $x$ - og  $y$ -aksen. Grunnlinjen vil da ligge langs  $x$ -aksen fra  $0$  til  $g$ , og høyden opp til hypotenusen fra et punkt  $x$  på grunnlinjen vil være gitt ved  $y = \frac{h}{g}(g - x)$ . Dette er akkurat likningen til en rett linje som går gjennom punktene  $(g, 0)$  og  $(0, h)$ . Det betyr at vi må beregne det bestemte integralet

$$\int_0^g \frac{h}{g}(g - x)dx$$

Vi deler opp grunnlinjen i  $n$  like store deler, med  $\Delta x = \frac{g}{n}$ , som gir oss en partisjon:

$$0 < \frac{g}{n} < \frac{2g}{n} < \frac{3g}{n} < \dots < \frac{(n-1)g}{n} < \frac{ng}{n} = g$$

Vi skal beregne

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$$

med  $x_i^*$  som høyre endepunkt i delintervallene, dvs.  $x_i^* = \frac{ig}{n}$  og med  $f(x^*) = \frac{h}{g}(g - x^*)$ . Dette gir oss arealet under trappefunksjonen gitt ved

$$\begin{aligned} & \frac{h}{g}(g - \frac{g}{n}) \cdot \frac{g}{n} + \dots + \frac{h}{g}(g - \frac{(n-1)g}{n}) \cdot \frac{g}{n} \\ &= \frac{hg}{gn}((n-1)g - \frac{g}{n}(1+2+\dots+(n-1))) \\ &= \frac{gh}{n}(n-1 - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}n(n-1)) \\ &= \frac{gh}{n}(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}) \\ &= \frac{gh}{2} - \frac{gh}{2n} \rightarrow \frac{gh}{2} \quad \text{når } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

dvs. arealet er gitt ved  $\frac{gh}{2}$ , som forventet.

I det neste eksempelet skal vi bruke summeformelen

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**Eksempel 2.4.2.** Vi skal beregne

$$\int_0^1 x^2 dx$$

ved hjelp av Riemannsummer. Partisjon av enhetsintervallet, med  $\Delta x = \frac{1}{n}$ :

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \frac{3}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1$$

Vi skal beregne

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

med  $x_i$  som høyre endepunkt i delintervallene, dvs.  $x_i^* = \frac{i}{n}$  og  $f(x) = x^2$ . Dette gir oss arealet under trappefunksjonen gitt ved

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n)^2) \\ &= \frac{1}{n^3} \frac{(n+1)n(2n+1)}{6} \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \rightarrow \frac{1}{3} \quad \text{når } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

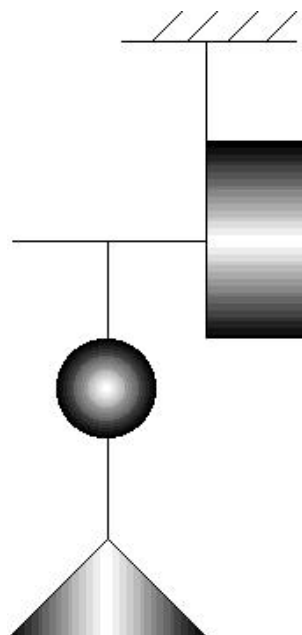
dvs.

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

## 2.5 Archimedes beregning av volumet av en kule\*

Selv om differential- og integralregningen er av nyere dato, bare 3-400 år gammel, var man inne på mange av de samme tankene i det gamle Hellas, for mer enn 2000 år siden. Ideen med trappefunksjoner, som ligger til grunn for Riemannsummene var ikke ukjent for Archimedes, og han brukte et tilsvarende prinsipp for å utlede formelen for volumet av en kule.

Archimedes stilte opp et praktisk eksperiment:



**Figur 2.6.** Illustrasjon av Archimedes oppsett for utregning av volumet av en kule.

Archimedes oppsett er som følger: Alle legemene som inngår har samme tetthet, satt til 1. I opphenget henger det en tverrgående, masseløs stang. På høyre side henger en sylinder med radius  $a$  i grunnflaten og høyde  $a$ . Sylindren henger på høykant. På venstre side, i avstand  $a$  henger to legemer, en kule med radius  $\frac{a}{2}$  og en kjegle med høyde og radius i grunnflaten, begge lik  $a$ .

Dersom systemet er i balanse er dette nok til å beregne volumet av kula.

Tyngdepunktet til sylindren har armlengde  $\frac{a}{2}$ , dvs. et moment på  $\pi a^2 \cdot a \cdot \frac{a}{2}$ . Armen på venstre side har lengde  $a$  og momentet er  $a \cdot (V + \frac{1}{3} \pi a^2 \cdot a)$ , der  $V$  er volumet av kula. Dersom systemet er i balanse gir dette  $V = \frac{4}{3} \pi (\frac{a}{2})^3$ , som er volumet av kula slik vi kjenner det.

Så det gjenstår å vise at systemet er i balanse. Vi skal sammenlikne *tynne* skiver på de to figurene, av tykkelse  $dx$ . Størrelsen  $dx$  kan vi betrakte som grenseverdien for  $\Delta x$ , når denne går mot 0. Vi snakker om *uendelig tynne* skiver. Disse skivene har ikke noen synlig tykkelse, men når vi legger uendelig mange av dem oppå hverandre, får vi likevel noe med et ordentlig volum.

La  $0 \leq x \leq a$ . På høyre side har vi en skive i avstand  $x$ , som gir et moment på  $x \cdot \pi a^2 dx$ . På venstre side er det litt mer regning. Kjeglen måler vi ovenifra, slik at skiva ved dybde  $x$  gir et moment på  $a \cdot \pi x^2 dx$ . Kula deler vi også ovenfra, ved Pythagoras formel blir radius

i skiva  $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2} = \sqrt{ax - x^2}$ , dvs. et bidrag til momentet på  $a \cdot \pi(ax - x^2)dx$ . Dette er i balanse siden

$$\pi a^2 x dx = a \cdot \pi x^2 dx + a \cdot \pi(ax - x^2)dx$$

På denne finurlige måten klarte altså Archimedes for over 2000 år siden å regne seg fram til formelen for volumet av en kule ved å bruke "vektstangprinsippet".

## 2.6 Trapesmetoden og Simpsons metode

Vi fortsetter med å se på det bestemte integralet, spesielt på hvordan vi kan bruke numeriske beregninger til å bestemme verdien når vi ikke nødvendigvis kan finne en anti-derivert.

Vi skal gi to metoder for å gjøre slike numeriske tilnærminger av et bestemt integral. Den første er **trapesmetoden** (tilnærminger med trapeser eller lineær approksimasjon). Vi deler intervallet  $I = [a, b]$  i  $n$  like store deler

$$a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$$

hvor  $a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n}$  for alle  $i$ . Da har vi følgende formel,

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\frac{f(a_0)}{2} + f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_{n-1}) + \frac{f(a_n)}{2}\right) \cdot \Delta x + E_T$$

der  $E_T$  er et restledd som gir avviket i tilnærmingen, dvs. det som mangler for at summen på høyresiden skal være lik integralet på venstresiden.

**Teorem 2.6.1.** Anta at  $f''(x)$  eksisterer og er kontinuertlig på intervallet  $[a, b]$  og at  $|f''(x)|$  har maksimumsverdi  $K$  på intervallet. Da er feilen  $E_T$  i trapesmetoden med  $n$  like store delingsintervaller begrenset ved

$$|E_T| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2}$$

Det er et viktig poeng ved dette restleddet. Siden nevneren i uttrykket er proporsjonalt med  $n^2$ , så vil en dobling av antall punkter i tilnærmingen gi en feil som er rundt en fjerdedel. Tredobling av antall punkter vil gi en feil som er rundt en ni-del osv. Det betyr at jo finere oppdeling vi har, dvs. jo flere delingspunkter, jo bedre blir approksimasjonen.

Trajesmetoder baserer seg på at vi tilnærmer integranden med stykkvis lineære funksjoner, og så regner ut integralet av disse funksjonene i stedet for den originale funksjonen. Dersom integranden er en lineær funksjon i utgangspunktet burde den selv være sin egen beste approksimasjon, og trapesmetoden burde gi oss et eksakt svar.

**Eksempel 2.6.1.** Vi skal bruke trapesmetoden på integralet  $\int_0^1 x dx$  med  $n$  delingspunkter. Det gir

$$\begin{aligned} \int_0^1 x dx &\approx \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} + \frac{1}{2} \cdot 1\right) \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}(n-1)n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

som er det samme som vi ville fått ved å finne en anti-derivert og så sette inn.

**Eksempel 2.6.2.** Vi skal estimere integralet  $\int_0^2 \sqrt{1+x^4} dx$  ved trapesmetoden med fire like store delintervaller. Vi har  $\Delta x = 0.5$  og derfor  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 0.5$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 1.5$  og  $x_4 = 2$ . Det gir

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{1+x^4} dx &\approx \left(\frac{1}{2}\sqrt{1+0^4} + \sqrt{1+0.5^4} + \sqrt{1+1^4} + \sqrt{1+1.5^4} + \frac{1}{2}\sqrt{1+2^4}\right) \cdot 0.5 \\ &= \left(\frac{1}{2} + \sqrt{1.0625} + \sqrt{2} + \sqrt{6.0625} + \frac{1}{2}\sqrt{17}\right) \cdot 0.5 \\ &\approx 3.73 \end{aligned}$$

Setter vi  $f(x) = \sqrt{1+x^4}$  får vi  $f'(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$  og  $f''(x) = \frac{6x^2+2x^6}{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}$ . Ved å derivere enda en gang er det relativt enkelt å se at den dobbelt-deriverte har sitt maksimum for  $x = 1$  og at vi har  $|f''(x)| < 3$ . Det gir  $|E_T| < \frac{1}{8} = 0.125$ . Det betyr at

$$3.73 - 0.125 \leq \int_0^2 \sqrt{1+x^4} dx \leq 3.73 + 0.125$$

**Eksempel 2.6.3.** Vi skal estimere integralet  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$  ved trapesmetoden med fire like store delintervaller. Vi har  $\Delta x = \frac{1}{4}$  og derfor  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{1}{4}$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ ,  $x_3 = \frac{3}{4}$  og

$x_4 = 1$ . Det gir

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{1+x^2} dx &\approx \left( \frac{1}{2} \frac{1}{1+0^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{4})^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1+(\frac{3}{4})^2} + \frac{1}{1+1^2} \right) \cdot \frac{1}{4} \\ &= \left( \frac{1}{2} + \frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25} + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{4} \\ &\approx 0.8453 \end{aligned}$$

I dette tilfellet kan man vise at  $|f''(x)| < 1$  og vi får  $|E_T| < \frac{1}{192} \approx 0.004323$ . Vi kan røpe at den faktiske verdien av integralet er  $\frac{\pi}{4} \approx 0.7854$ , så vi ser at vi holder oss innenfor feilestimatet.

$$\begin{aligned} 0.7819 - 0.0043 &\leq \int_0^2 \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} \approx 0.7854 \\ &\leq 0.7819 + 0.0043 \end{aligned}$$

Den andre metoden vi skal se på kalles **Simpsons metode**. Den benytter seg av kvadratisk approksimering, dvs. at vi tilnærmer funksjonen stykkvis med 2. gradspolynom (selv om det ikke er helt enkelt å se at det er det som r tilfellet). Her må  $n$  være et partall. I Simpsons metode bruker vi tilnærmingen

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx (f(a_0) + 4f(a_1) + 2f(a_2) + 4f(a_3) \\ &\quad + 2f(a_4) + \dots + 2f(a_{n-2}) \\ &\quad + 4f(a_{n-1}) + f(a_n)) \cdot \frac{\Delta x}{3} \end{aligned}$$

hvor feilen vi gjør er gitt ved et restledd  $E_S$ .

**Teorem 2.6.2.** Anta at  $f^{(4)}(x)$  eksisterer og er kontinuertlig på intervallet  $[a, b]$  og at  $|f^{(4)}(x)|$  har maksverdi  $K$  på intervallet. Da er feilen  $E_S$  i Simpsons metode begrenset ved

$$|E_S| \leq \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

Her inneholder nevneren  $n$  opphøyd i fjerde potens. Det betyr at en økning i antall delingspunkter gir en dramatisk forbedring i approksimasjonen i forhold til trapesmetoden.

Siden Simpsons metode baserer seg på tilnærming med 2. gradspolynom kan det være interessant å prøve å beregne integralet av et 2. gradspolynom.

**Eksempel 2.6.4.** Vi ser på integralet  $\int_0^1 x^2 dx$  med 10 delingspunkter. Det gir

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 dx &\approx (0 + 4 \cdot (0.1)^2 + 2 \cdot (0.2)^2 + \dots \\ &\quad + 4 \cdot (0.9)^2 + 1) \cdot \frac{0.1}{3} \\ &= (0 + 0.04 + 0.08 + 0.36 + 0.32 + 1 \\ &\quad + 0.72 + 1.96 + 1.28 + 3.24 + 1) \cdot \frac{0.1}{3} \\ &= \frac{10 \cdot 0.1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Dette er det samme vi hadde fått dersom vi hadde anti-derivert og så satt inn.

**Eksempel 2.6.5.** Vi skal finne en tilnærmet verdi for  $\int_0^1 e^{-x^2} dx$  med  $n$  delintervaller ved Simpsons metode.

Først med  $n = 2$ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) \cdot \frac{\Delta x}{3} \\ &= (e^0 + 4e^{-\frac{1}{4}} + e^{-1}) \cdot \frac{1}{6} = 0.74718\dots \end{aligned}$$

Med  $n = 4$ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &\approx (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) \\ &\quad + f(x_4)) \cdot \frac{\Delta x}{3} \\ &= (e^0 + 4e^{-\frac{1}{16}} + 2e^{-\frac{1}{4}} + \\ &\quad 4e^{-\frac{9}{16}} + e^{-1}) \cdot \frac{1}{12} \\ &= 0.7468\dots \end{aligned}$$

Restleddet sier i dette tilfellet, etter noe regning,

$$E_S \leq \frac{24 \cdot (1-0)^5}{180 \cdot 4^4} = \frac{24}{46080} \approx 0.0005$$

og vi får

$$0.7468 - 0.0005 \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 0.7468 + 0.0005$$

**Eksempel 2.6.6.** Vi avslutter med å estimere integralet  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$  ved Simpsons metode med fire like store delintervaller. Igjen har vi  $\Delta x = \frac{1}{4}$  og derfor  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{1}{4}$ ,



$x_2 = \frac{1}{2}$ ,  $x_3 = \frac{3}{4}$  og  $x_4 = 1$ . Det gir

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} &\approx \left( \frac{1}{1+0^2} + 4 \cdot \frac{1}{1+(\frac{1}{4})^2} \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2} + 4 \cdot \frac{1}{1+(\frac{3}{4})^2} + \frac{1}{1+1^2} \right) \cdot \frac{1}{12} \\ &= \left( 1 + \frac{64}{17} + \frac{8}{5} + \frac{64}{25} + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{1}{12} \\ &= \frac{8011}{10200} \approx 0.7854 \end{aligned}$$

I dette tilfellet kan man vise at  $|f^{(4)}(x)| < 24$  og vi får  $|E_S| < \frac{1}{1920} \approx 0.0004323$ , som betyr at

$$0.7854 - 0.0004 \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \leq 0.7854 + 0.0004$$

## 2.7 Uegentlige integraler

Bestemte integral er definert for kontinuerlige funksjoner over begrensede intervaller. Ved ekstremalverdi-teoremet vet vi at slike funksjoner oppnår sine maksimum og minimum i definisjonsområdet. Det betyr at funksjonene nødvendigvis må være begrenset. Integralet av en begrenset funksjon over et begrenset område kan ikke bli uendelig stort.

Det blir imidlertid litt for snevert om vi må begrense teorien til begrensede funksjoner over begrensede områder. Et eksempel er radioaktiv stråling. I henhold til den universelle loven for radioaktiv stråling vil intensiteten i strålingen fra en radioaktiv kilde avta eksponentielt med tiden. Strålingen vil aldri ta slutt, men vil etter hvert bli forsvinnende liten. Radioaktiv stråling er proporsjonal med mengden av radioaktivt stoff i kilden. For å beregne den opprinnelige mengden av radioaktivt stoff må vi derfor integrere intensiteten av strålingen fra tiden 0 til  $\infty$ . Det betyr at vi har et ubegrenset definisjonsområde. Likevel vil integralet være endelig, rett og slett fordi det uttrykker den opprinnelige mengden radioaktivt stoff i kilde, og denne er endelig. Et slikt integral kalles et **uegentlig integral**.

Det er også en annen mulighet for å definere et uegentlig integral. Dersom definisjonsområdet er begrenset, men funksjonen er ubegrenset kan det også ha mening å definere et uegentlig integral. Det er ikke enkelt å gi en fysisk tolkning av en størrelse som innefor et begrenset definisjonsområde går mot uendelig, men matematisk sett er det kun en "speilvendning" av det første tilfellet. I begge tilfeller baserer vi definisjonen på grenseverdier av velkjente bestemte integraler.

Vi begynner med å minne om definisjonen av en grenseverdi.

**Definisjon 2.7.1.** Vi sier at  $L$  er grenseverdien av en funksjon  $f(x)$  når  $x \rightarrow a$  dersom for alle valg av  $\varepsilon > 0$ , så kan vi finne en  $\delta > 0$  slik at hvis  $|x - a| < \delta$ , så er  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Vi skriver

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Denne definisjonen er veldig formell, og i mange tilfeller ikke særlig praktisk anvendbar. Da er det nyttig å huske på at for en kontinuerlig funksjon har vi at grenseverdien i et punkt er lik funksjonsverdien i punktet.

Litt annerledes blir dette når  $a = \infty$ :

**Definisjon 2.7.2.** Vi sier at  $L$  er grenseverdien av en funksjon  $f(x)$  når  $x \rightarrow \infty$  dersom for alle valg av  $\varepsilon > 0$ , så kan vi finne en  $M$  slik at dersom  $x > M$ , så er  $|f(x) - L| < \varepsilon$ . Vi skriver

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

Slike grenseverdier er ikke alltid så enkle å beregne, men det finnes heldigvis mange ulike teknikker. Vi skal se på noen av dem senere, vårt anliggende nå er å bruke denne type grenseverdi til å definere et uegentlig integral.

**Definisjon 2.7.3.** La  $f(x)$  være en kontinuerlig funksjon definert over et ubegrenset område, f.eks. et halvåpent intervall  $[a, \infty)$ . Vi definerer det **uegentlige integralet** av  $f$  over  $[a, \infty)$  som en grense av bestemte integraler

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

under forutsetning av at grensen eksisterer. I såfall sier vi at det uegentlige integralet **konvergerer**. I motsatt fall **divergerer** integralet.

Tilsvarende definisjon kan vi lage for halvåpne intervaller av typen  $(-\infty, b]$ . Dersom funksjonen er definert på hele tallinja  $(-\infty, \infty)$  og vi er interessert i å beregne det uegentlige integralet

$$\int_{-\infty}^\infty f dx$$

må vi del opp integralet i to deler, ett over  $(-\infty, 0]$  og ett over  $[0, \infty)$ ;

$$\int_{-\infty}^\infty f dx = \int_{-\infty}^0 f dx + \int_0^\infty f dx$$

For at det uegentlige integralet skal konvergere krever vi at begge integralene konvergerer hver for seg. F.eks. vil ikke integralet

$$\int_{-\infty}^{-\infty} x dx$$

konvergere siden hver av integralene

$$\int_{-\infty}^0 x dx \quad \text{og} \quad \int_0^{\infty} x dx$$

divergerer. Dette står i kontrast til at

$$\int_{-b}^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - (-b)^2) = 0$$

og derfor også

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b x dx = 0$$

Årsaken er at

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b x dx$$

ikke er det samme som

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dx = 0$$

**Eksempel 2.7.1.** Betrakt funksjonen  $f(x) = x^{-s}$ ,  $s > 1$ , definert på intervallet  $[a, \infty)$ , hvor  $a > 0$ . Da har vi

$$\begin{aligned} \int_a^{\infty} x^{-s} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b x^{-s} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{-s+1} (b^{-s+1} - a^{-s+1}) \\ &= \frac{-a^{-s+1}}{-s+1} = \frac{a^{-s+1}}{s-1} \end{aligned}$$

siden  $b^{-s+1} \rightarrow 0$  når  $b \rightarrow \infty$  og  $-s+1 < 0$ .

**Eksempel 2.7.2.**

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} e^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (-e^{-b} + e^{-1}) = e^{-1} \end{aligned}$$

Dette eksempelet illustrerer fenomenet med radioaktiv stråling, som vi omtalte i innledningen av dette kapitlet.

Det andre alternativet for uegentlige integraler er i de tilfellene der definisjonsområdet er begrenset, men funksjonen er ubegrenset.

**Definisjon 2.7.4.** La  $f(x)$  være en kontinuerlig funksjon definert over et begrenset område, f.eks. et halvåpent intervall  $[a, b)$ , og hvor funksjonen eventuelt er ubegrenset i nærheten av  $b$ . Vi definerer det **uegentlige integralet** av  $f$  over  $[a, b)$  som en grense av bestemte integraler

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

under forutsetning av at grensen eksisterer. I såfall sier vi at det uegentlige integralet **konvergerer**. I motsatt fall **divergerer** integralet.

Vi har tilsvarende definisjon der funksjonen eventuelt er ubegrenset nær det andre endepunktet;

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

og dersom den er ubegrenset nær begge endepunktene må vi dele opp intervallet i to deler og integrere over hver av dem. Som i det første tilfellet må begge delintegralene konvergere for at det opprinnelige integralet skal konvergere.

I denne definisjonen bruker vi begrepene

$$\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} F(x)$$

Disse kalles **ensidige grenseverdier**. Definisjonen er omtrent den samme som for ordinære grenser, den eneste forskjellen er at vi restrikerer oss til å se på verdier av  $x$  som ligger på den ene eller andre siden av  $a$ . + betyr at vi ser på verdier til høyre, - at vi ser på verdier til venstre. Denne varianten av grenseverdier er nyttig når vi skal se hva som skjer i endepunktet av et intervall, eller i punkter der de to ensidige grensene er forskjellige.

F.eks. har vi at

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

mens

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

**Eksempel 2.7.3.** Betrakt funksjonen  $f(x) = x^{-s}$ ,  $0 < s < 1$ , definert på intervallet  $(0, 1]$ . Da har vi

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{-s} dx &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 x^{-s} dx \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{-s+1} (1^{-s+1} - a^{-s+1}) \\ &= \frac{1}{-s+1} \end{aligned}$$

siden  $a^{-s+1} \rightarrow 0$  når  $a \rightarrow 0$  og  $-s+1 > 0$ .

Det er selvfølgelig ikke noe i veien for at vi kan ha et integral som er uegentlig "i begge ender", eller "dobbel uegentlig". Kravet til at integralet konvergerer er at det også konvergerer i begge ender.

**Eksempel 2.7.4.** Vi skal regne ut det uegentlige integralet

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}} dx$$

Integralet er dobbelt uegentlig fordi integranden går mot  $\infty$  når  $x \rightarrow 0^+$  og i den andre enden skal vi la  $x \rightarrow \infty$ . Vi regner først ut det bestemte integralet over intervallet  $[a, b]$ . Vi substituerer  $u = 1 + \sqrt{x}$  og  $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$  og får

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}} dx &= \int_{1+\sqrt{a}}^{1+\sqrt{b}} \frac{2du}{u^2} \\ &= \left[ -\frac{2}{u} \right]_{1+\sqrt{a}}^{1+\sqrt{b}} \\ &= \frac{2}{1+\sqrt{a}} - \frac{2}{1+\sqrt{b}} \end{aligned}$$

Først lar vi  $a \rightarrow 0$ . Det gir

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}} dx &= \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{2}{1+\sqrt{a}} - \frac{2}{1+\sqrt{b}} \right) \\ &= 2 - \frac{2}{1+\sqrt{b}} \end{aligned}$$

Så lar vi  $b \rightarrow \infty$  og vi får

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{2}{1+\sqrt{b}} \right) = 2$$

Vi ser at integralet konvergerer i begge ender av intervallet, og vi kan konkludere med at det dobbelt uegentlige integralet konvergerer.

For å avgjøre om et uegentlig integral konvergerer er det lurt å huske på at for en positiv funksjon,  $f(x) \geq 0$ , så vil divergens innebære at integralet av funksjonen over et ubegrenset intervall, f.eks.  $[0, \infty)$  vokser over alle grenser, dvs. går mot  $\infty$ . Denne erkjennelsen kan vi bruke til å gi et kriterium for konvergens av et uegentlig integral, det såkalte **sammenliknings-kriteriet**.

**Teorem 2.7.5.** La  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ , og anta at  $f$  og  $g$  er kontinuerlige funksjoner på intervallet  $(a, b)$ . Anta videre at  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  på intervallet. Dersom det uegentlige integralet  $\int_a^b g(x) dx$  konvergerer, så vil også  $\int_a^b f(x) dx$  konvergere og vi har

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Tilsvarende vil divergens av  $\int_a^b f(x) dx$  medføre divergens av  $\int_a^b g(x) dx$ .

Dette resultatet følger nokså direkte fra definisjonen av uegentlige integral, og det er formulert på en slik måte at det omfatter begge de to typene.

Vi skal se på et eksempel som viser hvordan vi bruker dette resultatet.

**Eksempel 2.7.5.** Vi kan ikke integrere funksjonen  $f(x) = e^{-x^2}$  og derfor heller ikke ha noen klart standpunkt om det uegentlige integralet

$$\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$$

konvergerer. Men teoremet over løser problemet. For  $x \geq 1$  har vi at  $x^2 \geq x$  og derfor  $-x^2 \leq -x$ . Siden eksponentialfunksjonen er strengt voksende og positiv, følger det at  $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$ . Videre har vi at

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} e^{-x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b e^{-x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-b} + e^{-1} = e^{-1} \end{aligned}$$

Dermed garanterer teoremet at  $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$  også konvergerer.

**Eksempel 2.7.6.** Det neste eksempelet er hentet fra fysikk. Vi har at arbeidet  $W$  som skal til for å bevege noe mot en kraft  $F$  fra punktet  $x_0$  til punktet  $x_1$  er gitt ved integralet

$$W = \int_{x_0}^{x_1} F dx$$

Dersom  $F$  er gravitasjonskraften fra jorda er det vanlig å la  $F < 0$  siden krafta virker "nedover". Vi sier derfor at arbeidet som trengs for å løfte steinen mellom  $x_0 < x_1$  er gitt ved

$$W = - \int_{x_0}^{x_1} F dx$$

I følge Newtons 2. lov har vi  $F = ma(t) = mv'(t)$ . Samtidig har vi at  $v(t) = x' = \frac{dx}{dt}$ , som vi ganske enkelt kan skrive som  $dx = v(t) dt$ . Dermed får vi

$$v(t) dv = v(t) v'(t) dt = v'(t) v(t) dt = a(t) dx$$

og videre

$$\begin{aligned} W &= - \int_{x_0}^{x_1} F dx = - \int_{x_0}^{x_1} m a(t) dx \\ &= - \int_{v_0}^{v_1} m v(t) dv \\ &= - \left[ \frac{1}{2} m v(t)^2 \right]_{v_0}^{v_1} \\ &= - \frac{m v_1^2}{2} + \frac{m v_0^2}{2} \end{aligned}$$

Mao. arbeidet som kreves tilsvarer endringen i kinetisk energi.

Den såkalte unnslippeshastigheten er den oppoverrettede hastigheten som en gjenstand må ha ved jordoverflaten for å unnslippe jordas gravitasjonsfelt. Det arbeidet som kreves for å unnslippe er gitt av gravitasjonsloven;

$$W = - \int_{r_0}^{\infty} \frac{k}{r^2} dr = \frac{k}{r_0}$$

der  $k$  er en konstant, og  $r_0$  er radiusen til jorda. Kombinerer vi de to uttrykkene får vi

$$-\frac{m v_1^2}{2} + \frac{m v_0^2}{2} = \frac{k}{r_0}$$

Siden vi snakker om unnslippeshastighet vil  $v_1 = 0$  ved  $r = \infty$ . Det gir

$$\frac{m v_0^2}{2} = \frac{k}{r_0}$$

eller

$$v_0 = \sqrt{\frac{2k}{m r_0}}$$

Ved jordoverflaten har vi  $r \approx 6400\text{km}$ , og  $F = 9.8\text{m}$ . Det gir

$$\frac{k}{r_0^2} = \frac{k}{6400000^2} = 9.8\text{m}$$

dvs.

$$v_0 = \sqrt{\frac{2k}{m r_0}} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 6400000} \approx 11200$$

med benevnning meter pr. sekund. Dette er den hastigheten et legeme må ha ved jordoverflaten, rettet oppover, for å unnslippe jordas gravitasjonsfelt.

## Oppgaver

**Oppgave 1.** Finn alle anti-deriverte av funksjonene

- $f(x) = x + \sin x$
- $f(x) = e^{2x}$
- $f(x) = \frac{2}{x}$
- $f(x) = x^{-2}$
- $f(x) = \cos \omega x$
- $f(x) = x \sin(x^2)$

**Oppgave 2.** Regn ut de ubestemte integralene.

- $\int x^3 dx$
- $\int 3x^2 + 5x^4 dx$
- $\int x + x^2 + x^3 dx$
- $\int x e^{x^2} dx$
- $\int \omega \cos(\omega x) dx$
- $\int 1 + \ln x dx$

**Oppgave 3.** Regn ut det bestemte integralet av potensfunksjonen  $f(x) = x^n$  over det lukkede intervallet  $[0, 1]$  for et vilkårlig helt tall  $n \neq 1$ .

**Oppgave 4.** Regn ut de bestemte integralene.

- $\int_0^3 x^2 dx$
- $\int_{-3}^3 x^2 dx$
- $\int_0^2 4x^3 dx$
- $\int_{-2}^2 4x^3 dx$

**Oppgave 5.** Regn ut de bestemte integralene.

- $\int_{-1}^2 (t+1) dt$
- $\int_{-1}^0 (x+1)^2 dx$
- $\int_0^1 x^{\frac{1}{3}} dx$
- $\int_0^\pi (x + \sin x) dx$

**Oppgave 6.** Regn ut de bestemte integralene

- $\int_e^{e^2} \frac{1}{x} (\ln x) dx$

b)  $\int_1^4 \frac{1}{x} + \sqrt{x} dx$

c)  $\int_0^{2\pi} \sin t \sin(\omega t) dt, \omega \neq \pm 1$

d)  $\int_0^1 x e^{3x^2} dx$

e)  $\int_0^1 x e^{2x} dx$

**Oppgave 7.** Finn arealet avgrenset av grafen til  $f$ ,  $x$ -aksen og den rette linja ( $x = a$ ).

a)  $f(x) = 5x$  og  $x = 1$

b)  $f(x) = 3x^2$  og  $x = 1$

c)  $f(x) = \sin x$  og  $x = \frac{\pi}{2}$

**Oppgave 8.** Finn arealet avgrenset av grafen til  $f$ ,  $x$ -aksen og de to rette linjene.

a)  $f(x) = \sqrt{x}$  og  $x = 1, x = 4$

b)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  og  $x = 1, x = 2$

c)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  og  $x = 1, x = 3$

**Oppgave 9.** Regn ut arealet mellom de grafene, avgrenset av de to rette linjene.

a)  $f(x) = x^3, g(x) = 3x^2 - 6$  og  $x = 0, x = 2$

b)  $f(x) = x^4, g(x) = 2x^2 - 1$  og  $x = -1, x = 1$

c)  $f(x) = e^x, g(x) = e^{-x}$  og  $x = 0, x = \ln 2$

d)  $f(x) = \cos x, g(x) = \sin x$  og  $x = 0, x = \frac{\pi}{4}$

e)  $f(x) = x^2, g(x) = x + 2$  og  $x = -1, x = 2$

**Oppgave 10.** Regn ut arealet mellom grafene til  $f$  og  $g$ , avgrenset av de to rette linjene.

a)  $f(x) = 9 - x^2, g(x) = x^2 + 1$  og  $x = -2, x = 2$

b)  $f(x) = \sqrt{4+x}, g(x) = 21 + \frac{1}{4}x$  og  $x = 0, x = 12$

c)  $f(x) = \frac{1}{2}x, g(x) = e^{-x}$  og  $x = 0, x = \ln 2$

**Oppgave 11.** Regn ut arealet av området mellom kurvene  $y = x^2 + x + 1$  og  $y = -2x^2 + 4x + 7$  mellom skjæringspunktene for de to kurvene.

**Oppgave 12.** Estimer integralet ved å bruke trapesmetoden, med like store delintervaller og det oppgitte antallet delintervaller.

a)  $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx, \text{ og } n = 4$

b)  $\int_{-1}^2 \frac{1}{1+x^2} dx, \text{ og } n = 6$

c)  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx, \text{ og } n = 10$

d)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx, \text{ og } n = 8$

**Oppgave 13.** Finn en tilnærmet verdi for integralet  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$  ved Simpsons metode, først med  $n = 2$ , deretter  $n = 4$ , og så  $n = 8$ . Sammenlikn svaret med  $\ln 2$ . Hvordan endrer restleddet seg?

**Oppgave 14.** Følgende data er kjent for en funksjon  $f(x)$ .

$x$	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.1	0.4	0.5	1	-0.1

Vi skal estimere  $\int_0^4 f(x) dx$

a) Ved trapesmetoden

b) Ved Simpsons metode

**Oppgave 15.** a) Gi et estimat for integralet  $\int_0^4 x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 17x dx$  ved å bruke trapesmetoden og Simpsons metode med  $\Delta x = 1$ .

b) Beregn integralet  $\int_0^4 x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 17x dx$  eksakt.

**Oppgave 16.** Finn en tilnærmet verdi for integralet  $\int_0^1 x dx$  ved Simpsons metode, først med  $n = 2$ , deretter  $n = 8$ .

**Oppgave 17.** Regn ut de uegentlige integralene

a)  $\int_0^\infty e^{-x} dx$

b)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

c)  $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$

d)  $\int_2^\infty x^{-5} dx$

**Oppgave 18.** Regn ut de uegentlige integralene

a)  $\int_{-\infty}^0 e^{\frac{1}{10}x} dx$

b)  $\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}} dx$

c)  $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^3+1)^2} dx$

d)  $\int_3^\infty \frac{1}{(x-2)^3} dx$

**Oppgave 19.** Avgjør om de uegentlige integralene konvergerer.

a)  $\int_0^{\infty} 2xe^{-x^2} dx$

b)  $\int_1^{\infty} \frac{x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} dx$

**Oppgave 20.** Beregn følgende uegentlige integraler:

a)  $\int_0^1 (\ln x)^2 dx$

b)  $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

# Kapittel 3

## Følger og rekker

En viktig egenskap ved polynomiale funksjoner er at vi (enkelt) kan regne ut verdiene av funksjonene i et valgt punkt. Grunnen er at polynomer er et slags "speilbilde" av de vanlige regneoperasjonene. Hvis  $f(x) = 2x^2 - 3x$ , så regner vi ut  $f(2) = 2$  kun ved å legge samme og multiplisere tall. For andre funksjoner, som  $e^x$  eller  $\sin x$  er det mye vanskeligere, for ikke å se umulig å regne ut verdien i et vilkårlig punkt. Imidlertid er det mulig å lage tilnærminger til slike funksjoner ved å bruke polynomer. Men for å få gode tilnærminger må polynomene ha mange ledd av høyere og høyere grad. Hvis vi kunne ta med uendelig mange ledd i polynomet ville vi for veldig mange funksjoner kunne lage eksakte tilnærminger. Imidlertid har det ikke egentlig noen mening å addere uendelig mange ledd. I stedet kan vi betrakte en følge av vanlige polynomer, der vi tar med flere og flere ledd, og så studere grensen for denne følgen.

### 3.1 Følger

**Definisjon 3.1.1.** En *tallfølge*  $\{a_n\}$  er en funksjon som til et hvert naturlig tall (indeksen  $n$ ) tilordner et reelt tall  $a_n$ . Alternativt kan vi skrive tallfølgen som en rekke av tall, ordnet etter indeksen:

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

**Eksempel 3.1.1.** Et eksempel på en tallfølge er

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

Et annet eksempel er

$$7, 4, 2, 5, 3, 3, 9, 2, 5, 23, 289, 14, \dots$$

I det første tilfellet er det lett å tenke seg hva det neste (og neste deretter) leddet i følgen er, mens i det andre tilfellet er det ingen åpenbar systematikk.

Følger kan, som vi ser over, være systematiske og pene, i den forstand at vi med enkle hjelpemidler kan fortelle hva det  $n$ -te leddet i følgen er. Eller de kan være kaotiske og uten noen form for indre systematikk. Vi er mest interessert i følger med en viss grad av systematikk, spesielt er vi interessert i følger hvor leddene etter hvert blir likere og likere. Slike følger har et eget navn, de kalles **konvergente følger** og den presise definisjonen er følgende.

**Definisjon 3.1.2.** En tallfølge  $\{a_n\}$  sies å **konvergere** mot en grense  $L$  dersom for alle  $\varepsilon > 0$ , så finnes en  $N$  slik at dersom  $n > N$  så er  $|L - a_n| < \varepsilon$ . Vi skriver

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

En følge som ikke konvergerer **divergerer**.

Denne definisjonen sier at dersom en følge konvergerer mot en grenseverdi  $L$ , så vil avstanden mellom  $L$  og leddene i følgen bli så liten vi bare vil bare vi går langt nok ut i følgen.

**Eksempel 3.1.2.** Følgen

$$0.3, 0.33, 0.333, \dots$$

konvergerer mot  $L = \frac{1}{3}$ , mens følgene

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

og

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

begge divergerer, den første fordi den vokser over alle grenser, mens den andre alternerer mellom to ulike verdier. For følgen  $0.3, 0.33, 0.333, \dots$  kan vi sette

$$a_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots + \frac{3}{10^n}$$

Da har vi

$$\left| \frac{1}{3} - a_n \right| = \frac{3}{10^{n+1}} + \frac{3}{10^{n+2}} + \dots \leq \frac{1}{10^n}$$

Det betyr at dersom  $\varepsilon > \frac{1}{10^N}$  for en  $N$ , så vil  $|L - a_n| < \varepsilon$  for  $n \geq N$ .

En følge slik som  $1, 2, 3, 4, \dots$  der  $a_{n+1} = a_n + b$  for et fast tall  $b$  (i dette tilfellet er  $b = 1$ ) kalles en **aritmestisk følge**, mens en følge der leddene veksler mellom positive og negative tall kalles en **alternerende følge**.

Et viktig resultat sier at en voksende, oppad begrenset følge, eventuelt en avtagende, nedad begrenset følge, alltid vil konvergere.

**Teorem 3.1.3.** La  $\{a_n\}$  være en monoton følge av reelle tall, dvs. enten rent voksende eller rent avtagende. Da vil følgen konvergere mot en grense, hvis og bare hvis følgen er begrenset.

*Bevis.* Vi antar at  $\{a_n\}$  er voksende og oppad begrenset. Den såkalte *minste-øvre-grense*-egenskapen til de reelle tall sier at blant alle øvre grenser for følgen, så finnes det en minste, som vi kaller  $c$ . For et hvert valg av et lite tall  $\varepsilon > 0$  må det finnes en  $N$  slik at  $c - \varepsilon < a_n < c$  for alle  $n > N$ . Dette skyldes at følgen vokser og at  $c$  er den minste øvre begrensningen. Dette er ekvivalent med at  $c - a_n < \varepsilon$  for alle  $n > N$ , mao.  $c$  er grensen for følgen.

Hvis en voksende følge er konvergent, så vil grensen være en oppad begrensning.

Helt tilsvarende argumenter kan brukes når følgen avtar.  $\square$

**Eksempel 3.1.3.** Følgen

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \dots, \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}, \dots$$

er oppad begrenset (alle leddene er mindre enn 2) og strengt voksende. Det betyr at følgen konvergerer.

## 3.2 Rekker

Vi er interessert i å studere en spesiell type tallfølger, nemlig de som framkommer ved stadig å legge sammen flere og flere tall. Vi starter med en følge  $\{a_n\} = \{a_1, a_2, \dots\}$  og for hver  $n$  ser vi på **delsummen**

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Dette gir oss en ny følge, av delsummer

$$\{S_n\} = \{S_1, S_2, S_3, \dots\}$$

**Definisjon 3.2.1.** La  $a_1, a_2, \dots$  være en følge av reelle tall. Den uendelige tallfølgen av delsummer

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots,$$

kalles en **uendelig rekke**.

Dersom følgen  $\{S_n\}$  konvergerer har det mening å snakke om grensen for følgen. Vi kaller denne grensen for  $S_\infty$ , og vi skriver

$$S_\infty = a_1 + a_2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Det finnes rekker med mer spesielle egenskaper enn andre. En av de viktigste typene av uendelige rekker er **geometriske rekker**. Dette er rekker som kjennetegnes ved at forholdet mellom to påfølgende ledd er konstant, dvs. rekker av typen

$$a + ak + ak^2 + ak^3 + ak^4 + \dots$$

for reelle tall  $a$  og  $k$ . Denne rekka kalles en geometrisk rekke med startverdi  $a$  og forholdstall  $k$ .

**Eksempel 3.2.1.**

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$$

Dette er en geometrisk rekke med startverdi 1 og forholdstall  $\frac{1}{2}$ . Rekka

$$1, -1, 1, -1, \dots$$

er også en geometrisk rekke, med startverdi 1 og forholdstall  $-1$ .

Et annet eksempel på en rekke med eget navn er den såkalte harmoniske rekka.

**Eksempel 3.2.2.** Rekka

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

kalles den **harmoniske rekka**. Dersom vi alternerer fortegnene i den harmoniske rekka, får vi **den alternerende harmoniske rekka**.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$



Som vi har sagt tidligere er det egentlig ikke lov å legge sammen uendelig mange ledd. Hver delsum av rekka er et helt ok tall, men hele den uendelige rekka er formelt bare en rekke og ikke noe tall. Dersom vi kan tilordne en grenseverdi til den uendelige rekka, sier vi at dette er summen av de uendelig mange leddene (selv om det formelt sett ikke er det!). Formaliseringen av spørsmålet om rekka har en sum eller ikke ligger i den følgende definisjonen.

**Definisjon 3.2.2.** Vi sier at en uendelig rekke

$$S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a_1 + a_2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

**konvergerer** dersom følgen av delsummer  $\{S_n\}$  konvergerer. I motsatt fall sier vi at rekka **divergerer**.

F.eks. vil en aritmetisk rekke aldri konvergere (så sant det faste tallet vi legger til er forskjellig fra 0). Det skyldes at en aritmetisk rekke ikke vil være begrenset, delsummene vil vokse (eller avta) i det uendelige.

For en geometrisk rekke er situasjonen en helt annen. Man kan vise at for alle  $k \neq 1$ , så har vi

$$1 + k + k^2 + k^3 + \dots + k^n = \frac{1 - k^{n+1}}{1 - k}$$

Argumentet er som følger: Vi har  $S_n = 1 + k + k^2 + \dots + k^n$ . Multipliserer vi denne summen med  $k$  får vi  $kS_n = k + k^2 + \dots + k^{n+1}$ . Differansen mellom disse to summene er på venstre side av likhetstegnet  $S_n - kS_n = (1 - k)S_n$  og på høyre side  $1 - k^{n+1}$ . Deler vi venstresiden med  $1 - k$  får vi likheten over.

Dersom  $|k| < 1$ , så vil  $k^n \rightarrow 0$ , når  $n \rightarrow \infty$ . Det betyr at den geometriske rekka konvergerer for  $|k| < 1$ , og i det tilfellet har vi

$$1 + k + k^2 + k^3 + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - k^{n+1}}{1 - k} = \frac{1}{1 - k}$$

**Eksempel 3.2.3.** Den geometriske rekka

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

har startverdi 1 og forholdstall  $\frac{1}{2}$  og grenseverdien er 2.

**Eksempel 3.2.4.** Vi kan skrive reelle tall som summer av rasjonale tall (og dermed gi en presis definisjon av uendelige desimaltall). La  $x = a, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$  være desimalutviklingen til et reelt tall. Det betyr at

$$x = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots = a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

som er grenseverdien for de avkuttete desimaltallene. F.eks. har vi

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \dots$$

Man kan også vise at den harmoniske rekka

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

divergerer, mens den alternerende harmoniske rekka

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergerer, og summen, er som vi snart skal se,  $\ln 2$ .

Divergens av den harmoniske rekka ble først vist av Nicole Oresme (1320-1382). Hans argument var som følger:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

Den siste summen vil bestå av uendelig mange ganger  $\frac{1}{2}$  og derfor divergere.

Det er generelt ikke så mye som skal til for at en alternerende rekke konvergerer. Hvis vi skriver en alternerende rekke på formen

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

der  $a_n \geq 0$  for alle  $n$ , så vil rekka vil konvergere dersom leddene  $a_n \rightarrow 0$  når  $n \rightarrow \infty$ .

### 3.3 Rekker som funksjoner

Vi kan betrakte en konvergent geometrisk rekke som en funksjon

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad \text{for } |x| < 1$$

Rekka konvergerer for  $|x| < 1$ , og da vil de to funksjonene

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad \text{og} \quad g(x) = \frac{1}{1 - x}$$

være identisk like i dette området, dvs. for  $-1 < x < 1$ . Dermed kan vi bruke de to uttrykkene om hverandre og vi sier at

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

når  $|x| < 1$ .

Siden dette er en likhet mellom to funksjoner, kan vi gjerne erstatte  $x$  med en annen størrelse, så lenge vi er sikre på at vi holder oss innenfor konvergensområdet. Vi kan f.eks. sette inn  $x^2$  i uttrykket og vi får

$$1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x^2}$$

Setter vi inn  $-x$  får vi en annen formel;

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x}$$

En kombinasjon av formelene gir

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} &= (1+x+x^2+x^3+\dots) \\ &\quad - (1-x+x^2-x^3+\dots) \\ &= 2x + 2x^3 + 2x^5 + \dots \end{aligned}$$

Samtidig har vi at

$$\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-(1-x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{2x}{1-x^2}$$

som stemmer bra overens med uttrykket der vi setter inn  $x^2$ .

Siden dette er funksjoner i intervallet  $|x| < 1$  kan vi sette inn verdier i uttrykkene. F.eks. vil  $x = \frac{1}{2}$  gi likheten

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{2}{3}$$

To funksjoner som er identisk like på et åpent intervall vil også ha identiske deriverte i intervallet. Den deriverte av funksjonen  $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$  finner vi ved å derivere ledd for ledd, dvs.

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

Dette skal være identisk likt med den deriverte av  $\frac{1}{1-x}$ , så vi får

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{for } |x| < 1$$

I stedet for å derivere ledd for ledd, kan vi integrere ledd for ledd. Det gir oss en annen likhet,

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \\ &= \int_0^x (1-t+t^2-t^3+\dots) dt \\ &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \\ &= [\ln(1+t)]_0^x \\ &= \ln(1+x) - \ln 1 = \ln(1+x) \end{aligned}$$

Innsetting av  $x = 1$  gir formelen for summen av den alternerende harmoniske rekka, og vi får likheten

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2$$

Dette er ikke noen effektiv måte å beregne  $\ln 2$ . Hvis vi tar med flere og flere ledd får vi følgen

$$1, 0.5, 0.8333, 0.5833, 0.7833, 0.6166, \dots, \\ \dots, 0.6935, 0.6926, \dots$$

hvor de to siste leddene er ledd nummer 999 og ledd nummer 1000. Det betyr at  $\ln 2 \approx 0.693$ , men selv med 1000 ledd er ikke nøyaktigheten større enn opp til tredje desimal.

### 3.4 Konvergenzkriterier\*

I dette kapitlet skal vi se på noen kriterier for konvergens av rekker. Vi formulerer bare teoremene, bevisene kan man finne i litteraturen.

Merk at dersom en rekke  $\sum a_n$  konvergerer, så vil  $a_n \rightarrow 0$  når  $n \rightarrow \infty$ . Dette er en nødvendig forutsetning som alltid må være oppfylt dersom vi skal ha noen forhåpninger om konvergens.

Det mest grunnleggende resultatet om konvergens er det som kalles **sammenlikningskriteriet**, hvor vi sammenlikner en rekke med andre rekker som vi vet enten konvergerer eller divergerer.

**Teorem 3.4.1.** La  $a_n, b_n > 0$ . Dersom vi for et positivt tall  $c$  har  $a_n \leq cb_n$  for alle  $n$ , så vil konvergens av  $\sum b_n$  medføre konvergens av  $\sum a_n$ . Motsatt, så vil divergens av  $\sum a_n$  medføre divergens av  $\sum b_n$ .

La  $\sum a_n$  og  $\sum b_n$  være konvergente rekker og la  $\alpha, \beta$  være vilkårlige reelle tall. Da konvergerer også  $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$  og vi har

$$\sum(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum a_n + \beta \sum b_n$$

Merk at summen av en konvergent og en divergent rekke alltid er divergent, mens summen av to divergente rekker kan være enten konvergent eller divergent.

**Eksempel 3.4.1.** *Rekka  $\sum \frac{|\cos n\omega|}{2^n}$  konvergerer siden  $\frac{|\cos n\omega|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$  og den geometriske rekka  $\sum \frac{1}{2^n}$  konvergerer.*

**Eksempel 3.4.2.** *Betrakt rekka gitt ved*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$$

Siden  $2^n - n \geq \frac{1}{2}2^n$  for alle  $n \geq 1$ , så vil

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Den største rekka konvergerer og da vil også den mindre rekka konvergere, men vi kan ikke regne ut grenseverdi-  
en. Rekka ser for øvrig slik ut

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{27} + \frac{1}{58} + \frac{1}{121} + \dots$$

$$\approx 1.85386$$

Det neste teoremet gir en annen variant av sammenlikningskriteriet.

**Teorem 3.4.2.** *La  $a_n, b_n > 0$  for alle  $n \geq 1$  og anta at*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

*Da konvergerer  $\sum a_n$  hvis og bare hvis  $\sum b_n$  konvergerer.*

Vi har tidligere gitt et kriterium for konvergens av geometriske rekker. En geometrisk rekke kan vi skrive som  $\sum_n a_n$ , der  $a_n = a_0 k^n$ . Det gir at  $k = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ , og denne må være mindre enn 1 for at vi skal ha konvergens. Vi kan gjøre det samme for en vilkårlig rekke, og da får vi følgende resultat:

**Teorem 3.4.3.** *La  $\sum a_n$  være en uendelig rekke av positive ledd slik at*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L \quad \text{når } n \rightarrow \infty$$

*Dersom  $L < 1$  vil rekka konvergere, for  $L > 1$  vil den divergere og for  $L = 1$  kan ikke denne testen si noe om konvergens eller divergens.*

**Eksempel 3.4.3.** *Betrakt rekka  $\sum \frac{1}{n^2 - 6n + 11}$ . Siden vi har*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2 - 6n + 11}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 - 6n + 11}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{6}{n} + \frac{11}{n^2}} = 1$$

*så vil de to rekkene  $\sum \frac{1}{n^2 - 6n + 11}$  og  $\sum \frac{1}{n^2}$  enten begge konvergere eller divergere.*

Dette eksemplet gir en slags prototyp på hvordan slike rekker kan behandles.

En annen mulighet vi har er å sammenlikne rekka med en funksjon definert over hele  $\mathbb{R}$ , og ikke bare på heltallene.

**Teorem 3.4.4.** *La  $f(x)$  være en positiv, avtagende funksjon, definert for alle  $x \geq 1$ . For alle  $n \geq 1$  lar vi*

$$s_n = \sum_{k=1}^n f(k) \quad \text{og} \quad t_n = \int_1^n f(x) dx$$

*Da vil de to følgene  $\{s_n\}$  og  $\{t_n\}$  begge konvergere eller begge divergere.*

*Bevis.* Beviset for dette resultatet baserer seg på trappefunksjoner. Siden funksjonen er avtagende vil vi ha

$$f(m+1) \leq f(x) \leq f(m)$$

for  $x \in [m, m+1]$ . Det gir at

$$f(m+1) = \int_m^{m+1} f(m+1) dx \leq$$

$$\int_m^{m+1} f(x) dx \leq \int_m^{m+1} f(m) dx = f(m)$$

Summerer vi fra 1 til  $n$  får vi

$$s_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx = t_{n+1} \leq s_n$$

Dermed vil de to rekkene enten begge divergere eller begge konvergere.  $\square$

**Eksempel 3.4.4.** *Vi har sett at de to rekkene  $\sum \frac{1}{n^2 - 6n + 11}$  og  $\sum \frac{1}{n^2}$  enten begge konvergerer eller begge divergerer. Nå har vi videre at*

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{og} \quad t_n = \int_1^n \frac{1}{x^2} dx$$

også begge enten konvergerer eller begge divergerer. Men integralet kan vi regne ut,

$$t_n = \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1$$

når  $n \rightarrow \infty$ , og begge rekkene konvergerer.

**Eksempel 3.4.5.** Ved å se på det bestemte integralet som et areal er det lett å se at

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{k}$$

Derfor vil den harmoniske rekke divergere siden den er større enn en divergent rekke,

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

(Den venstre rekke er divergent siden integralet er lik  $\ln(n+1)$  som går mot  $\infty$  når  $n \rightarrow \infty$ .)

I en alternerende rekke er annet hvert ledd positivt og annet hvert ledd er negativt. Det skal mye mindre til at en alternerende rekke konvergerer enn en rekke der alle leddene er positive. Dette er formulert i det som kalles Leibniz konvergenzkriterium.

**Teorem 3.4.5.** En alternerende rekke

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} a_n$$

konvergerer dersom følgen  $\{a_n\}$  av positive reelle tall avtar monotont mot 0.

*Bervis.* Vi ser på odde og jevne delsummer hver for seg.

$$S_{2m+1} = \sum_{n=1}^{2m+1} (-1)^{n-1} a_n$$

har odde antall ledd, mens

$$S_{2m} = \sum_{n=1}^{2m} (-1)^{n-1} a_n$$

har jevnt antall ledd. Det følger at odde-summene avtar monotont, dvs.

$$S_{2m+1} = S_{2m-1} - a_{2m} + a_{2m+1} \leq S_{2m-1}$$

mens jevn-summene vokser monotont,

$$S_{2m+2} = S_{2m} + a_{2m+1} - a_{2m+2} \geq S_{2m}$$

Nå er  $S_{2m+1}$  begrenset nedad av  $a_1 - a_2$  og følgen er derfor konvergent. Tilsvarende for  $S_{2m}$ . Men vi har

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (S_{2m+1} - S_{2m}) = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1} = 0$$

Det følger at de to grenseverdiene er like, og vi har vist resultatet.  $\square$

Den alternerende harmoniske rekke konvergerer siden  $\frac{1}{k} \rightarrow 0$  når  $k \rightarrow \infty$ . Et annet eksempel på en konvergent alternerende rekke er  $\sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$ . Også her vil det generelle leddet gå mot 0. Vi har i dette tilfelle en vakker formel som vi skal bevise litt senere:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

Det er verdt å merke seg at i motsetning til en rekke med kun positive ledd, er det for en alternerende rekke helt vesentlig å beholde rekkefølgen av leddene. Følgende eksempel illustrerer dette poenget:

Vi har sett at den alternerende rekke

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$$

konvergerer mot  $\frac{2}{3}$ . Dersom vi stikker om på leddene og skriver

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{2} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} - \frac{1}{8} + \dots$$

så vil rekke fortsatt konvergere, men mot et tall som er ekte større enn  $\frac{2}{3}$ .

## Oppgaver

**Oppgave 1.** Avgjør om hver følge  $\{a_n\}$  konvergerer eller divergerer. Finn grenseverdien dersom den eksisterer.

- a)  $a_n = 2 + \left(\frac{3}{5}\right)^n$
- b)  $a_n = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^n$
- c)  $a_n = 2 + (-1)^n$

**Oppgave 2.** De gamle babylonerne hadde en metode for å beregne kvadratrøtter. De valgte en startverdi  $x_0 > 0$ , nær verdien de forventet for  $\sqrt{T}$  og definerte

$$x_n = \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{T}{x_{n-1}} \right)$$

Så regnet de ut  $x_1, x_2, \dots$  inntil  $x_{n-1} \approx x_n$ , og dermed var  $\sqrt{T} \approx x_n$ . Vis at  $x_n \rightarrow \sqrt{T}$  når  $n \rightarrow \infty$ .

**Oppgave 3.** Finn de fire første leddene i hver rekke  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  og regn ut delsummen  $S_3 = \sum_{n=0}^3 a_n$ .

- a)  $a_n = 3^n$
- b)  $a_n = \frac{n+2}{n+1}$

**Oppgave 4.** Skriv opp hver rekke ved hjelp av summetegn

- a)  $\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \dots$
- b)  $3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$
- c)  $2 + \frac{3}{2} + \frac{9}{8} + \frac{27}{32} + \dots$

**Oppgave 5.** Finn summen av de geometriske rekkene

- a)  $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \dots$
- b)  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \dots$

**Oppgave 6.** I en geometrisk rekke med positive ledd er det andre leddet lik  $\frac{3}{4}$  og det fjerde lik  $\frac{1}{3}$ . Finn summen av rekka.

**Oppgave 7.** Vi har gitt  $x$  ved en rekke og danner  $3x$ :

$$\begin{aligned} x &= 1 - 3 + 9 - 27 + 81 - 243 + \dots \\ 3x &= 3 - 9 + 27 - 81 + 243 - \dots \end{aligned}$$

Summen av rekkene gir  $x = \frac{1}{4}$ . Det stemmer åpenbart ikke. Hvor ligger feilen?

**Oppgave 8.** Bruk integraltesten til å avgjøre om hver rekke konvergerer eller divergerer.

- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$
- b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$
- c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$
- d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

**Oppgave 9.** Avgjør om de alternerende rekkene konvergerer eller divergerer.

- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$
- b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3+1}$
- c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^2+3}}$
- d)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

**Oppgave 10.** a) Vis at rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

konvergerer.

b) Prøv å regne ut summen av rekka. (Hint: Bruk delbrøkoppstilling.)

**Oppgave 11.** Undersøk om rekka

$$\frac{1}{3} - \frac{4}{3^2} + \frac{9}{3^3} - \frac{16}{3^4} + \dots$$

konvergerer eller divergerer.

## Kapittel 4

# Taylorrekke-utvikling

Mange funksjoner kan være vanskelige å håndtere, f.eks. er det ikke spesielt enkelt å regne ut funksjonsverdiene til funksjonen  $f(x) = e^{x^2}$ , langt mindre å integrere funksjonen. Som vi har sett i forrige kapittel er en metode til å studere slike funksjoner å tilnærme dem med kjente og mer anvendelige funksjoner. Det vanligste er å bruke polynomer. I forrige kapittel så vi på summen av rekker som en funksjon. Nå skal vi starte i motsatt ende, med en funksjon og finne en **rekkeutvikling** for denne funksjonen. Vi skal altså forsøke å finne en rekke som best mulig svarer til funksjonen. Aller helst vil vi at de to uttrykkene, funksjonen og rekkeutviklingen, skal gi identisk resultat når vi evaluerer i et vilkårlig punkt. Vi skal se hvordan dette kan gjøres, og også studere hvor stort avvik fra originalfunksjonen disse approksimasjonene gir.

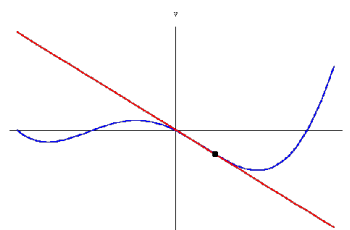
### 4.1 Taylorpolynom

Hvis vi kjenner verdien av en kontinuerlig og deriverbar funksjon i et punkt og også verdien av dens deriverte i punktet, så kan vi anslå verdien til funksjonen i nærliggende punkter. Eller i en mer praktisk setting: Hvis vi er ute og går, så vil posisjon og fart på ett tidspunkt si mye om hvor vi kommer til å være et par sekunder senere. Men hvis ikke bevegelsen er rettlinjert med konstant fart, kan vi si lite om hvor vi vil være 10 minutter senere. Posisjon og fart i ett punkt vil bestemme en lineær funksjon som beskriver en bevegelse, som i et kort tidsrom faller sammen med vår bevegelse.

Tilsvarende kan vi gjøre for en funksjon  $y = f(x)$ . Vi velger ut et punkt  $x_0$  og beregner den deriverte til  $f(x)$  i dette punktet,  $f'(x_0)$ . Funksjonsverdien og den deriverte i punktet  $x_0$  gir opphav til en lineær funksjon,

$$y = T_{f,x_0}^{[1]}(x),$$

$$T_{f,x_0}^{[1]}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Figur 4.1. Tangentlinja til et punkt på grafen.

som kalles **den lineære approksimasjonen** eller **lineariseringen** til  $f$  i  $x_0$ . Den lineære approksimasjonen definerer en rett linje og grafen til den lineære approksimasjonen tangerer funksjonen i punktet  $(x_0, f(x_0))$  (se figuren over).

Den røde linja illustrerer tangentlinja til den blå grafen i det markerte punktet. Den lineære approksimasjonen gir oss en tilnærming til funksjonen i en liten omegn om  $x_0$ .

**Eksempel 4.1.1.** La  $f(x) = \sin x$ . Da har vi at  $f(0) = 0$  og  $f'(0) = \cos 0 = 1$ . Den lineære approksimasjonen av  $\sin x$  i 0 er gitt ved linja  $y = x$ .

**Eksempel 4.1.2.** Betrakt funksjonen  $f(x) = 2x + 3$  som allerede er lineær. Vi har da at  $f(c) = 2c + 3$ , og  $f'(c) = 2$ . Det gir  $T_{f,c}^{[1]}(x) = 2c + 3 + 2(x - c) = 2c + 3 + 2x - 2c = 2x + 3$ , og den lineære approksimasjonen til en lineær funksjon er lik funksjonen selv.

**Eksempel 4.1.3.** Vi skal se på lineære approksimasjoner av  $f(x) = x^2 + x + 1$  i to forskjellige punkter;  $c = 1$  og  $c = 2$ . I tilfelle  $c = 1$  har vi  $f(1) = 3$  og  $f'(1) = 3$  og vi får vi  $T_{f,1}^{[1]}(x) = 3 + 3(x - 1) = 3x$ . For

$c = 2$  derimot har vi  $f(2) = 7$  og  $f'(2) = 5$ , som gir  $T_{f,2}^{[1]}(x) = 7 + 5(x-2) = 5x - 3$ . Vi merker oss at de to lineære approksimasjonene ikke er like.

Neste skritt er å prøve å finne polynomer som ikke bare har samme verdi og derivert som  $\sin x$  i  $x = 0$ , men også samme andre-derivert (altså samme krumning), samme tredje-derivert, osv.

**Definisjon 4.1.1.** La  $f$  være en  $n$  ganger deriverbar funksjon i en omegn om punktet  $x = a$ . Et polynom  $T_{f,a}^{[n]}(x)$  av grad  $n$  som er slik at  $T_{f,a}^{[n]}(a) = f(a)$  og som i tillegg oppfyller

$$\frac{d^j}{dx^j} T_{f,a}^{[n]}(x)|_{x=a} = f^{(j)}(a) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

kalles **Taylor-polynomet** av grad  $n$  til funksjonen  $f$ .



Taylor-polynomene er oppkalt etter opphavsmannen, den engelske matematikeren Brook Taylor (1685-1731). Taylor ga en formel for å beregne Taylorpolynomet til en funksjon.

**Teorem 4.1.2.** La  $f$  være en  $n$  ganger deriverbar funksjon i en omegn om punktet  $x = a$ . Taylorpolynomet til  $f$  av grad  $n$  er gitt ved

$$T_{f,a}^{[n]}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

*Bevis.* Det er lett å forvise seg om at  $T_{f,a}^{[n]}(x)$  og  $f(x)$  har samme verdi og samme (høyere) deriverte i punktet  $x = a$ .  $\square$

Vi skal gjøre et eksperiment av litt samme type som vi gjorde med hensyn til lineær approksimasjon av lineære funksjoner. Nå skal vi se på en kvadratisk approksimasjon av en kvadratisk funksjon, og gjøre analysen i to forskjellige punkter. Vi husker at de lineære approksimasjonene ble forskjellige.

**Eksempel 4.1.4.** Vi betrakter igjen polynomet  $f(x) = x^2 + x + 1$ . Vi har  $f'(x) = 2x + 1$  og  $f''(x) = 2$ . Det gir for  $a = 1$ :

$$\begin{aligned} T_{f,1}^{[2]}(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2 \\ &= 3 + 3(x-1) + \frac{1}{2} \cdot 2(x-1)^2 \\ &= 3 + 3x - 3 + x^2 - 2x + 1 = x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

Setter vi inn for  $a = 2$  får vi

$$\begin{aligned} T_{f,2}^{[2]}(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{1}{2}f''(2)(x-2)^2 \\ &= 7 + 5(x-2) + \frac{1}{2} \cdot 2(x-2)^2 \\ &= 7 + 5x - 10 + x^2 - 4x + 4 = x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

Mao, de to Taylorpolynomene blir like i dette tilfellet. Tar vi som utgangspunkt at Taylorpolynomet av grad 2 er det polynomet av grad 2 som best tilnærmer funksjonen er ikke dette spesielt overraskende, siden en funksjon alltid er den beste mulige approksimasjonen av seg selv.

**Eksempel 4.1.5.** Vi skal finne Taylorpolynomet til  $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$  av grad 3 i punktet  $x = 0$ . Vi har  $f(0) = 1$  og videre

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \\ f''(x) &= \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \\ f^{(3)}(x) &= \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

som gir

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{1}{2} \\ f''(0) &= \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \\ f^{(3)}(0) &= \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} T_{f,0}^{[3]}(x) &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2!}\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3!}\frac{3}{8}x^3 \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 \end{aligned}$$

**Eksempel 4.1.6.** Vi skal finne Taylorpolynomet av grad 3 om  $x = 1$  til funksjonen  $g(x) = x^{\frac{1}{p}}$  for et positivt heltall  $p$ . Vi har

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{p}x^{\frac{1}{p}-1} = \frac{1}{p}x^{\frac{1-p}{p}} \\ g''(x) &= \frac{1-p}{p^2}x^{\frac{1-p}{p}-1} = \frac{1-p}{p^2}x^{\frac{1-2p}{p}} \\ g^{(3)}(x) &= \frac{(1-p)(1-2p)}{p^3}x^{\frac{1-2p}{p}-1} = \frac{(1-p)(1-2p)}{p^3}x^{\frac{1-3p}{p}} \end{aligned}$$

Dette gir

$$T_{g,1}^{[3]}(x) = 1 + \frac{1}{p}(x-1) + \frac{1}{2} \frac{1-p}{p^2}(x-1)^2 + \frac{1}{6} \frac{(1-p)(1-2p)}{p^3}(x-1)^3$$

Dersom vi setter inn  $p = 2$  får vi

$$T_{g,1}^{[3]}(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 = \frac{1}{16}(5 + 15x - 5x^2 + x^3)$$

Dette kan vi sammenlikne med resultatet i eksemplet over; de to rekkeutviklingene er like. I det ene tilfellet utvikler vi  $\sqrt{1+x}$  om  $x = 0$ , og i det andre  $\sqrt{x}$  om  $1$ .

## 4.2 Restleddsestimater\*

Målet med Taylorpolynomene er å approksimere en gitt funksjon med enklere funksjoner, i vårt tilfelle med polynomer. Jo høyere grad, jo bedre tilnærming. Dessuten vil tilnærmingen alltid være best helt i nærheten av punktet vi utvikler om. Spørsmålet er hvor stor feil vi gjør når vi erstatter funksjonen med et Taylorpolynom av grad  $n$ . Vi betegner denne feilen med  $E_n$ .

**Teorem 4.2.1.** La  $f$  være  $n+1$  ganger deriverbar i et intervall som inneholder  $x = a$ . La  $T_{f,x_0}^{[n]}(x)$  være Taylorpolynomet til  $f$  av grad  $n$ . Da har vi

$$E_n = f(x) - T_{f,x_0}^{[n]}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

for en  $c$  mellom  $a$  og  $x$ .

Vi kan ikke gi en eksakt verdi for restleddet  $E$ , siden vi ikke vet hva  $c$  er, men vi kan i veldig mange tilfeller gi et godt estimat, i det minste finne en øvre begrensning for restleddet.

**Eksempel 4.2.1.** Funksjonen i eksempel 4.1.5,  $f(x) = \sqrt{x+1}$  har fjerde-derivert  $f^{(4)}(x) = (-\frac{5}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{1}{2})\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{7}{2}}$ , og feilestimatet blir

$$E_4 = -\frac{5}{128}(1+c)^{-\frac{7}{2}}x^4$$

for en  $c$  i intervallet  $[0, x]$ . Hvis vi skal beregne  $f(\frac{3}{2})$  og vil bruke Taylorrekka, trenger vi å ha kontroll på hvor stor feil vi gjør, mao. finne en øvre grense for feilestimatet. Problemet vil være faktoren  $(1+c)^{-\frac{7}{2}}$  siden

vi ikke kjenner verdien av  $c$ , men bare vet at den ligger i et bestemt intervall. Det er imidlertid lett å se at  $(1+c)^{-\frac{7}{2}} \leq 1$  for alle  $0 \leq c \leq \frac{3}{2}$ , og vi får

$$|E_4| = \frac{5}{128}(1+c)^{-\frac{7}{2}}|x|^4 \leq \frac{5}{128}(\frac{3}{2})^4 \approx 0.2$$

Setter vi inn for  $x = \frac{3}{2}$  i  $T_{f,x_0}^{[3]}(x)$  får vi

$$T_{f,0}^{[3]}(\frac{3}{2}) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{8}(\frac{3}{2})^2 + \frac{1}{16}(\frac{3}{2})^3 = \frac{215}{128} \approx 1.68$$

og vi kan konkludere med at  $1.48 \leq f(\frac{3}{2}) \leq 1.88$ .

**Eksempel 4.2.2.** Vi skal se på Taylorpolynomet til  $f(x) = e^x$ . I dette tilfellet er  $f^{(n)}(x) = e^x$  for alle  $n \geq 1$ , og vi har  $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ . Setter vi dette inn i formelen får vi Taylorpolynom

$$T_{exp,0}^{[n]}(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$$

med restledd

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!}$$

for en  $0 \leq c \leq x$ . Det betyr at  $e^c < e^x$  og derfor

$$|E_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \left| \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \left| \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

Det siste uttrykket vil gå mot 0 når  $n \rightarrow \infty$  for alle valg av  $x$ . Det betyr at vi ved å ta med mange nok ledd i Taylorpolynomet kan få restleddet så lite vi måtte ønske, uansett valg av  $x$ .

I dette eksempelet bruker vi at  $\frac{x^n}{n!} \rightarrow 0$  når  $n \rightarrow \infty$  for alle valg av  $x$ . Grunnen til dette er at  $n!$  vokser mye fortere enn  $x^n$  når  $n$  blir stor. La f.eks.  $N$  være et heltall som er større enn  $2x$ . For  $n > N$  har vi da

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^n \cdot x}{n! \cdot (n+1)} < \frac{x^n \cdot x}{n! \cdot 2x} = \frac{1}{2} \frac{x^n}{n!} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} \cdot \frac{x^N}{N!}$$

Siden  $N$  et fast valgt tall, vil  $\frac{x^N}{N!}$  være et tall som er uavhengig av  $n$ , og  $(\frac{1}{2})^{n-N} \rightarrow 0$  når  $n \rightarrow \infty$ .

**Eksempel 4.2.3.** La  $f(x) = \sin x$ . Vi har alle de deriverte gitt ved

$$f^{(4k+1)}(x) = \cos x$$

$$f^{(4k+2)}(x) = -\sin x$$

$$f^{(4k+3)}(x) = -\cos x$$

$$f^{(4k)}(x) = \sin x$$



og derfor  $f^{(2k)}(0) = 0$ , og  $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ . Det gir Taylorpolynom av grad  $2k + 1$

$$T_{\sin}^{[2k+1]}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

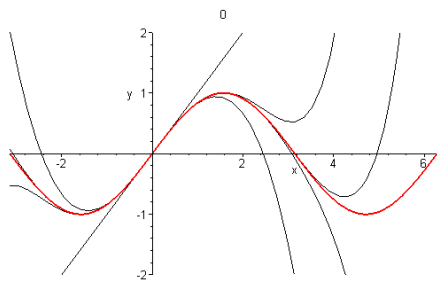
Restleddet er gitt ved

$$E_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)x^{n+1}}{(n+1)!}$$

og vi har

$$|E_n(x)| = \left| \frac{f^{n+1}(c)x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \rightarrow 0$$

når  $k \rightarrow \infty$ . Vi bruker her at  $|\sin x| \leq 1$ , og tilsvarende for  $\cos x$ .



**Figur 4.2.** Grafen til Taylorpolynomet til  $f(x) = \sin x$  av forskjellig grad. Den røde grafen er selve funksjonen.

**Eksempel 4.2.4.** Tilsvarende som for  $\sin x$  får vi for  $\cos x$  Taylorpolynom

$$T_{\cos,0}^{[2k]}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots + (-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k}$$

med nøyaktig samme argument for at restleddet går mot 0 for alle  $x$  som vi ga for  $\sin x$ .

### 4.3 Taylorrekker

Dersom vi stadig øker graden på Taylor-polynomet til en funksjon, vil vi få en bedre og bedre tilnærming av funksjonen, selvfølgelig under forutsetning av at restleddet går mot 0 når graden økes. Denne prosessen leder naturlig fram til definisjonen av Taylor-rekka til en funksjon  $f$  i et punkt  $x = a$ .

**Definisjon 4.3.1.** La  $f$  være en  $\infty$  ganger deriverbar funksjon i en omegn om punktet  $x = a$ . **Taylor-rekka** til  $f$  i punktet  $x = a$  er gitt ved

$$T_{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

For de fleste funksjonene vi kommer borti vil funksjonen og Taylor-rekka til funksjonen være like i nærheten av punktet vi utvikler rekka om. Men vær oppmerksom på at dette ikke alltid er tilfelle. Det er mulig å finne eksempler på konvergente Taylor-rekker som ikke konvergerer mot den opprinnelige funksjonen, annet enn akkurat i punktet vi utvikler rekka om. Et eksempel er funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Her er alle de høyere deriverte til funksjonen i punktet  $x = 0$  lik 0, noe som betyr at Taylor-rekka er identisk lik 0, og derfor ulik funksjonen.

Eksempler på Taylor-rekker som konvergerer mot sin opprinnelige funksjon er

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

og

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

som begge er gyldige for alle  $x$ . Et annet viktig eksempel på en Taylor-rekke som konvergerer mot den opprinnelige funksjonen overalt er eksponentialfunksjonen.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

Vi kan bruke denne rekka til å finne en tilnærmet verdi for  $e$ . Setter vi  $x = 1$  og tar med flere og flere ledd, får vi følgen

$$1, 2, 2.5, 2.667, 2.708, 2.7167, 2.7181, 2.71825, \dots$$

som gir oss en raskt konvergerende tilnærming til  $e$ .

## Opgaver

**Opgave 1.** Regn ut Taylorpolynomiet av grad 3 til  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  om  $x = 0$  og sammenlikn svaret med rekkeutviklingen fra forrige kapittel.

**Opgave 2.** Regn ut Taylorpolynomiet av grad 3 til  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  om  $x = 1$ .

**Opgave 3.** Regn ut Taylorpolynomiet av grad 4 til  $f(x) = \sin^2 x$  om  $x = 0$ .

**Opgave 4.** a) Regn ut Taylorpolynomiet av grad 3 til  $f(x) = x^3 + 2x + 1$  om  $x = 0$ .

b) Regn ut Taylorpolynomiet av grad 3 til  $f(x) = x^3 + 2x + 1$  om  $x = 1$ .

**Opgave 5.** a) Regn ut Taylorpolynomiet av grad 2 til  $f(x) = \ln(x+1)$  om  $x = 0$  og finn restleddet. Gjør et estimat på hvor stort (lite) restleddet er når  $0 \leq x \leq 1$ .

b) Gjør oppgave a), men erstatt grad 2 med grad 3.

**Opgave 6.** Regn ut følgende Taylorpolynom

a) For  $f(x) = \sqrt{x}$ , om  $x = 1$  og med  $n = 4$ .

b) For  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , om  $x = 0$  og med  $n = 4$ .

**Opgave 7.** Regn ut Taylorpolynomiet til  $g(x) = \frac{1}{1-x}$  om  $x = 0$  og med  $n$  ledd. Finn et uttrykk for restleddet og avgjør for hvilke  $x$  restleddet går mot 0 når  $n \rightarrow \infty$ .

**Opgave 8.** En normalfordeling er beskrevet av funksjonen  $f(x) = e^{-x^2}$ . Middelerdien er  $\mu = 0$  og standardavviket er  $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Det er velkjent at vi i dette tilfellet har

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx = 0.6827$$

Bruk Taylorpolynomiet til  $e^x$  av grad 4 til å godtgjøre dette resultatet. (Erstatt  $x$  med  $-x^2$ , integrer ledd for ledd og beregn det bestemte integralet.)

**Opgave 9.** Vis at likhetene gjelder for alle  $x$  ved å ta utgangspunkt i kjente Taylorrekker:

a)  $e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \dots$

b)  $x^2 e^{-x} = x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3!}x^5 + \dots$

c)  $\sin(2x) = 2x - \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^5}{5!}x^5 - \dots$

**Opgave 10.** Bruk rekkeutviklingen til  $\frac{1}{1+x}$  til å vise at

$$\frac{1}{(x+1)^3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + \dots$$

for  $|x| < 1$ .

**Opgave 11.** La  $S$  være verdien av det bestemte integralet  $S = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ .

a) Finn en tilnærmet verdi for  $S$  ved hjelp av trapesmetoden eller Simpsons metode med 10 delingspunkter.

b) Finn Taylorpolynomiet til  $g(u) = \sqrt{1-u}$  av grad 4 om  $u = 0$ .

c) Bruk b) til å skrive opp Taylorpolynomiet til  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  av grad 8 om  $x = 0$ .

d) Bruk Taylorpolynomiet i c) til å finne en tilnærmet verdi for  $S$ .

e) Bruk fundamentalteoremet for differensial- og integralregningen til å vise at

$$\int_0^x \cos^2 t dt = \frac{1}{2}(\sin x \cos x + x)$$

f) Vi kan beregne  $S$  eksakt ved å substituere  $x = \sin t$  i det bestemte integralet og så bruke e). Gjør dette og finn en eksakt verdi for  $S$ .

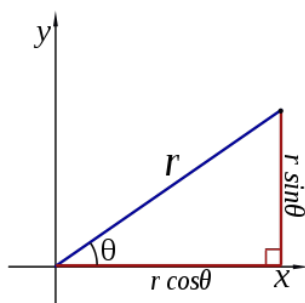
# Kapittel 5

## Polarkoordinater

### 5.1 Koordinatsystemer i planet

La  $P \in \mathbb{R}^2$  være et punkt i planet. For å bestemme punktets posisjon trenger vi et referansesystem. Kartesiske koordinater utgjør et slikt. I et kartesisk koordinatsystem er det gitt to retninger som står normalt på hverandre, og med en målestokk på begge aksene. Et punkt i planet vil ha en entydig referanse til dette systemet, gitt ved punktets koordinater.

Kartesiske koordinatsystem er ikke den eneste måten å koordinatisere punkter i planet. Et alternativ er å bruke **polarkoordinater**. Polarkoordinater tar utgangspunkt i et fast punkt  $O$ , origo, og en retning  $l$  ut fra dette punktet. Et vilkårlig punkt i planet blir målt i forhold til dette systemet, og gitt ved **avstanden**  $r$  til  $O$  og **vinklen**  $\theta$  med linja  $l$ . Dermed blir punktets polarkoordinater  $(r, \theta)$ , hvor  $r \geq 0$  og  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Polarkoordinater er ikke entydige, dvs. at samme punkt kan være gitt ved forskjellige koordinatpar. Origo er gitt ved koordinatene  $(0, \theta)$  for en hvilken som helst vinkel  $\theta$ . Så lenge avstanden er 0 spiller ikke vinkelen noen rolle. Men bortsett fra origo, og med forbehold om at vi kun betrakter vinkler i det halvåpne intervallet  $[0, 2\pi)$ , så er polarkoordinatene entydig bestemt av punktet.



Figur 5.1. Polarkoordinater

Dersom vi lar linja  $l$  være  $x$ -aksen i et kartesisk koordinatsystem, så kan vi beskrive overgangen mellom polarkoordinater og kartesiske koordinater. Anta at et punkt er beskrevet av polarkoordinatene  $(r, \theta)$ . Da vil de kartesiske koordinatene være gitt ved  $x = r \cos \theta$  og  $y = r \sin \theta$ . Motsatt, dersom vi har gitt et punkt i kartesiske koordinater  $(x, y)$ , så vil  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , og vinkelen er bestemt av  $\cos \theta = \frac{x}{r}$ ,  $\sin \theta = \frac{y}{r}$ . Se figur 5.1.

### 5.2 Polare likninger

Grafen til en funksjon  $f$  beskriver en plan kurve, bestående av alle punkter på formen

$$\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

(dersom definisjonsområdet til  $f$  er hele  $\mathbb{R}$ ). Likningen til denne kurven er gitt ved  $y = f(x)$ . Generelt vil nullpunktene til en vilkårlig likning i to variable beskrive en kurve i planet. Eksempelvis vil  $y - x^2 = 0$  beskrive en parabel,  $y + 2x = 3$  beskriver en rett linje, og  $x^2 + y^2 = 3^2 = 9$  beskriver en sirkel med radius  $r = 3$ .

For en del kurver i planet er det mye lettere, og mer praktisk, å bruke polarkoordinater framfor kartesiske koordinater til å beskrive kurven. Dette gjelder spesielt kurver som har en form for *sirkulært* utseende. For eksempel vil en sirkel med radius 3, som i kartesiske koordinater er gitt ved ligningen  $x^2 + y^2 = 9$ , i polarkoordinater være mye enklere beskrevet av ligningen  $r = 3$ .

For en ikke-negativ funksjon  $f$  definert på et intervall  $[a, b]$  kaller vi alle punkter med polarkoordinater  $(r, \theta)$  der  $r = f(\theta)$  for grafen til  $f$  i polarkoordinater, og likningen  $r = f(\theta)$  kalles den **polare likningen** til denne grafen.

**Eksempel 5.2.1.** Lemmiskaten (se figur) har kartesiske

koordinater gitt ved likningen

$$(x^2 + y^2)^2 = a(x^2 - y^2)$$

for en positiv verdi av  $a$ . Setter vi inn  $x = r \cos \theta$  og  $y = r \sin \theta$  får vi på venstre side

$$(x^2 + y^2)^2 = r^4$$

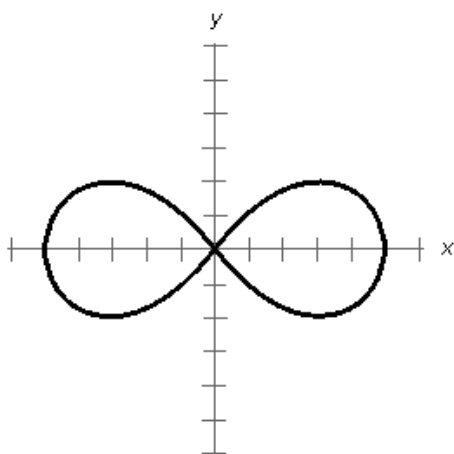
og på høyre side,

$$a(x^2 - y^2) = a(r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) = ar^2 \cos 2\theta$$

Så den polare likningen til lemniskaten blir

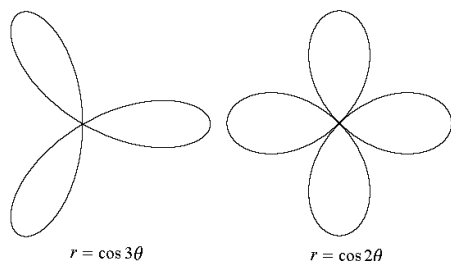
$$r = \sqrt{a \cos 2\theta}$$

hvor vi begrenser definisjonsområdet til de  $\theta$  der  $\cos 2\theta \geq 0$ .

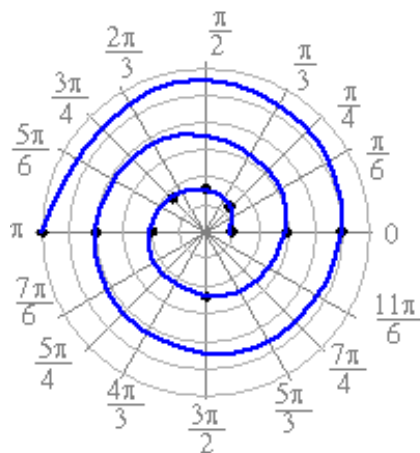


Figur 5.2. Lemniskaten  $r = \sqrt{a \cos 2\theta}$ .

Vi tar med et par andre eksempler også, figuren under viser et trekløver og et firkløver, gitt ved likningene  $r = \cos 3\theta$  og  $r = \cos 2\theta$ , og likningen  $r = a\theta + b$  for ulike valg av  $a$  og  $b$  gir oss en spiral.



Figur 5.3. Trekløver og firkløver.



Figur 5.4. En spiral,  $r = a\theta + b$ .

En sirkel som er sentrert i origo har likningen  $r = R$  i polarkoordinater. Men vi kan også beskrive sirkler med sentrum et annet sted.

**Eksempel 5.2.2.** En sirkel har sentrum i punktet  $(a, b)$  og radius  $R$ . Det betyr at vi har den kartesiske likningen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Setter vi inn  $x = r \cos \theta$  og  $y = r \sin \theta$  får vi

$$\begin{aligned} (r \cos \theta - a)^2 + (r \sin \theta - b)^2 &= R^2 \\ &= r^2 \cos^2 \theta - 2ar \cos \theta + a^2 + r^2 \sin^2 \theta - 2br \sin \theta + b^2 \\ &= r^2 - 2r(a \cos \theta + b \sin \theta) + a^2 + b^2 = R^2 \end{aligned}$$

F.eks. vil en sirkel med radius 1 og sentrum i  $(1, 0)$  ha  $a = 1$ ,  $b = 0$  og  $R = 1$ , som gir

$$r^2 - 2r \cos \theta + 1 = 1$$

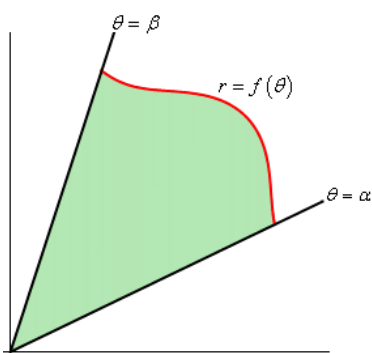
eller

$$r^2 - 2r \cos \theta = r(r - \cos \theta)$$

Det gir  $r = 0$  eller  $r = 2 \cos \theta$ . Den polare likningen  $r = 0$  gir et punkt, mens  $r = 2 \cos \theta$  beskriver den aktuelle sirkelen.

### 5.3 Areal i polarkoordinater

Det finnes en enkel formel for å regne ut arealet ”under” grafen til en polar funksjon. Det grønne området i figuren illustrerer hva vi mener med ”under” grafen.



La oss første se på en sirkelsektor mellom vinklene  $\theta_1$  og  $\theta_2$  og med radius  $r$ . Arealet av en slik sektor er gitt ved

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)r^2 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

Når  $\theta_2 - \theta_1$  er veldig liten, så vil en slik smal sektor av den polare grafen være tilnærmet lik en smal sirkelsektor. Summerer vi mange slike smale sektorer får vi arealet av sektoren. Dette gir oss arealformelen i polarkoordinater.

**Teorem 5.3.1.** En polar funksjon er gitt ved  $r = f(\theta)$  på intervallet  $[\theta_1, \theta_2]$ . Da er arealet  $A$  under den polare grafen gitt ved

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta$$

**Eksempel 5.3.1.** La oss se litt nøyere på firkløveret  $r = \cos 2\theta$ . Vi kan prøve å finne arealet av et blad. De er alle fire like store, så vi konsenterer oss om bladet gitt ved at  $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ . Arealformelen gir

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(2\theta) d\theta$$

Vi kan forenkle integralet ved å bruke formelen  $\cos^2 u = \frac{1}{2}(\cos(2u) + 1)$  som gir

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(4\theta) + 1) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{4} \sin(4\theta) + \theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

## Oppgaver

**Oppgave 1.** Skriv punktene  $(-\sqrt{3}, 3)$ ,  $(-1, -1)$  og  $(\sqrt{3}, -1)$  i polarkoordinater.

**Oppgave 2.** Skriv følgende punkter i kartesiske koordinater:  $(r, \theta) = (8, \frac{5\pi}{6})$ ,  $(r, \theta) = (3, \frac{4\pi}{3})$  og  $(r, \theta) = (5, \frac{3\pi}{2})$ .

**Oppgave 3.** Tegn en skisse av grafen til de polare likningene:

- $r = 5$
- $\theta = \frac{\pi}{3}$
- $r = 2 \cos \theta$
- $r = \frac{3}{\sin \theta}$

**Oppgave 4.** Finn en likning i kartesiske koordinater som beskriver:

- $r = 5$
- $\theta = \frac{\pi}{3}$
- $r = 2 \cos \theta$
- $r = \frac{3}{\sin \theta}$

**Oppgave 5.** Bruk arealformelen til å beregne arealet av en sirkel med radius  $R$ .

**Oppgave 6.** Skisser grafen til den polare likningen  $r = 1 + \cos \theta$ .

**Oppgave 7.** Gjør om den polare likningen  $r = -8 \cos \theta$  til kartesiske koordinater.

**Oppgave 8.** Finn arealet av ett blad av trekløveret gitt ved  $r = \cos(3\theta)$ , hvor  $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$ .

**Oppgave 9.** Finn arealet av en halvdel av lemniskaten gitt ved  $r = \sqrt{a \cos(2\theta)}$ , hvor  $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ .

# Kapittel 6

## Komplekse tall

### 6.1 Komplekse tall

Utgangspunktet for all regning er de **naturlige tallene**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Den berømte matematikeren Leopold Kronecker formulerte dette som *Gud skapte de naturlige tallene, resten er menneskets verk*.

Naturlige utvidelser av de naturlige tallene er de **hele tallene**, hvor vi inkluderer negative tall og 0;

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

og de **rasjonale tallene**, eller brøkene.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Alle de rasjonale tallene har sin plass på tallinjen, men de utgjør ikke alle tallene på tallinjen. Det finnes masse hull, de såkalte **irrasjonale tallene**. Dette er tall som ikke kan skrives som en brøk, slik som f.eks.  $\sqrt{2}$ .

**Proposisjon 6.1.1.**  $\sqrt{2}$  er ikke rasjonal.

(Hopp gjerne over dette beviset hvis du ikke er interessert):

*Bevis.* Anta at  $\sqrt{2}$  kan skrives som en brøk,

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

som er forkortet mest mulig, dvs. at  $m$  og  $n$  ikke har noen felles faktor. Hvis vi kvadrerer begge sider og ganger opp, får vi

$$2n^2 = m^2$$

som betyr at  $m$  må være et partall, vi skriver  $m = 2k$ . Setter vi dette inn i uttrykket over får vi

$$2n^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

eller forkortet

$$n^2 = 2k^2$$

Som betyr at  $n$  også må være et partall. Men vi antok at  $m$  og  $n$  ikke hadde noen felles faktor, så vi har fått en motsigelse. Det betyr at antagelsen vår om at  $\sqrt{2}$  kunne skrives som en brøk må ha vært feil. Altså er  $\sqrt{2}$  et irrasjonalt tall.  $\square$

Dette er et eksempel på en veldig utbredt måte for å bevise matematiske påstander. Det kalles et **kontrapositivt bevis**, vi antar noe og viser at det fører til en motsigelse, noe som viser at antagelsen måtte være gal i utgangspunktet.

Da går vi tilbake til hovedsporet vårt, de komplekse tallene. For å løse 2. gradslikninger bruker vi *abc*-formelen. Gitt en 2.gradslikning

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Løsningene til likningen er gitt ved

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**Eksempel 6.1.1.** I likningen

$$x^2 - x - 1 = 0$$

er  $a = 1$  og  $b = c = -1$  og vi har løsninger

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Men ser vi på likningen

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

vil løsningen være gitt ved

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = 1 \pm \sqrt{-1}$$

Siden alle kvadrater er positive tall vil vi normalt si at den siste likningen ikke har noen løsning. Men før vi gir opp tar vi et blikk tilbake i tid. På 1500-tallet var det stor aktivitet i Italia omkring løsning av 3.gradslikninger. I likhet med 2.gradslikninger, så finnes det en formel for disse løsningene. Flere matematikere var med på utviklingen, fra Scipione del Ferros første resultater i 1510 til Gerolamo Cardano sin endelige og fulle løsning i 1545. Cardano satt lenge og lurte på et problem han hadde med en spesiell likning. Dersom vi ser på 3.gradslikningen

$$(x-1)(x-2)(x+3) = x^3 - 7x + 6 = 0$$

så følger det umiddelbart at løsningene er  $x = 1$ ,  $x = 2$  og  $x = 3$ . Et helt sentralt uttrykk i Cardanos formel er

$$\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

hvor  $p = -7$  og  $q = 6$  er de to koeffisientene i likningen over. Setter vi dette inn i formelen får vi

$$\sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{-7}{3}\right)^3} = \frac{10}{9}\sqrt{-3}$$

og Cardanos formel gir da at en av løsningene er gitt ved

$$\left(-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-3 - \frac{10}{9}\sqrt{-3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Cardano visste at dette tallet ikke fantes. Samtidig visste han at formelen hans var riktig, og at likningen faktisk hadde tre løsninger;  $1, 2, -3$ . Hans konklusjon var at selv om ikke  $\sqrt{-3}$  finnes, så tvinger løsningen av likningen oss til å forholde oss til  $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\sqrt{-1}$ . Siden dette kun var en størrelse vi bare tenkte oss til, og som ikke fantes på den vanlige tallinjen, ga han  $\sqrt{-1}$  navnet **imaginært tall** (ordet betyr *noe vi forestiller oss*). Størrelsen  $\sqrt{-1}$ , som siden har fått betegnelsen  $i$  utgjør sammen med de reelle tall, og alle mulige regnekombinasjoner mellom disse, **de komplekse tallene**.

**Definisjon 6.1.2.** Mengden

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

der  $i^2 = -1$  kalles de komplekse tallene.

La  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  være et kompleks tall. Vi sier at  $\Re(z) = a$  er **realdelen** til det komplekse tallet og  $\Im(z) = b$  er **imaginærdelen**. Det gir  $z = \Re(z) + i\Im(z)$  og to komplekse tall er like hvis og bare hvis realdelene er like og imaginærdelene er like for de to tallene.

Regneoperasjonene for de komplekse tallene følger helt vanlige prinsipper;

**Eksempel 6.1.2.** Addisjon av komplekse tall:

$$(2 + i) + (-1 + 3i) = (2 - 1) + i(1 + 3) = 1 + 4i$$

og multiplikasjon:

$$\begin{aligned} (2 + i) \cdot (-1 + 3i) &= 2(-1) + 2 \cdot 3i + i(-1) + i \cdot 3i \\ &= -2 + 6i - i + 3i^2 \\ &= -2 + 5i - 3 = -5 + 5i \end{aligned}$$

hvor vi har brukt at  $i^2 = -1$ .

Nå kan vi faktisk (med litt strev) regne ut Cardanos løsning og vi finner at

$$\left(-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-3 - \frac{10}{9}\sqrt{-3}\right)^{\frac{1}{3}} = 2$$

Den generelle løsningen av 3.gradslikningen er for øvrig gitt som følger:

Gitt en likning

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Ved å sette  $x = y - \frac{a_2}{3}$  får vi den litt enklere likningen

$$y^3 + py + q = 0$$

hvor  $p = a_1 - \frac{2a_2^2}{3}$  og  $q = \frac{2a_2^3}{27} - \frac{a_2a_1}{3} + a_0$ .

La nå

$$z_{\pm} = \left(-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

og  $\omega$  er et kompleks tall ( $\neq 1$ ) slik at  $\omega^3 = 1$ , dvs.  $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Da vil løsningene av likningen  $y^3 + py + q = 0$  være gitt ved

$$y_1 = z_+ + z_-$$

$$y_2 = \omega z_+ + \omega^2 z_-$$

$$y_3 = \omega^2 z_+ + \omega z_-$$

Når vi regner med komplekse tall vil *abc*-formelen alltid gi oss løsninger av 2.gradslikninger. Men komplekse tall gir oss enda større muligheter. Vi kan faktisk finne løsninger til alle polynomiale likninger. Dette resultatet kalles **algebraens fundamentalsats**.

**Teorem 6.1.3.** La  $P(x)$  være et vilkårlig polynom med reelle (eller komplekse) koeffisienter. Da finnes det et kompleks tall  $z_0 \in \mathbb{C}$  slik at  $P(z_0) = 0$ .

Det finnes mange forskjellige bevis for dette resultatet, og vi henviser til litteraturen for de som måtte være interessert.

## 6.2 Det komplekse planet

En naturlig måte å visualisere de komplekse tallene er som et reelt plan  $\mathbb{R}^2$ . Et kompleks tall  $z = a + ib$  svarer til punktet  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Dette passer godt til den additive strukturen, siden

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \end{aligned}$$

som komplekse tall og

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

som vektorer i planet. Vi sier at et kompleks tall  $z = a + ib$  er på **normalform**. Når vi skal multiplisere sammen komplekse tall kan det ofte være hensiktsmessig å skrive tallet på **polarform**, noe som svarer til å betrakte  $z = a + ib$  som et punkt  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  og så angi dette punktet ved polarkoordinater  $(r, \theta)$ . Overgangen mellom de to formene er som vanlig gitt ved  $a = r \cos \theta$ ,  $b = r \sin \theta$ . Vi kaller  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  for **absoluttverdien** eller **modulus** av det komplekse tallet, mens vinkelen  $\theta$  kalles **argumentet** til  $z$ . Vi skal senere se at vi kan bruke skriveformen

$$z = re^{i\theta}$$

for å uttrykke et komplekst tall  $z$  gitt ved  $(r, \theta)$  på polarform. Merk at modulus av et kompleks tall  $|z|$  alltid er et ikke-negativt tall. F.eks. vil det reelle tallet  $-1$  på polarform være gitt ved  $(r, \theta) = (1, \pi)$ .

**Eksempel 6.2.1.** Vi skal skrive det komplekse tallet  $z = 1 + i$  på polarform. Modulus av tallet er gitt ved  $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ , og argumentet  $\theta$  finner vi ved  $1 = \sqrt{2} \cos \theta$ ,  $1 = \sqrt{2} \sin \theta$ . Den entydige løsningen for  $\theta$  av

$$\cos \theta = \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

er  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

**Eksempel 6.2.2.** Vi skal se hvordan vi kan gå fra polarform til normalform. La  $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ , dvs. gitt ved  $(r, \theta) = (2, \frac{\pi}{3})$ . Da har vi

$$\begin{aligned} z &= 2 \cos \frac{\pi}{3} + 2i \sin \frac{\pi}{3} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 2i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}i \end{aligned}$$

Vi har sett at addisjon av komplekse tall på normalform har en veldig enkel formel, mens det ikke finnes noen tilsvarende måte å addere to komplekse tall på polarform. Derimot har multiplikasjon av komplekse tall en vakker formel når vi representerer dem på polarform;

$$(r_1, \theta_1) \cdot (r_2, \theta_2) = (r_1 r_2, \theta_1 + \theta_2)$$

som passer svært godt med skrivemåten  $z = re^{i\theta}$ . Med denne notasjonen tar multiplikasjon formen

$$r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

som svarer presis til vanlig multiplikasjon av potensfunksjoner. Vi kan gi et formelt argument for denne formelen ved å bruke summeformelene for cosinus og sinus. La

$$\begin{aligned} a_1 + ib_1 &= r_1 \cos \theta_1 + ir_1 \sin \theta_1 \\ a_2 + ib_2 &= r_2 \cos \theta_2 + ir_2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

Da har vi

$$\begin{aligned} (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) &= (r_1 \cos \theta_1 + ir_1 \sin \theta_1)(r_2 \cos \theta_2 + ir_2 \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ &\quad + i \sin \theta_1 \cos \theta_2 + i^2 \cos \theta_1 \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ &\quad + i \cos \theta_1 \sin \theta_2 + i \sin \theta_1 \cos \theta_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

**Eksempel 6.2.3.** La  $z_1 = 1 + i$  og  $z_2 = i$  være to komplekse tall. På polarform har vi

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Addisjon av tallene gjør vi på normalform;

$$z_1 + z_2 = (1 + i) + i = 1 + 2i$$

mens multiplikasjon enklest utføres på polarform;

$$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Vi har sett at modulus av det komplekse tallet  $a + ib$  er gitt ved  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . Vi har også

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2$$

Det følger at

$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(a + ib)(a - ib)}$$



For et kompleks tall  $z = a + ib$  bruker vi betegnelsen **kompleks konjugert** om  $a - ib$ , og skriver  $\bar{z} = a - ib$ . Det gir

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Vi har følgende regneregler for kompleks konjugasjon: La  $z, w \in \mathbb{C}$  være to komplekse tall. Da har vi

$$\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

$$\overline{\bar{z}} = z$$

Ved å bruke de komplekse konjugerte får vi formler for real- og imaginærdelene til et kompleks tall  $z \in \mathbb{C}$  gitt ved

$$\Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Vi har også en formel for den inverse til et kompleks tall

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Merk at nevneren her er et reelt tall. Siden et kompleks tall inneholder en kvadratro (kvadratroten av  $-1$ ), og vi normalt ikke liker å ha kvadratrøtter i nevneren, sørger vi alltid for å fjerne komplekse tall fra nevneren i et svar ved å bruke formelen over.

#### Eksempel 6.2.4.

$$\frac{2+3i}{1-i} = \frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+5i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

#### Eksempel 6.2.5. Vi skal løse likningen

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Ved *abc-formelen* har vi

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Uttrykket  $\mathcal{D} = b^2 - 4ac$  under rottegnet i *abc*-formelen kalles **diskriminanten** til 2. gradslikningen. Dersom  $\mathcal{D} > 0$  har likningen to reelle røtter, dersom  $\mathcal{D} = 0$  så vil likningen ha to sammenfallende røtter (de to røttene er like), og dersom  $\mathcal{D} < 0$ , så har likningen to komplekse røtter, og disse er kompleks konjugerte av hverandre.

Vi kan bruke polarformen til et kompleks tall til å regne ut kvadratrøtter. Vi har sett at for  $z = re^{i\theta}$  så har vi

$$z^2 = (re^{i\theta})^2 = r^2 e^{i(2\theta)}$$

Det betyr at

$$(\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}})^2 = re^{i\theta}$$

Men det betyr også at

$$(\sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)})^2 = re^{i(\theta+2\pi)} = re^{i\theta}$$

siden  $e^{i(2\pi)} = 1$ . Vi har funnet to kvadratrøtter av  $z$ , og siden et tall ikke kan ha mer enn to kvadratrøtter, betyr det at vi har funnet begge røttene.

**Eksempel 6.2.6.** Vi skal regne ut  $\sqrt{-4}$  på denne måten. Vi skriver  $-4$  på polarform;

$$-4 = 4e^{i\pi}$$

Det gir kvadratrøtter

$$2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i \quad \text{og} \quad 2e^{i(\frac{\pi}{2}+\pi)} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$$

Vi kan også regne ut kvadratrøtter av komplekse tall, f.eks.  $\sqrt{3i}$ .

#### Eksempel 6.2.7. Vi skriver $3i$ på polarform

$$3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Kvadratrøttene er gitt ved

$$\begin{aligned} \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{4}} &= \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2}(1+i) \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \sqrt{3}e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi)} &= \sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{2}(1+i) \end{aligned}$$

### 6.3 Eulers formel

Vi kan bruke formalismen rundt rekkeutvikling til å utlede en viktig formel innen kompleks analyse. Selv om hele teorien for rekkeutvikling dreier seg om reelle tall og reelle funksjoner, kan vi driste oss til å late som om de også gjelder for komplekse tall. Så lenge rekkene konvergerer (og de gjør de i dette tilfellet) er det ingen formelle problemer med følgende resonnerment:

**Eksempel 6.3.1.** Vi har rekkeutviklingen for eksponentialfunksjonen

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

og for de trigonometriske funksjonene

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

Setter vi inn  $ix$  for  $x$  i rekkeutviklingen for  $e^x$ , får vi

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \dots \\ &= 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}ix^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}ix^5 + \dots \\ &= (1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots) \\ &\quad + i(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

dvs. at vi har

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Setter vi inn  $x = \pi$  i dette uttrykket får vi det oppsiktsvekkende uttrykket

$$e^{i\pi} = -1$$

som kalles **Eulers formel**.

### Oppgaver

**Oppgave 1.** a) Skriv tallene  $1 - i$ ,  $1 + \sqrt{3}i$  og  $-1$  på polarform.

b) Skriv tallene  $2e^{i\pi}$ ,  $e^{i\frac{\pi}{2}}$  og  $3e^{0i}$  på normalform.

**Oppgave 2.** Skriv følgende komplekse tall på normalform

a)  $(3 + 2i) + (2 + 4i)$

b)  $(3 + 2i)(4 - 3i)$

c)  $i^5 + i + 1$

d)  $(3 + 2i)^2$

**Oppgave 3.** Skriv følgende komplekse tall på normalform

a)  $\frac{1+i}{1-i}$

b)  $\frac{3-i}{1+i}$

c)  $\frac{(2+i)(3-2i)}{1+i}$

d)  $\frac{1}{3+i} - \frac{1}{3-i}$

e)  $\frac{4+7i}{2+5i}$

f)  $(\frac{4i}{1+2i})^2$

**Oppgave 4.** Skriv de komplekse tallene på polarform:

a)  $1 - i$

b)  $1 + \sqrt{3}i$

c)  $3 - 3i$

d)  $3 + 2i$

**Oppgave 5.** Skriv de komplekse tallene på normalform:

a)  $(4, \frac{\pi}{3})$

b)  $(5, \frac{\pi}{2})$

c)  $(3\sqrt{2}, -\frac{3\pi}{4})$

d)  $(4, 13\pi)$

**Oppgave 6.** Regn ut potensene ved å gå via polarformen til de komplekse tallene:

a)  $(3 + 3i)^8$

b)  $(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)^{100}$

**Oppgave 7.** Løs likningene

a)  $x^2 + 9 = 0$

b)  $x^2 + x + 1 = 0$

c)  $3x^2 - 4x + 2 = 0$

d)  $4x^2 - 2x + 7 = 0$

**Oppgave 8.** Løs likningene med hensyn på  $z$ :

a)  $z(2+i) = 3-2i$

b)  $(z+i)(1-i) = 2+3i$

c)  $\frac{1}{z} + \frac{1}{2-i} = \frac{3}{1+i}$

**Oppgave 9.** Finn reelle tall  $x$  og  $y$  som passer i likningen

a)  $\frac{x}{2-i} + \frac{iy}{i+3} = \frac{2}{1+i}$

b)  $\frac{x}{1+i} + \frac{y}{1-2i} = 1$

**Oppgave 10.** La  $z = \cos \theta + i \sin \theta$ . Vis at

a)  $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \theta$

b)  $z^2 + \frac{1}{z^2} = 2 \cos(2\theta)$

**Oppgave 11.** a) La  $w \in \mathbb{C}$  være et kompleks tall,  $w \neq 1$ , slik at  $w^3 = 1$ . Vis at  $1 + w + w^2 = 0$ .

b) Regn ut

$$\frac{(1+w^2)(1-w)}{1+w}$$

**Oppgave 12.** Vis at dersom  $z$  er løsnings av en polynomial likning med reelle koeffisienter, så er også  $\bar{z}$  en løsnings av den samme likningen.

**Oppgave 13.** La  $z, w \in \mathbb{C}$ . Vis at

$$|z-w|^2 + |z+w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

**Oppgave 14.** Finn alle komplekse tall  $z \in \mathbb{C}$  som tilfredsstiller

a)  $|z| = 1$

b)  $|z+1| = |z-1|$

c)  $|z+2i-3| = |z+3i|$

**Oppgave 15.** Finn alle komplekse tall  $z \in \mathbb{C}$  som tilfredsstiller

a)  $z + \bar{z} = 6$

b)  $z^2 - 4iz + 6 = 0$

c)  $3iz - (3+i)\bar{z} = 1+i$

## Kapittel 7

# Funksjoner i flere variable

Vi er ferdig med en-variabel-teorien, og vi skal begynne å jobbe med funksjoner i flere variable. Det første vi skal gjøre er å gå gjennom den samme analysen vi gjorde for funksjoner i en variabel, og se hvordan dette ser ut når vi har flere variable. Hovedfokus er introduksjon av partiell derivasjon. Det skal vi bruke til å finne maksimums- og minimumspunkter og til å definere kritiske punkter. I tillegg skal vi se hvordan vi kan generalisere andre-derivert-testen for funksjoner i en variabel til funksjoner i to variable, gjennom det som kalles Hesse-determinanten.

### 7.1 Definisjoner og eksempler

**Definisjon 7.1.1.** En avbildning

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

kalles en funksjon i  $n$  variable.

**Eksempel 7.1.1.** Funksjonen  $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1x_2 - 2x_2^2$  er en funksjon i to variable.

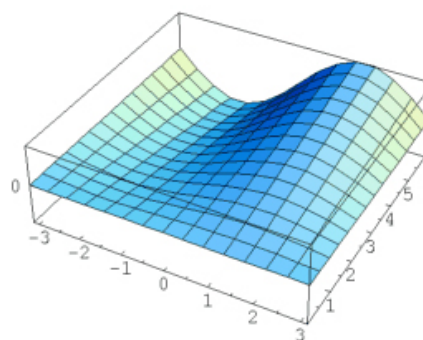
**Eksempel 7.1.2.** Funksjonen  $T(x_1, x_2, x_3)$  som til hvert punkt i rommet tilordner temperaturen i akkurat det punktet er en funksjon i tre variable.

Merk at i tilfellene hvor vi har 2 eller 3 variable, så bruker vi ofte  $x, y$  eller  $x, y, z$  som navn på variablene. Dersom vi har flere enn 3 variable vil vi normalt kalle variablene  $x_1, x_2, \dots$

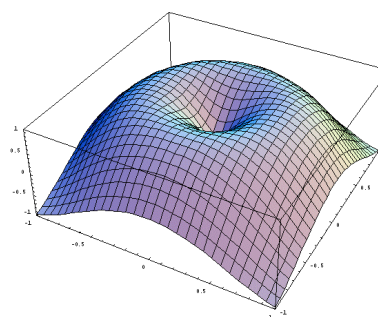
**Grafen** til en funksjon  $f$  i  $n$  variable er gitt ved punkt-mengden

$$\{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$$

Grafen til en funksjon i to variable illustrerer vi med en flate i rommet.



**Figur 7.1.** Grafen til funksjonen  $z = f(x, y) = \frac{y}{6} \cdot \sin x$ .

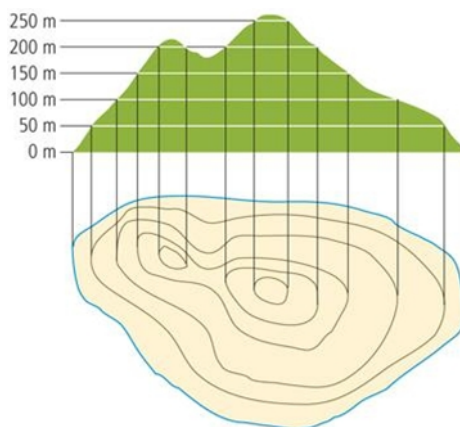


**Figur 7.2.** Grafen til funksjonen  $z = f(x, y) = \sin(\pi \cdot \sqrt{x^2 + y^2})$ .

### 7.2 Nivåmengder

En måte å illustrere funksjoner i to (eller flere) variable er ved å se på funksjonens **nivåmengder**. Nivåmengdene til en flate er kurver langs hvilke funksjonen er konstant. Et eksempel på nivåmengder er

høydekurvene på et kart. I det tilfellet måler funksjonen i et punkt høyden over havet i punktet. Nivåmengdene er kurver hvor vi har konstant høyde. Det betyr at dersom vi beveger oss langs en høydekurve, så går vi verken opp eller ned, men holder oss på samme nivå.



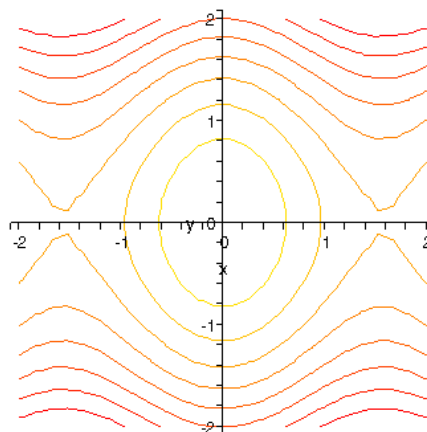
Figur 7.3. Høydekurver

Her er en formell definisjon av nivåmengder.

**Definisjon 7.2.1.** En nivåmengde for en funksjon  $f(x_1, \dots, x_n) = f(\underline{x})$  er delmengden av  $\mathbb{R}^n$  gitt ved  $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\underline{x}) = C\}$  for et reelt tall  $C$ . Nivåmengdene kalles **nivåkurver** når  $n = 2$  og **nivåflater** når  $n = 3$ .

**Eksempel 7.2.1.** La  $(x, y)$  være et punkt på kartet og la  $f(x, y)$  måle høyden over havet i dette punktet. Høydekurvene på kartet er nivåmengdene for denne funksjonen, slik det er illustrert i eksemplet over.

**Eksempel 7.2.2.** Vi skal beskrive nivåkurvene til funksjonen  $f(x, y) = \cos(2x) - y^2$ . Vi setter  $f(x, y) = \cos(2x) - y^2 = C$ , dvs.  $\cos(2x) = y^2 + C$ . For varierende  $x$  vil  $\cos(2x)$  alltid ligge mellom  $-1$  og  $1$ , og  $y^2 = \cos(2x) - C$  må derfor ligge mellom  $-1 - C$  og  $1 - C$ . Siden  $y^2 \geq 0$  følger det at nivåkurvene forsvinner for  $1 - C < 0$ , dvs. for  $C > 1$ . Dersom den minste verdien,  $-1 - C > 0$ , altså  $C < -1$ , så kan vi for alle verdier av  $x$  finne to verdier av  $y$  slik at  $\cos(2x) - y^2 = C$ . Dermed gjenstår intervallet  $-1 \leq C \leq 1$ . I dette området kan vi løse  $\cos(2x) - y^2 = C$  med hensyn på  $y$  for bare noen verdier av  $x$ . Dette forklarer de lukkede (sirkulære) nivåkurvene kontra de utstrukne.



Figur 7.4. Nivåkurver for  $f(x, y) = \cos(2x) - y^2$

### 7.3 Partiell derivasjon

Vi kan generalisere begrepet derivasjon til funksjoner i flere variable. Ideen er at vi tenker oss at alle bortsett fra en av de variable er konstanter. Vi betrakter så denne funksjonen som en funksjon i en variabel. Vanlig derivasjon med hensyn på denne variabelen kalles **partiell derivasjon**. Partiell derivasjon med hensyn på en variabel  $x_i$ , uttrykker funksjonens endring i retningen langs med  $x_i$ -aksen.

**Definisjon 7.3.1.** La  $f(x_1, \dots, x_n)$  være en funksjon i  $n$  variable. Den  $i$ -te **partiell deriverte** av  $f$  er gitt ved

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} f \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\Delta x} \end{aligned}$$

dvs. at vi lar alle  $x_j$ ,  $j \neq i$  opptre som konstanter og deriverer med hensyn på  $x_i$ .

**Eksempel 7.3.1.** Gassloven sier at trykket  $p$  i en beholder med gass er en funksjon av volum  $V$  og temperatur  $T$  av gassen. De partiell deriverte av  $p$  med hensyn på  $V$  og med hensyn på  $T$ ;

$$\frac{\partial p}{\partial V}, \quad \frac{\partial p}{\partial T}$$

gir oss endringen i trykket når vi endrer volum eller temperatur. Spesielt har vi  $\frac{\partial p}{\partial V} < 0$  siden trykket går

ned dersom vi øker volumet av gassen, og  $\frac{\partial p}{\partial T} > 0$  siden trykket øker når temperaturen øker.

**Eksempel 7.3.2.** La  $f(x, y) = \cos(2x) - y^2 + xy$ . Da har vi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2 \sin(2x) + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y + x$$

Nå kan vi la  $x = 0$ , og se på funksjonen  $g(y) = f(0, y) = 1 - y^2$ . Den deriverte av denne funksjonen er  $g'(y) = -2y$ . Dette er det samme som vi får ved å sette inn  $x = 0$  i  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . Tilsvarende kan vi se på  $h(x) = f(x, 1) = \cos(2x) - 1 + x$ . Den deriverte av denne er  $h'(x) = -2 \sin(2x) + 1$ , som er det samme som den partiellderiverte av  $f$  med hensyn på  $x$ , innsatt  $y = 1$ .

**Eksempel 7.3.3.** La  $f(x, y) = \cos(xy)$ . Da har vi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(xy) \cdot y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(xy) \cdot x$$

Nå kan vi fortsette å derivere funksjonen i eksemplet, det gir oss 4 muligheter

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\cos(xy) \cdot y^2 \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\cos(xy) \cdot xy - \sin(xy) \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} &= -\cos(xy) \cdot xy - \sin(xy) \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} &= -\cos(xy) \cdot x^2 \end{aligned}$$

Vi ser at de to i midten er like.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} &= -\cos(xy) \cdot xy - \sin(xy) \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} &= -\cos(xy) \cdot xy - \sin(xy) \end{aligned}$$

Tilfeldighet? Nei. Det er alltid slik at dersom vi først derivere en funksjon med hensyn på en variabel  $x_i$ , for deretter å derivere med hensyn på en annen variabel  $x_j$ , så blir resultatet det samme dersom vi gjør operasjonene i motsatt rekkefølge. Vi skal formulere denne påstanden i et eget teorem, men uten bevis.

**Teorem 7.3.2.** Anta at funksjonen  $f$  har kontinuerlige andre-deriverte. Da er kryssderivasjon uavhengig av rekkefølge:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Vi skal bruke notasjonen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

og hvis  $x_i = x_j$ ;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

**Eksempel 7.3.4.** La  $f(x, y) = x^3 + xy - y^2$ . Da har vi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x - 2y$$

Høyere ordens deriverte

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

Vi har til nå sett på  $\mathbb{R}$ -valuert funksjoner i flere variable. Vi kan generalisere dette til vektor-valuerte funksjoner i flere variable.

**Definisjon 7.3.3.** En avbildning

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

for to heltall  $n, m \geq 1$  kalles en **vektor-valuert funksjon** i  $n$  variable og vi skriver

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

hvor  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  for alle  $i$ .

Funksjonen er en sammenstilling av  $m$  funksjoner i  $n$  variable og derivasjon gjøres komponentvis. Vi skal få bruk for dette i det neste resultatet.

**Eksempel 7.3.5.** Funksjonen  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gitt ved

$$F(x_1, x_2) = (x_2 + x_1, 1 - x_2^2, 3x_1)$$

er en funksjon i 2 variable, hvor funksjonsverdien er en vektor i rommet. F.eks. er  $F(2, 1) = (3, 0, 6)$ .

Partiell derivasjon følger i store trekk de samme regnereglene som vanlig derivasjon. Den deriverte av en sum er summen av de deriverte, den deriverte av en konstant er 0 og produktregelen gjelder. Den regelen som trenger noe mer presisering er kjerneregelen. Vi skal formulere resultatet i den konteksten vi kommer til å trenge det, men det lar seg også generalisere ytterligere.

**Theorem 7.3.4.** La  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  og  $g = (g_1, \dots, g_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . La  $h = f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  være den sammensatte funksjonen. dvs.  $h(t) = f(g(t))$  er en funksjon i en variabel  $t$ . Da har vi

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dg_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dg_n}{dt}$$

Bevis. Vi skriver

$$g(t + \Delta t) = (g_1(t + \Delta t), \dots, g_n(t + \Delta t)) \\ \approx (g_1(t) + \Delta g_1, \dots, g_n(t) + \Delta g_n)$$

hvor  $\Delta g_i \rightarrow 0$  når  $t \rightarrow 0$ . Det gir

$$\frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} = \frac{f(g(t + \Delta t)) - f(g(t))}{\Delta t} \\ = \frac{f(g_1(t) + \Delta g_1, \dots, g_n(t) + \Delta g_n) - f(g(t))}{\Delta t} \\ = \frac{f(g(t) + (\Delta g_1, \dots, \Delta g_n)) - f(g(t))}{\Delta t}$$

Vi skal bruke notasjonen

$$\Delta g^j = (\Delta g_1, \dots, \Delta g_j, 0, \dots, 0)$$

Da har vi

$$f(g(t) + (\Delta g_1, \dots, \Delta g_n)) - f(g(t)) \\ = \sum_{i=1}^n f(g(t) + \Delta g^i) - f(g(t) + \Delta g^{i-1})$$

og derfor

$$\frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} = \frac{f(g(t + \Delta t)) - f(g(t))}{\Delta t} \\ = \sum_{i=1}^n \frac{f(g(t) + \Delta g^i) - f(g(t) + \Delta g^{i-1})}{\Delta g_i} \\ \cdot \frac{g_i(t + \Delta t) - g_i(t)}{\Delta t}$$

Når vi lar  $\Delta t \rightarrow 0$  vil dette uttrykket gå mot summen som er gitt i teoremet.  $\square$

**Eksempel 7.3.6.** Funksjonen  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  er gitt ved  $g(t) = (t^2, t^3)$  og  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  er gitt ved  $f(x, y) = \sqrt{x+y}$ . Vi har  $h(t) = f(g(t)) = \sqrt{t^2 + t^3}$  og for den deriverte

$$h'(t) = \frac{1}{2}(t^2 + t^3)^{-\frac{1}{2}}(2t + 3t^2)$$

Dersom vi bruker formelen for den utvidede kjerneregelen, får vi

$$h'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}2t + \frac{1}{2\sqrt{x+y}}3t^2$$

som ved innsetting for  $x$  og  $y$  gir oss samme uttrykk som over.

**Eksempel 7.3.7.** La  $g(t) = (1, t, e^t)$  og  $f(x, y, z) = xy + \ln z$ . Sett  $h(t) = f(g(t))$ . Da har vi

$$h'(t) = y(t) \cdot 0 + x(t) \cdot 1 + \frac{1}{z(t)} \cdot e^t \\ = t \cdot 0 + 1 \cdot 1 + \frac{1}{e^t} \cdot e^t = 2$$

som stemmer overens med det vi får dersom vi regner ut uttrykket for  $h$  før vi deriverer. I det tilfellet har vi  $h(t) = 1 \cdot t + \ln e^t = 2t$ .

## 7.4 Lokale ekstremalpunkter

Vi starter med den lokale teorien, dvs. at vi skal analysere funksjonenes lokale egenskaper. Lokale egenskaper til en funksjon er egenskaper som måles i punkter og små omegner om dem. Vi skal gjøre denne teorien for funksjoner i to variable, men det er ikke noe særlig forskjell å jobbe med flere variable.

**Definisjon 7.4.1.** Det er to typer lokale ekstremalpunkter:

- i) Funksjonen  $z = f(x, y)$  har et **lokalt minimum** i  $(a, b)$  dersom  $f(a, b)$  er mindre enn eller lik  $f(x, y)$  for alle  $(x, y)$  i nærheten av  $(a, b)$ .
- ii) Funksjonen  $z = f(x, y)$  har et **lokalt maksimum** i  $(a, b)$  dersom  $f(a, b)$  er større enn eller lik  $f(x, y)$  for alle  $(x, y)$  i nærheten av  $(a, b)$ .

Merk at vi bruker samme notasjon for et punkt  $(a, b)$  og et åpent intervall  $(a, b)$ . Det vil (forhåpentligvis) alltid framgå av sammenhengen hva vi snakker om.

Vi kan presisere hva vi mener med i nærheten i dette tilfellet. En sirkelskive  $D$  (eller disk) med sentrum i punktet  $(a, b)$  og radius  $r$  er gitt ved

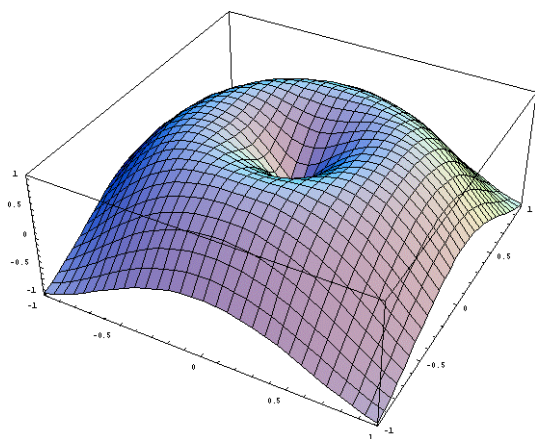
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq r\}$$

Når vi sier at et punkt  $P = (x, y) \neq (a, b)$  ligger i nærheten av  $(a, b)$  mener vi at vi kan finne en disk  $D$  med en (muligens) liten radius  $r > 0$  slik at  $P \in D$ , og hvor den egenskapen til funksjonen vi ønsker å studere gjelder.

**Eksempel 7.4.1.** Funksjonen  $f(x,y) = x^2 + y^2$  har et lokalt minimum i  $(0,0)$  siden  $f(0,0) = 0$  og  $x^2 + y^2 > 0$  når  $x$  og  $y$  ikke begge er 0. Det betyr at uansett hvilken origo-sentrert sirkelskive vi ser på, så vil origo være minimum for funksjonen på denne sirkelskiven.

Funksjonen  $f(x,y) = x^2 + y^2$  har ikke noen lokale maksimumspunkter siden funksjonsverdien vokser over alle grenser når vi beveger oss vekk fra origo.

**Eksempel 7.4.2.** Funksjonen  $z = \sin(\pi \cdot \sqrt{x^2 + y^2})$  har et lokalt minimum i  $(0,0)$  og lokale maksima i  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$  (pluss mange flere som vi ikke ser på figuren). Dette følger siden  $g(0,0) = 0$  og  $g(x,y) = \sin(\pi \cdot \sqrt{x^2 + y^2}) > 0$  i nærheten av origo. På sirkelen  $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$  har vi at  $z = \sin(\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{4}}) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ , som opplagt er maksimumsverdi for en sinus-funksjon.



På samme måte som vi for en funksjon i en variabel leter etter ekstremalpunkter der den deriverte av funksjonen er 0, kan vi lete etter ekstremalpunkter for en funksjon i flere variable der alle de partielt deriverte er 0.

## 7.5 Kritiske punkter

Vi generaliserer begrepet kritisk punkt til teorien for funksjoner i flere variable.

**Definisjon 7.5.1.** Et punkt  $(x,y) = (a,b)$  kalles et **kritisk punkt** dersom de partielt deriverte i punktet enten ikke eksisterer eller er lik 0.

**Eksempel 7.5.1.** Vi deriverer funksjonen  $f(x,y) =$

$\sin(\pi \cdot \sqrt{x^2 + y^2})$  og får

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(\pi \cdot \sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \frac{\pi x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(\pi \cdot \sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \frac{\pi y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Det er lett å se at begge de partiellderiverte er 0 når  $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}$ , mens det ikke er fullt så enkelt å se at de ikke eksisterer når  $x = y = 0$ . Men det gjør de ikke og vi har kritiske punkter både for  $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}$  og for  $(x,y) = (0,0)$ .

Ofte vil det være sammenfall mellom ekstremalpunkter og kritiske punkter, men ikke alltid.

**Teorem 7.5.2.** Dersom  $f(x,y)$  har et lokalt maksimum eller lokalt minimum i  $(a,b)$ , så er  $(a,b)$  et kritisk punkt.

*Bevis.* Anta at  $f(x,y)$  har et lokalt maksimum i  $(a,b)$ . Det betyr at  $f(x,y) - f(a,b) \leq 0$  for alle  $(x,y)$  i nærheten av  $(a,b)$ . Anta videre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \approx \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} > 0$$

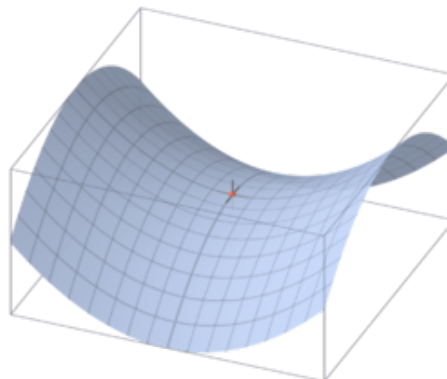
for alle små  $h > 0$ . Dette gir en motsigelse siden vi har antatt at  $f(a+h,b) - f(a,b) \leq 0$ . Anta så at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \approx \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} < 0$$

denne gangen for alle små  $h < 0$ . Igjen får vi en motsigelse.  $\square$

I motsetning til en-variabel-teorien kan vi i flervariabel-teorien ha et slags blandet tilfelle:

**Eksempel 7.5.2.** Vi ser på grafen til funksjonen  $f(x,y) = x^2 - y^2$ .





**Figur 7.5.** Et sadelpunkt.

De partielt deriverte er gitt ved

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

Punktet  $(0,0)$  er et kritisk punkt. Det er et minimumspunkt dersom vi beveger oss gjennom det langs med  $x$ -aksen, og et maksimumspunkt langs med  $y$ -aksen. Dette er det lett å se ved å studere funksjonene

$$f(x,0) = x^2, \quad f(0,y) = -y^2$$

Slike punkter kalles **sadelpunkter**, oppkalt etter sadelen på en hesterygg. Et sadelpunkt er et kritisk punkt på grafen til  $f$ , som verken er et lokalt maksimumspunkt eller et lokalt minimumspunkt.

Det gir oss tre forskjellige typer kritiske punkter for en funksjon  $f(x,y)$ , lokale minima, lokale maksima og sadelpunkter. For å finne ut hva slags punkt vi har, skal vi se på de andrederiverte til funksjonen i det aktuelle punktet. For et punkt  $(a,b)$  lar vi  $H(a,b)$  betegne uttrykket

$$\begin{aligned} H(a,b) &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \right)^2 \end{aligned}$$

den såkalte **Hesse-determinanten**. Vi har følgende resultat (som vi gir uten å føre et bevis):

**Teorem 7.5.3.** La  $f(x,y)$  være en to ganger deriverbar funksjon i to variable og anta at  $(a,b)$  er et kritisk punkt for  $f$ . Da har vi

Dersom  $H(a,b) > 0$  og  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$ , så er  $(a,b)$  et lokalt minimumspunkt.

Dersom  $H(a,b) > 0$  og  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$ , så er  $(a,b)$  et lokalt maksimumspunkt.

Dersom  $H(a,b) < 0$ , så er  $(a,b)$  et sadelpunkt.

Dersom  $H(a,b) = 0$  sier ikke denne testen oss noe.

**Eksempel 7.5.3.** Vi studerer funksjonen  $f(x,y) = x^2 - y^2$ . De partielt deriverte er gitt ved

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

Det betyr at vi har et kritisk punkt for  $(x,y) = (0,0)$ .

De dobbeltderiverte er gitt ved

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

Det gir for Hesse-determinanten i punktet  $(0,0)$ ;

$$H = 2 \cdot (-2) - 0^2 = -4 < 0$$

som sier at det kritiske punktet er et sadelpunkt.

**Eksempel 7.5.4.** Se på funksjonen  $f(x,y) = x^3 - y^2 + xy$ . Vi setter de partielt deriverte  $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y$  og  $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + x$  til å være lik 0, noe som gir oss kritiske punkter  $(0,0)$  og  $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$ . Vi regner ut

$$H(x,y) = 6x \cdot (-2) - 1^2 = -12x - 1$$

Dette gir  $H(0,0) = -1$  og  $H(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}) = 1$ . Samtidig har vi  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}) = -1 < 0$ . Det betyr at  $(0,0)$  er et sadelpunkt og  $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$  er et lokalt maksimum.

## 7.6 Globale ekstremalpunkter

I motsetning til de lokale egenskapene, som sier noe om funksjonen i en liten omegn om et punkt, vil de **globale egenskapene** beskrive funksjonen på hele definisjonsområdet sett under ett. Vi fortsetter med å studere teorien i to variable, fordi det fortsatt er nokså klart hvordan det kan generaliseres til flere variable.

**Definisjon 7.6.1.** (Globale maksimums- og minimumspunkter)

- i) Funksjonen  $z = f(x,y)$  har et **globalt minimum** i  $(a,b)$  dersom  $f(a,b) \leq f(x,y)$  for alle punkter  $(x,y)$  i definisjonsområdet.
- ii) Funksjonen  $z = f(x,y)$  har et **globalt maksimum** i  $(a,b)$  dersom  $f(a,b) \geq f(x,y)$  for alle punkter  $(x,y)$  i definisjonsområdet.

Vi vil omtale funksjonsverdien i de globale minimums- og maksimumspunktene som funksjonens **minimums- og maksimumsverdier** og samlet som funksjonenes **ekstremalverdier**.

Funksjoner trenger ikke å ha globale ekstremalpunkter. Et eksempel er funksjonen  $f(x,y) = x$  definert på hele  $(x,y)$ -planet. Den har ingen globale ekstremalpunkter fordi for alle punkter  $(a,b)$  i planet så vil det finnes punkter  $(x,y)$  i nærheten av  $(a,b)$  slik at  $f(x,y) >$

$f(a, b)$  og andre som oppfyller  $f(x, y) < f(a, b)$ . Funksjonen  $f(x) = x$  har heller ingen ekstremalverdier dersom definisjonsområdet er et åpent område, dvs. et område som ikke inneholder sine randpunkter. På et lukket område derimot, dvs. et område som inneholder alle sine randpunkter, og som i tillegg er begrenset, så har funksjonen  $f(x, y) = x$  både et globalt maksimumspunkt og et globalt minimumspunkt. Begrensede områder i planet er områder der alle punkter har begrenset avstand til origo (dvs. det finnes et tall  $M > 0$  slik at  $\sqrt{x^2 + y^2} < M$  for alle punkter  $(x, y)$  i området).

En kontinuerlig funksjon vil alltid oppnå sine ekstremalverdier dersom definisjonsområdet er et lukket og begrenset område. Dette er innholdet i **ekstremalverdi-teoremet** som vi gjengir uten bevis.

**Teorem 7.6.2.** *En funksjon  $f(x)$  som er kontinuerlig på et lukket, begrenset område  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , vil oppnå sine maksimums- og minimums-verdier i området.*

**Eksempel 7.6.1.** *La  $f(x, y) = x + y + 2$ . Vi skal finne maksimumsverdien til  $f(x, y)$  på enhetskvadratet  $[0, 1] \times [0, 1]$ .*

*De partielt deriverte til funksjonen er konstanter og det finnes derfor ikke noen lokale ekstremalpunkter inne i det indre av området. De fire kantene til enhetskvadratet er gitt ved  $(x, 0)$ ,  $(1, y)$ ,  $(x, 1)$  og  $(0, y)$ , hvor  $x$  og  $y$  ligger mellom 0 og 1. På de fire kantene vil funksjonen være  $f(x, 0) = x + 2$ ,  $f(1, y) = y + 3$ ,  $f(x, 1) = x + 3$  og  $f(0, y) = y + 2$ . Det er enkelt å se at når  $x$  og  $y$  ligger mellom 0 og 1, så vil funksjonen ligge mellom 0 og 4. Det betyr at dette også er globale maksimums- og minimums-verdier.*

## 7.7 Minste kvadraters metode

En interessant, men kanskje noe uventet anvendelse av partiell derivasjon er innen teorien for det som kalles **lineær regresjon** og da spesielt ved bruk av **minste kvadraters metode**. Vi skal se på dette via et konkret eksempel.

Forventet levealder for nyfødte jentebarn i Norge har

utviklet seg slik de siste årene:

2001	81.53
2002	81.52
2003	81.93
2004	82.33
2005	82.52
2006	82.66
2007	82.66
2008	82.95

Vi skal bruke minste kvadraters metode til å finne en formel som beskriver disse tallene. Vi lar  $x$  være år og  $y$  være forventet levealder. Hypotesen vår er at det er en lineær sammenheng mellom disse, dvs.  $y = ax + b$ . Vi indekserer de 8 dataparene fra 1 til 8, slik at f.eks.  $(x_3, y_3) = (2003, 81.93)$ . For hvert par beregner vi avviket fra den antatte rette linja, gitt ved  $ax_i + b - y_i$ . Disse tallene kvadrerer vi og summerer over  $i = 1, 2, \dots, 8$ . Dernest skal vi finne de koeffisientene  $a$  og  $b$  slik at denne kvadratsummen blir minst mulig. Ideen er at vi betrakter kvadratsummen av avvikene fra den rette linja som en funksjon i de to konstantene  $a$  og  $b$  og bruker teorien til å finne minimumspunktet til kvadratsumfunksjonen uttrykt ved alle dataene vi har tilgjengelig.

For å gjøre regningene litt enklere bruker vi år 1, 2, 3 osv. Kvadratsummen blir

$$\sum_{i=1}^8 (ax_i + b - y_i)^2 = a^2 \sum_{i=1}^8 x_i^2 + 2ab \sum_{i=1}^8 x_i + \sum_{i=1}^8 b^2 - 2a \sum_{i=1}^8 x_i y_i - 2b \sum_{i=1}^8 y_i + \sum_{i=1}^8 y_i^2$$

Vi setter inn verdiene og får dette kvadratiske avviket som en funksjon i  $a$  og  $b$  gitt ved

$$Q(a, b) = 204a^2 + 72ab + 8b^2 - 5941a - 1316b + 54139$$

Vi skal finne minimum for denne funksjonen. Vi partiellderiverer med hensyn på  $a$  og  $b$  og setter uttrykkene lik 0. Det gir

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial a} &= 408a + 72b - 5941 \\ \frac{\partial Q}{\partial b} &= 72a + 16b - 1316 \end{aligned}$$

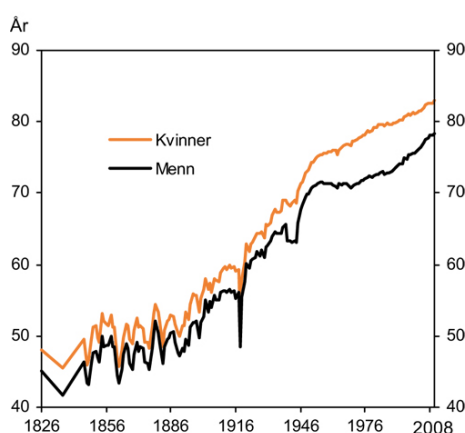
som gir  $a = 0.226$  og  $b = 81.23$  og forventet levealder som en funksjon av årstall blir

$$y = 0.226(x - 2000) + 81.23 = 0.226x - 370.77$$

Sammenlikner vi med de oppgitte tallene får vi

2001	81.53	81.46
2002	81.52	81.68
2003	81.93	81.91
2004	82.33	82.13
2005	82.52	82.36
2006	82.66	82.59
2007	82.66	82.81
2008	82.95	83.04

Forventet levealder ved fødselen



Figur 7.6. Utvikling av forventet levealder.

Vi ser at modellen gir oss en meget bra tilnærming til dataene.

Vi kan sette inn  $x = 1866$  som er SSBs første registrering. Det gir forventet levealder  $y = 50,95$ , mens SSB oppgir 50,65 som gjennomsnitt for perioden 1866-1870. Vår lineære tilnærming er altså ut til å stemme godt. I den motsatte tidsretning ser vi at  $y = 100$  gir  $x = 2083$ , så med samme utvikling vil jentebarn født i 2083 ha en forventet levealder på 100 år.

Gjør vi den samme analysen i en generell setting med datapunkter

$$(x_i, y_i) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

får vi ut likninger for  $a$  og  $b$ ;

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

som kan brukes i alle eksempler.

**Eksempel 7.7.1.** Gitt følgende data for korrespondende høyde og vekt for jentebarn i alderen 5-10 år. Vi skal finne en best mulig lineær sammenheng.

$x$	105	110	118	123	128
$y$	17.1	19.0	20.8	23.0	25.0

132	138	144
27.5	30.5	35.0

Vi regner ut  $\sum x_i = 998$ ,  $\sum y_i = 197.9$ ,  $\sum x_i^2 = 125766$  og  $\sum x_i y_i = 25247.9$ . Setter vi  $\sum x_i = 998$ ,  $\sum y_i = 197.9$ ,  $\sum x_i^2 = 125766$  og  $\sum x_i y_i = 25247.9$  inn i formelen får vi

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

$$= \frac{8 \cdot 25247.9 - 998 \cdot 197.9}{8 \cdot 125766 - (998)^2} \approx 0.4424$$

$$a = 0.4424$$

og

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$= \frac{197.9 - 0.4424 \cdot 998}{8} = -30.5$$

Det gir sammenhengen  $y = 0.4424x - 30.5$  for dataene. For hver centimeter jentene i denne aldersgruppen vokser i høyden, så blir de i gjennomsnitt 442,4 gram tyngre.

## 7.8 Lagranges metode\*

Lagranges metode er en metode for å finne lokale ekstremverdier for funksjoner under bestemte restriksjoner på definisjonsområdet. Tidligere har vi sett at dersom  $f$  er en funksjon på hele rommet  $\mathbb{R}^3$ , finner vi de kritiske punktene til  $f$  ved å regne ut alle de partielt deriverte og sette dem til 0. Imidlertid kan det være at vi har en litt annen problemstilling; hva er f.eks. maksimums- og minimums-verdien til  $f$  over kuleskallet gitt ved  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ ? Ingen av de kritiske punktene trenger å ligge på dette skallet, men siden kuleskallet utgjør en lukket og begrenset flate, så sier ekstremalverdisetningen at funksjonen har både et globalt maksimum, og et globalt minimum på kuleskallet.

Et annet praktisk eksempel er problemet med maksimalt areal av en rektangulær innhegning, når gjerdelengden (omkretsen) er bestemt. Vi skal bruke dette eksemplet til å illustrere Lagranges metode.

Arealet av et rektangel med sidekanter  $x$  og  $y$  er gitt ved  $A(x, y) = xy$ , og gjerde-betingelsen sier at omkretsen  $2x + 2y = C$  skal være konstant. Vi har tidligere løst dette problemet ved å løse likningen  $2x + 2y = C$  med hensyn på variabelen  $y$  og sette dette inn i uttrykket for  $A(x, y)$ . Det gir oss

$$y = \frac{C}{2} - x$$

som vi setter inn i arealfunksjonen;

$$\tilde{A}(x) = A(x, \frac{C}{2} - x) = x(\frac{C}{2} - x) = \frac{C}{2}x - x^2$$

Deriverer vi dette uttrykket og setter det lik 0, får vi

$$\frac{C}{2} - 2x = 0$$

som betyr  $x = \frac{C}{4}$  og dermed  $y = \frac{C}{2} - \frac{C}{4} = \frac{C}{4}$ . Det vil si at de to sidekantene er like lange og vi har et kvadrat. Mao. kvadratet er det av rektanglene med konstant omkrets som har størst areal.

Vi kan vi se på dette på en litt annen måte. Sett  $g(x, y) = 2x + 2y - C$ . Vi skal finne ekstremalpunktene til areal-funksjonen  $A(x, y)$  under **bibetingelsen**  $g(x, y) = 0$ . Metoden vi brukte over var å løse  $g(x, y) = 0$  med hensyn på  $y$ . Det gir oss  $y$  som en funksjon i  $x$ . Vi kaller denne funksjonen  $y = h(x) = \frac{C}{2} - x$ . Da har vi at arealet er gitt ved

$$\tilde{A}(x) = A(x, y) = A(x, h(x))$$

Bruker vi kjernereglen på denne funksjonen og setter svaret lik 0 for å finne ekstremalpunktene, får vi

$$\begin{aligned} \tilde{A}'(x) &= \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \cdot h'(x) = 0 \end{aligned}$$

Det er også en nær sammenheng mellom partielt deriverte av  $g(x, y)$  og den deriverte av  $h(x)$ . Siden  $h(x)$  er definert ved at  $\tilde{g}(x) = g(x, h(x)) = 0$  får vi igjen ved å bruke kjerneregelen og at den deriverte av 0 er 0,

$$\begin{aligned} \tilde{g}'(x) &= \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot h'(x) = 0 \end{aligned}$$

Kombinerer vi de to likningene og eliminerer  $h'(x)$  får vi

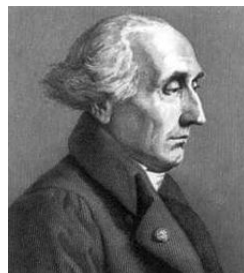
$$\frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

og samtidig skal vi ha  $g(x, y) = 0$ . I vårt eksempel gir dette de to likningene

$$2y - 2x = 0, \quad 2x + 2y = C$$

som igjen gir  $x = y = \frac{C}{2}$ .

Eksemplet vi har beskrevet over kan settes inn i en mer generell setting, det som kalles Lagranges metode. Før vi går inn på detaljene i denne metoden skal vi innføre et begrep vi kommer til å få mer bruk for siden.



Lagranges metode har for øvrig navnet sitt fra den italiensk-franske matematikeren **Joseph Louis Lagrange** (italiensk Giuseppe Lodovico Lagrangia) (1736-1813).

La  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  være en funksjon i  $n$  variable. Vi har tidligere definiert de partielle deriverte av funksjonen. Vi kan samle de partielt deriverte i ett uttrykk, som vi kaller **gradienten** til funksjonen  $f$ .

**Definisjon 7.8.1.** La  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  være en deriverbar funksjon i  $n$  variable. **Gradienten**  $\nabla f(P)$  til  $f$  i punkt  $P = (a_1, \dots, a_n)$  er vektoren

$$\nabla f(P) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(P), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right)$$

Vi skal komme tilbake til flere anvendelser av gradienten. Symbolet  $\nabla$  kalles **nabla**. Det fikk navnet sitt av skotten William Robertson Smith, som var filolog, fysiker, arkeolog og bibelkritiker. Han mente symbolet lignet på en assyrisk harpe, nebela, derav navnet. Symbolet ble først brukt om gradienten av William Rowan Hamilton.

**Teorem 7.8.2.** La  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  være to funksjoner i  $n$  variable med kontinuerlige partiellderiverte. Anta at  $P \in \mathbb{R}^n$  er et ekstremalpunkt for funksjonen  $f$  på nivåmengden

$$g(x_1, \dots, x_n) = C$$

for et reelt tall  $C$ . Anta videre at  $\nabla g(P) \neq 0$ . Da finnes det et reelt tall  $\lambda$  slik at

$$\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$$

Vi tar ikke med noen formelt bevis for dette resultatet, men vi skal se hvordan eksemplet over passer inn i denne formalismen.

**Eksempel 7.8.1.** I eksemplet er  $f(x,y) = xy$  og  $g(x,y) = 2x + 2y$ . Vi beregner gradientene ved å regne ut alle partiellderiverte,

$$\nabla f(x,y) = (y,x) \quad \nabla g(x,y) = (2,2)$$

For en konstant  $C$  sier nå teoremet at det finnes et reelt tall  $\lambda$  slik at

$$(y,x) = \lambda(2,2)$$

Det betyr at  $y = \lambda \cdot 2$  og  $x = \lambda \cdot 2$ . Samtidig må vi huske på at vi kun er interessert i punkter som oppfyller  $2x + 2y = C$ . Vi eliminerer  $\lambda$  fra de to likningene over og får

$$\lambda = \frac{y}{2} = \frac{x}{2}$$

eller  $x = y$ . Vi utelukker tilfellene  $x = 0$  og  $y = 0$  som gir areal lik 0. Dermed står vi igjen med to likninger

$$x = y \quad \text{og} \quad 2x + 2y = C$$

Siden vi kun er interessert i positive størrelser betyr dette at  $x = y = \frac{C}{2}$  som er det samme som vi fant tidligere.

I det første eksempelet kom vi fram til likningen

$$\frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

der vi husker at  $A(x,y)$  var arealfunksjonen og  $g(x,y) = C$  var bibetingelsen. Gradient-likningen  $\nabla A = \lambda \nabla g$  kan vi skrive som

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}\right) = \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}\right)$$

Løser vi ut for  $\lambda$  får vi

$$\lambda = \frac{\frac{\partial A}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial A}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial y}}$$

eller

$$\frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$$

som er akkurat samme likning som vi har fra det første eksempelet.

Det finnes også versjoner at Lagrange metode med flere bibetingelser, men vi skal ikke gå inn på det her.

Vi skal se på noen flere eksempler.

**Eksempel 7.8.2.** Vi skal finne ekstremalverdiene for funksjonen  $f(x,y) = 2x + 4y$  under bibetingelsen  $x^2 +$

$y^2 = 4$ , altså på en sirkel med sentrum i origo og radius 2. Vi regner ut de to gradientene

$$\nabla f = (2,4) \quad \text{og} \quad \nabla g = (2x,2y)$$

Lagrange-likningen

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

gir

$$2 = \lambda \cdot 2x, \quad 4 = \lambda \cdot 2y$$

eller  $(x,y) = (\frac{1}{\lambda}, \frac{2}{\lambda})$ . Nå må vi huske at vi leter etter punkter på sirkelen, dvs. punkter som oppfyller  $x^2 + y^2 = 4$ . Innsetting gir

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 = 4$$

eller

$$5 = 4\lambda^2$$

som betyr at  $\lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ , og for ekstremalpunktene;

$$(x,y) = \pm \left(\frac{1}{\lambda}, \frac{2}{\lambda}\right) = \pm \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

Vi regner ut funksjonsverdien til  $f$  i de to punktene og får

$$f\left(\pm \frac{2}{\sqrt{5}}, \pm \frac{4}{\sqrt{5}}\right) = \pm \left(2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + 4 \cdot \frac{4}{\sqrt{5}}\right) = \pm \frac{20}{\sqrt{5}} = \pm 4\sqrt{5}$$

som gir oss største og minste verdi av  $f$  over sirkelen.

Vi skal se på et eksempel til, i tre dimensjoner. Her blir ofte utgrningene mye mer kompliserte, rett og slett fordi vi får flere likninger å holde styr på. Derfor skal vi se på et eksempel der selve regningen ikke blir så vanskelig.

**Eksempel 7.8.3.** Vi skal finne ekstremalpunkter til funksjonen  $f(x,y,z) = xyz$  når summen av koordinatene er 1, dvs. vi har bibetingelsen  $g(x,y,z) = x + y + z = 1$ . Først regner vi ut de to gradientene

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (yz, xz, xy)$$

og

$$\nabla g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = (1, 1, 1)$$

Vi setter opp Lagrange-likningen

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

som i dette tilfellet gir oss tre likninger

$$yz = \lambda \cdot 1, \quad xz = \lambda \cdot 1, \quad xy = \lambda \cdot 1$$

som gir  $yz = xz = xy$ . En mulig løsning er at to av koordinatene er 0, f.eks.  $x = y = 0$ . Det gir funksjonsverdien  $f(0, 0, z) = 0$ . For alle de tre punktene  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$  og  $(1, 0, 0)$  er funksjonen lik 0, men i en liten omegn om punktene finner vi positive såvel som negative funksjonsverdier. Punktene er derfor sadelpunkter.

Hvis at ingen av koordinatene er 0, kan vi forkorte og det følger at  $x = y = z$ . Nå bruker vi at punktet vi har funnet skal oppfylle bibetingelsen, dvs.  $g(x, y, z) = x + y + z = 1$ , som gir oss løsningen  $x = y = z = \frac{1}{3}$ . Setter vi inn i funksjonen finner vi verdien

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

som er større enn 0. Det betyr at dette er et lokalt maksimumspunkt for funksjonen.

I veldig mange tilfeller må vi kombinere metodene fra dette kapitlet og metoden fra kapittel 8 for å finne ekstremalverdiene til en funksjon. Anta at vi har gitt en funksjon  $f$  definert over et lukket område  $V$  i planet og at vi er interessert i å finne ekstremalpunktene til funksjonen over dette området. Framgangsmåten er at vi først regner ut de kritiske punktene til funksjonen og lokaliserer hvilke (om noen) av disse som ligger i **det indre** av  $V$ . Dette gjør vi ved å regne ut de partielt deriverte og sette alle lik 0. Da har vi fått noen kandidater til maksimums- og minimumspunkter for funksjonen. Det indre av området er alt som ikke ligger på **randa**  $\partial V$  av  $V$ . (Dette er en vanlig notasjon for randa til et område). Hvis  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  er en sirkelskive i planet, så vil det indre av  $V$  være punktmengden  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ , mens randa  $\partial V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ . Vi "deler" altså ulikestegnet  $\leq$  i to deler,  $<$  og  $=$ . Så bruker vi Lagranges metode på randa  $\partial V$ , og finner nye kandidater til ekstremalverdier. For å finne de absolutte ekstremalverdiene sammenlikner vi resultatene og plukker ut største og minste verdi.

**Eksempel 7.8.4.** Vi skal finne største og minste verdi av funksjonen  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy + 1$  over sirkelskiven

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Vi partielt deriverer  $f$  og setter svarene lik 0;

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y - x = 0$$

Dette gir oss et kritisk punkt i  $(0, 0)$ . For å finne ut hva slags punkt dette er bruker vi andre-derivert-testen. De partielle andre-deriverte er gitt ved

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$$

og vi får

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 9$$

og siden  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$  er dette et minimumspunkt, med verdi  $f(0, 0) = 1$ .

Så går vi til randa og Lagranges metode. Vi har allerede regnet ut de partielt deriverte for  $f$ , så vi kan enkelt skrive opp gradienten

$$\nabla f = (2x - y, 4y - x)$$

Vi regner ut gradienten til  $g$  og finner

$$\nabla g = (2x, 2y)$$

For et ekstremalpunkt skal vi kunne finne et reelt tall  $\lambda$  slik at

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$$

eller

$$(2x - y, 4y - x) = \lambda \cdot (2x, 2y)$$

Det gir oss likningene

$$2x - y = 2x\lambda \quad 4y - x = 2y\lambda$$

Vi løser ut med hensyn på  $\lambda$  og får

$$\lambda = \frac{2x - y}{2x} = \frac{4y - x}{2y}$$

som gir relasjonen  $x^2 - 2xy - y^2 = 0$ . Vi bruker at punktene skal ligge på randa  $\partial V$ , dvs. oppfylle  $x^2 + y^2 = 1$ . I dette tilfellet viser det seg å være svært hensiktsmessig å gå over til polarkoordinater. Vi setter  $x = r \cos \theta$  og  $y = r \sin \theta$ . Det gir

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy - y^2 &= r^2 \cos^2 \theta - 2r \cos \theta r \sin \theta - r^2 \sin^2 \theta \\ &= r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - 2 \cos \theta \sin \theta) \\ &= r^2 (\cos 2\theta - \sin 2\theta) = 0 \end{aligned}$$

Bibetingelsen gir i dette eksemplet  $r = 1$ . Dermed blir løsningen gitt ved de  $\theta$  som er slik at  $\cos 2\theta = \sin 2\theta$ .

Det er tilfelle for  $2\theta_1 = \frac{\pi}{4}$  og  $2\theta_2 = \frac{5\pi}{4}$ , dvs.  $\theta_1 = \frac{\pi}{8}$  og  $\theta_2 = \frac{5\pi}{8}$ . For disse vinklene har vi

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

og

$$\cos \frac{5\pi}{4} = \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Verdien i disse punktene er gitt ved

$$\begin{aligned} f(\cos \theta_i, \sin \theta_i) &= \cos^2 \theta_i + 2 \sin^2 \theta_i - \cos \theta_i \sin \theta_i + 1 \\ &= 1 + \sin^2 \theta_i - \cos \theta_i \sin \theta_i + 1 \\ &= 2 + \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta_i) - \frac{1}{2} \sin 2\theta_i \\ &= 2 + \frac{1}{2}\left(1 - \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \pm \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{5}{2} \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Det betyr at maksimumsverdien for funksjonen over området  $V$  er  $\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ , som vi finner på randa, og minimumsverdien er  $1$ , som vi finner i det indre kritiske punktet. Minimumsverdien på randa er  $\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} > 1$  som derfor ikke er minimumsverdien.

## Oppgaver

**Oppgave 1.** Skisser noen nivåkurver for de oppgitte funksjonene over rektangelet  $[-2, 2] \times [-2, 2]$ . Forsøk også å tegne grafen.

a)  $f(x, y) = x + 2$

b)  $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$

c)  $f(x, y) = y^2 - x^2$

**Oppgave 2.** Skisser noen nivåkurver for de oppgitte funksjonene over rektangelet  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ .

a)  $f(x, y) = e^{xy}$

b)  $f(x, y) = \sin^2(\pi x) + \cos(\pi y)$

**Oppgave 3.** Lag en skisse av nivåkurvene til Cobb-Douglas produksjonsfunksjon

$$f(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$$

**Oppgave 4.** Skisser noen nivåkurver for funksjonen  $f(x, y) = \frac{x}{y}$  over det halvåpne rektangelet  $[-1, 1] \times (0, 1]$ .

**Oppgave 5.** Regn ut alle partiellderiverte for funksjonene

a)  $f(x, y) = x^2 + y^3$

b)  $f(x, y) = x + \sin x + 1$

c)  $f(x, y) = x^2 y^2 + xy$

**Oppgave 6.** Regn ut alle partiellderiverte for funksjonene

a)  $f(x, y) = x \sin y + y \sin x$

b)  $f(x, y) = e^{xy}$

c)  $f(x, y) = \frac{x}{y} \quad y \neq 0$

**Oppgave 7.** Regn ut alle partiellderiverte for funksjonene

a)  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$

b)  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 - \frac{1}{2} x_1^2 x_3$

c)  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$

**Oppgave 8.** Finn de dobbeltderiverte av funksjonene og regn ut  $H(x, y)$ .

a)  $f(x,y) = x^2 + y^3$

b)  $f(x,y) = xy$

c)  $f(x,y) = x \sin y$

**Oppgave 9.** Finn de dobbeltderiverte av funksjonene og regn ut  $H(x,y)$ .

a)  $f(x,y) = e^{x+y}$

b)  $f(x,y) = \sin(xy)$

**Oppgave 10.** Finn de kritiske punktene til funksjonene

a)  $f(x,y) = x^2 - 2xy$

b)  $f(x,y) = (y+1)e^x - e^y$

c)  $f(x,y) = 1 - x^2$

**Oppgave 11.** Finn de kritiske punktene til funksjonene

a)  $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$

b)  $f(x,y) = x^2y^2 - 2xy$

c)  $f(x,y) = \ln xy + x - y$

**Oppgave 12.** Finn de kritiske punktene til funksjonene

a)  $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

b)  $f(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$

c)  $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

**Oppgave 13.** Vis at blant alle rektangulære bokser med et gitt volum, så har kuben (alle sider er like lange) den minste overflaten.

**Oppgave 14.** Gitt  $S > 0$ . Vis at blant alle tall  $x$ ,  $y$  og  $z$  slik at  $x + y + z = S$ , så er summen  $x^2 + y^2 + z^2$  minst når  $x = y = z$ .

**Oppgave 15.** Dersom et firma produserer  $x$  artikler av en bestemt vare vil de kunne selge alle til en pris  $p = 5 - 0,0005x$ ,  $0 \leq x \leq 8000$ . Produksjonskostnaden ved å produsere  $x$  artikler er  $C(x) = 500 + x$ . Fortjenesten blir da  $f(x) = (5 - 0,0005x)x - (500 + x)$ .

a) Hvor stor fortjeneste kan firmaet ha med disse varene?

Anta nå at to firmaer produserer samme vare til samme pris og konkurrerer om de samme kundene. Vi antar at de to firmaene produserer henholdsvis  $x$  og  $y$  artikler. Fortjenesten til firma 1 er gitt ved

$$f_1(x,y) = (5 - 0,0005(x+y))x - (500 + x)$$

og for firma 2

$$f_2(x,y) = (5 - 0,0005(x+y))y - (500 + y)$$

b) Anta at begge firmaene maksimerer sin fortjeneste. Hvor stor er den maksimale fortjeneste for hvert firma nå?

c) Dersom firmaene opptrer som en enhet utad og bare deler fortjenesten, hvor mye ville de da kunne tjene? Kommenter forskjellen på svarene i b) og c).

**Oppgave 16.** Et rektangel har hjørner  $(0,0)$ ,  $(0,y)$ ,  $(x,0)$  og  $(x,y)$ . Vis at forholdet mellom kvadratet av omkretsen og arealet tar sin største verdi når  $x = y$ . Hvor stor er denne verdien? Sammenlikn også svarene med forholdet mellom kvadratet av omkretsen og arealet av en sirkel.

**Oppgave 17.** Den generelle gassloven sier at

$$p = \frac{mRT}{V}$$

der  $p$  er trykket i gassen,  $m$  og  $V$  er gassens masse og volum,  $T$  er temperaturen og  $R$  er en konstant. Regn ut de partielt deriverte av  $P$  med hensyn på  $V$  og  $T$ .

**Oppgave 18.** Vi antar at folkemengden  $N = N(t)$  i Norge vokser eksponensielt, etter formelen

$$N(t) = Be^{at}$$

der  $a$  og  $B$  er konstanter og  $t$  er tiden. I vårt eksempel regner vi tiden i tiår og at 1. januar 1900 er 0. Vi skal se på logaritmen til denne funksjonen, gitt ved

$$\ln(N) = \ln(B) + at$$

Antakelsen om at veksten er eksponensiell gir at  $\ln(N)$  vokser lineært med tiden. Følgende tall for befolkningsmengden er observert:

år	1940	1950	1960
$t$ (hele tiår etter 1900)	4	5	6
$N$	2.96	3.25	3.57
$y = \ln(N)$	1.09	1.18	1.27



1970	1980	1990	2000
7	8	9	10
3.68	4.08	4.23	4.48
1.30	1.41	1.44	1.50

der befolkningstallene er i hele millioner. ( $\sum t = 49$ ,  $\sum t^2 = 371$ ,  $\sum y = 9.19$ ,  $\sum ty = 66.21$ )

Bruk minste kvadraters metode til å finne en lineær sammenheng mellom tallene i første og tredje rad og bruk dette til å finne en formel for befolkningsstørrelsen. Når vil vi med denne modellen passere 5 millioner?

**Oppgave 19.** Et firma har de første 9 årene etter oppstart hatt omsetning slik det er beskrevet i tabellen:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.8	1.0	1.4	1.9	2.0	2.6	3.5	4.4	4.7

hvor omsetningen er i hele millioner.

Bruk minste kvadraters metode til å finne en lineær sammenheng mellom omsetningen og antall år etter oppstart. Hva sier modellen om omsetningen i år 10?

**Oppgave 20.** Finn maksimums- og minimumspunktene (hvis de finnes) til funksjonen  $f$  under bibetingelsen

a)  $f(x,y) = 4x + 3y$  når  $x^2 + y^2 = 1$

b)  $f(x,y) = xy$  når  $9x^2 + y^2 = 18$

**Oppgave 21.** Finn maksimums- og minimumspunktene (hvis de finnes) til funksjonen

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

under bibetingelsen  $2x + 3y + 2z = 17$ .

**Oppgave 22.** Bruk Lagranges metode til å maksimere funksjonen  $f(x,y) = xy$  under bibetingelsen  $x + 2y = 200$ .

**Oppgave 23.** Finn maksimums- og minimumsverdien til funksjonen  $f(x,y) = 81x^2 + y^2$  under bibetingelsen  $4x^2 + y^2 = 9$ .

**Oppgave 24.** Finn maksimums- og minimumsverdien til funksjonen  $f(x,y) = 81x^2 + y^2$  under bibetingelsen  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Oppgave 25.** Finn maksimums- og minimumsverdien til funksjonen  $f(x,y,z) = y^2 - 10z$  under bibetingelsen  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ .

**Oppgave 26.** Finn punktene på flaten  $z^2 - xy = 1$  som ligger nærmest origo. Hvor stor er denne avstanden?

**Oppgave 27.** La  $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1) + \frac{1}{2}x^2 + y^2$ . Finn maksimum og minimum til  $f$  over området

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

(Hint: Det kan lønne seg å bytte til polarkoordinater.)

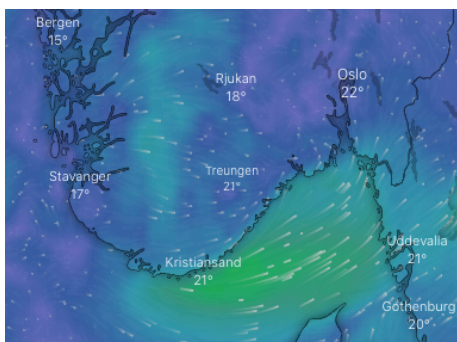
# Kapittel 8

## Vektorfelt

I et tidligere kapittel har vi studert vektor-valuerte funksjoner i flere variable:

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

I dette kapitlet skal vi fokusere på et viktig spesialtilfelle av slike funksjoner; der  $n = m$ . Vi kaller slike funksjoner **vektorfelt**. Grunnen til det er at for hvert punkt  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , så kan vi betrakte funksjonsverdien  $F(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$  som en vektor som starter i punktet  $\mathbf{x}$ . Funksjonen  $F$  tilordner en vektor til hvert punkt i definisjonsområdet. En illustrasjon av vind er et godt eksempel på et vektorfelt. Vi tenker oss at definisjonsområdet er et kart, og i hver punkt på kartet gir vi en vektor. Retningen angir vindretning og lengden på vektoren beskriver vindstyrken. Vi kan selvfølgelig ikke tegne alle pilene, men normalt holder det å tegne noen av dem for å gi et godt bilde av vær-situasjonen.



En annen tolking av et vektorfelt er som et fase-diagram for en kjemisk reaksjon. Som et eksempel kan vi betrakte noen stoffer som reagerer med hverandre. Reaksjonen eller reaksjonene og deres hastighet og retning varierer med konsentrasjonene av de ulike stoffene. For hver kombinasjon av konsentrasjoner  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_m)$  har vi en bestemt vektor

$\mathbf{d} = \mathbf{d}(\mathbf{c}) = (d_1, d_2, \dots, d_m)$  som beskriver endringene av konsentrasjonene. Hvis vi kjenner  $\mathbf{d}$  for alle konsentrasjoner  $\mathbf{c}$ , som igjen betyr at vi kjenner vektorfeltet  $\mathbf{d}$ , så kan vi beskrive nøyaktig hva som skjer i den kjemiske reaksjonen når vi starter med en kombinasjon av konsentrasjoner  $\mathbf{c}$ .

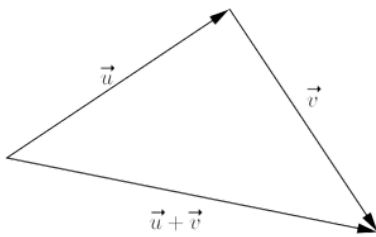
Før vi går dypere inn i teorien for vektorfelt skal vi ta med noen grunnleggende fakta om vektorer.

### 8.1 Vektorer

En vektor kan illustreres geometrisk som en pil, med gitt retning og lengde. Retningen på vektoren følger retningen på pila. To vektorer er like dersom de har samme lengde og retning. Vektorenes plassering i planet (eller rommet) har ingen betydning. To eksempler på vektorer, hentet fra fysikk, er hastighet og kraft. Både hastighet og fart skjer i vektorens retning og lengden av vektoren illustrerer henholdsvis farten og styrken i krafta.

Det er vanlig å bruke fet skrift for å betegne en vektor, som i  $\mathbf{a}$  og  $\mathbf{b}$ , eller ved en pil over vektornavnet, som i  $\vec{a}$ . For lengden av en vektor bruker vi notasjonen  $\|\mathbf{a}\|$ .

Vi kan legge sammen vektorer. Hvis de to vektorene er illustrert ved hver sin pil, finner vi summen av dem ved å legge pilene etter hverandre, som vist på figuren. Summen av vektorene er da gitt ved en pil som starter i startpunktet for den ene vektoren og ender i endepunktet for den andre. Hvis vi multipliserer en vektor med et tall, så beholder vi retningen og endrer lengden i henhold til størrelsen på tallet.



Vektoren  $2\mathbf{a}$  peker dermed i samme retning som  $\mathbf{a}$ , men er dobbelt så lang. Multiplikasjon med negative tall gir oss vektorer i motsatt retning, så vektoren  $-\mathbf{a}$  er like lang som  $\mathbf{a}$ , men peker stikk motsatt vei. Vi kaller multiplikasjon av en vektor med et tall for **skalarmultiplikasjon**. Skalarmultiplikasjon tilfredsstiller de samme reglene som vanlig multiplikasjon, dvs.  $r(s\mathbf{a}) = (rs)\mathbf{a}$  og  $(r+s)\mathbf{a} = r\mathbf{a} + s\mathbf{a}$  for reelle tall  $r$  og  $s$ . Spesielt har vi  $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$ .

Vektoraddisjon er kommutativ ( $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ ), og assosiativ  $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ , dvs. at rekkefølgen på vektorene og vektoraddisjonene ikke spiller noen rolle. Subtraksjon av to vektorer definerer vi ved å kombinere multiplikasjon av en vektor med et negativt tall med vektoraddisjon. Vi definerer null-vektoren  $\mathbf{0}$  som en vektor av lengde 0 og som derfor nødvendigvis ikke har noen retning. Vi har  $0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

Hvis vi legger et kartesisk koordinatsystem på rommet (planet) vi studerer, vil en vektor  $\mathbf{a}$  være gitt ved koordinatene til start- og ende-punktet. Siden vi fritt kan flytte vektorer rundt i rommet kan vi legge start-punktet i origo. Dermed vil vektoren være entydig gitt av sitt endepunkt, og vi kan fritt benytte oss av identifikasjonen  $\mathbf{a} = (a, b, c)$ , der  $(a, b, c)$  er koordinatene til endepunktet. Det kan virke litt forvirrende av vi bruker samme notasjon for en vektor som for et punkt, men grunnen er altså identifikasjonen mellom vektoren og vektorens endepunkt når startpunktet er lagt til origo.

Hvis vi oversetter definisjonen av vektoraddisjon og skalar multiplikasjon til kartesiske koordinater, får vi de naturlige operasjonene for tall-tupler;

$$(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$$

$$\lambda(a, b, c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$$

**Eksempel 8.1.1.** La  $\mathbf{v} = (1, 0, 2)$  og  $\mathbf{w} = (2, -1, 3)$  være to vektorer i  $\mathbb{R}^3$ . Da har vi

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (1, 0, 2) + (2, -1, 3) = (3, -1, 5)$$

og

$$3\mathbf{v} = 3 \cdot (1, 0, 2) = (3, 0, 6)$$

Generelt finnes det ikke noe meningsfullt begrep for å multiplisere vektorer og få en ny vektor som svar. Unntaket er i  $\mathbb{R}^3$  hvor vi har det såkalte kryssproduktet. Vi har imidlertid et annet begrep, skalarprodukt, som kan defineres mer generelt og som har mange nyttige anvendelser.

**Definisjon 8.1.1.** La  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  og  $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$  være to vektorer i  $\mathbb{R}^n$ . **Skalarproduktet** eller **prikproduktet** av  $\mathbf{v}$  og  $\mathbf{w}$  er gitt ved

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$$

Skalarproduktet har mange gode egenskaper.

**Teorem 8.1.2.** La  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  og  $\mathbf{w}$  være vektorer i  $\mathbb{R}^n$ , og  $a, b \in \mathbb{R}$  reelle tall. Da har vi

- i)  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
- ii)  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
- iii)  $a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$
- iv)  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$  og  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$  hvis og bare hvis  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

Egenskap iv) kan vi alternativt skrive som

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + \dots + u_n^2 \geq 0$$

I analogi med lengder beregnet ved hjelp av Pythagoras setning kaller vi

$$\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2} = \|\mathbf{u}\|$$

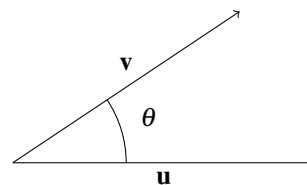
**lengden** til vektoren  $\mathbf{u}$ .

**Eksempel 8.1.2.** La  $\mathbf{v} = (1, 0, 2)$  og  $\mathbf{w} = (2, -1, 3)$ . Da har vi

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 8$$

og

$$\|\mathbf{w}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$



For vektorer i planet er har vi en nyttig alternativ formulering av skalarproduktet. La  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  være to vektorer i planet og la  $\theta$  være vinkelen mellom dem. Da har vi

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos \theta$$

Siden  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$  vil en konsekvens av denne formelen være:

**Teorem 8.1.3.** La  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  være to vektorer i  $\mathbb{R}^n$ , forskjellig fra  $\mathbf{0}$ -vektoren. Da står  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  normalt på hverandre hvis og bare hvis

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Dette resultatet stemmer også for vektorer i  $\mathbb{R}^3$  og det er derfor hensiktsmessig å gi følgende generelle definisjon:

**Definisjon 8.1.4.** Vi sier at to vektorer  $\mathbf{u}$  og  $\mathbf{v}$  i  $\mathbb{R}^n$  står normalt på hverandre dersom

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

## 8.2 Vektorfelt

**Definisjon 8.2.1.** En funksjon

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

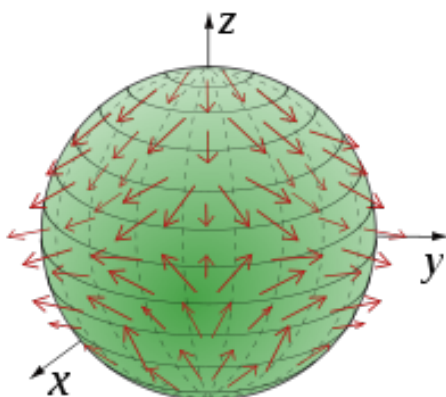
for et naturlige tall  $n \geq 2$  kalles et **vektorfelt**.

Vi beskriver et vektorfelt ved et tuppel av funksjoner

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$$

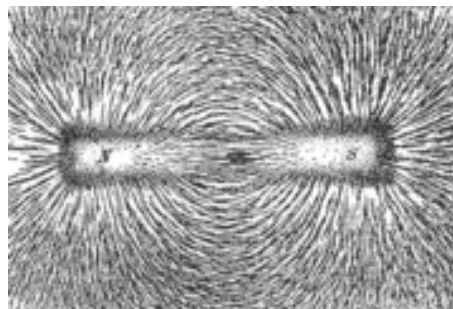
Et eksempel på et vektorfelt er  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gitt ved  $F(x, y, z) = (x^2 + y^2, x^2 + z^2 - 2, y)$ .

**Eksempel 8.2.1.** Hvis vi setter  $n = m = 3$  er et vektorfelt en funksjon som til hvert punkt i rommet tilordner en vektor i rommet. F.eks. vil en funksjon som i hvert punkt i atmosfæren angir vindretning (vektorens retning) og vindstyrke (lengden til vektoren) være et vektorfelt.



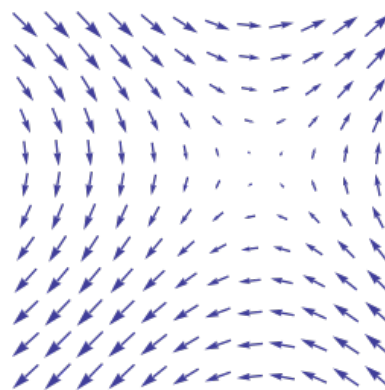
**Figur 8.1.** Vindfelt i atmosfæren.

**Eksempel 8.2.2.** Et magnetfelt kan beskrives av som et vektorfelt. Til et punkt i planet tilordner vi en vektor som angir magnetfeltets retning i dette punktet. Vi kan illustrere magnetfeltet ved å bruke jernfilspon oppå en glasplate med en magnet rett under. Sponet vil da tegne opp feltlinjene, dvs. kurver som i et hvert punkt er parallelle med vektorfeltet.



**Figur 8.2.** Et plant magnetfelt.

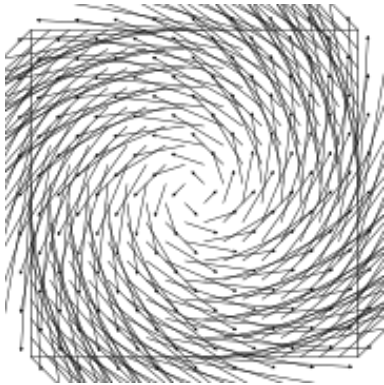
**Eksempel 8.2.3.** La  $F(x, y) = (\sin y, \sin x)$  være et vektorfelt i planet. Vi kan illustrere feltet ved å tegne et passende utvalg av vektorer, en pil i et punkt  $(x, y)$  svarer til vektoren  $(\sin y, \sin x)$ .



**Figur 8.3.**  $F(x, y) = (\sin y, \sin x)$ .

Vi har  $F(0, 0) = (0, 0)$  som svarer til den lyseste delen av diagrammet. Langs  $x$ -aksen vil pilene være vertikale siden  $F(x, 0) = (0, \sin x)$ , og langs  $y$ -aksen vil pilene være horisontale.

**Eksempel 8.2.4.** Vektorfeltet  $F(x, y) = (-y, x)$  i planet kan illustreres slik:



**Figur 8.4.** Et spiralformet vektorfelt.

Feltet blir spiralformet med økende lengde på pilene etter hvert som vi beveger oss bort fra origo.

### 8.3 Gradient

Anta vi har gitt en funksjon i flere variable. Vi kan beregne alle de partielle deriverte og sette dem sammen i et  $n$ -tupel. Dette tupellet beskriver et vektorfelt som vi kaller **gradientfeltet** til funksjonen. Gradientfeltet inneholder informasjon om endringene til funksjonen.

**Definisjon 8.3.1.** La  $f(x_1, \dots, x_n)$  være en funksjon i  $n$  variable. **Gradienten** til  $f$  i punktet  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$  er gitt ved

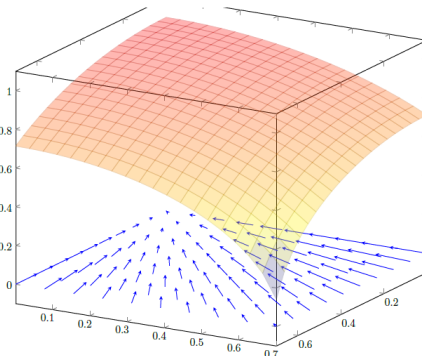
$$\nabla f(\underline{a}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{a}) \right)$$

Gradienten definerer et vektorfelt

$$\nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

som vi kaller **gradientfeltet** til funksjonen  $f$ .

**Eksempel 8.3.1.** Funksjonen  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  har gradient  $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$ . Dette feltet sies å være et **radialfelt**, siden gradienten i hvert punkt er parallell med posisjonsvektoren.



**Figur 8.5.** Gradientfeltet til en funksjon i to variable. Pilene peker i den retningen hvor grafen er brattest. Jo brattere, jo lenger piler.

Gradienten til en funksjon kan brukes til å finne retningen der funksjonen endrer seg mest.

**Teorem 8.3.2.** La  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  være en funksjon i  $n$  variable. Da vil  $\nabla f$  være en vektor som peker i retningen hvor  $f$  vokser mest, dvs gradienten står normalt på nivåmengdene.

*Bevis.* La  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$  være en kurve som er helt inneholdt i en nivåmengde for  $f$ , dvs.  $F(t) := f(\gamma(t)) = C$  for alle  $t$ . Den generaliserte kjerneregelen gir at

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \gamma'_1(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \gamma'_n(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

hvor produktet er vanlig skalarprodukt mellom vektorer. Siden  $F(t) = C$  er konstant vil dette skalarproduktet være 0, som er det samme som at de to vektorene står normalt på hverandre. Kurven  $\gamma(t)$  ligger helt inne i nivåmengden, og den deriverte  $\gamma'(t)$  er derfor tangent til nivåmengden. Men siden gradienten står normalt på alle tangenter, står den normalt på hele mengden. Så gradienten står normalt på nivåmengdene. Funksjonen er konstant langs nivåmengdene og den retningen som gir størst endring er den retningen som er lengst fra å ligge i nivåmengdene, nemlig retningene normalt på nivåmengden.  $\square$

**Eksempel 8.3.2.** Gradienten til funksjonen  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  er  $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$ , mens nivåflatene er kuleskall gitt ved  $x^2 + y^2 + z^2 = C$ . Det stemmer godt med at  $\nabla f = 2(x, y, z)$  står normalt på kuleskallene.

**Eksempel 8.3.3.** La  $f(x, y, z) = xyz$ . Da er  $\nabla f = (yz, xz, xy)$ .

Vi kan bruke gradienten til å beregne endringen av funksjonen langs en vektor. Vi har følgende definisjon.

**Definisjon 8.3.3.** Den **retningsderiverte** til en funksjon  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  i et punkt  $(a_1, \dots, a_n)$  langs en vektor  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ , er gitt ved

$$f_{\mathbf{v}}(a_1, \dots, a_n) = \nabla f(a_1, \dots, a_n) \cdot \mathbf{v}$$

der  $\cdot$  betegner vanlig skalarprodukt mellom to vektorer.

Den retningsderiverte til en funksjon gir endringen av funksjonen langs den aktuelle vektoren. Vi skal ikke bevise dette resultatet generelt, men heller se på et eksempel.

**Eksempel 8.3.4.** Vi betrakter funksjonen  $f(x, y) = 1 - xy + y^2$ . Gradienten er gitt ved  $\nabla f = (-y, -x + 2y)$ . Vi skal studere hvordan funksjonen ser ut i punktet  $(1, 1)$ . Verdien av gradienten i dette punktet er  $\nabla f(1, 1) = (-1, 1)$ . Det betyr at funksjonen har sin største endring i retningen  $(-1, 1)$ .

La  $y = ax + (1 - a)$ . For alle verdier av  $a$  er dette en rett linje som går gjennom punktet  $(1, 1)$  med stignings-tall  $a$ . Vi kan restriktre funksjonen  $f(x, y)$  til denne linja, dvs. vi setter inn  $y = ax + (1 - a)$  i funksjonsuttrykket. Det gir oss verdien av funksjonen langs denne linja, og vi kaller den  $h_a(x)$ . Vi har

$$\begin{aligned} h_a(x) &= f(x, ax + (1 - a)) \\ &= 1 - x(ax + (1 - a)) + (ax + (1 - a))^2 \\ &= (a^2 - a)x^2 + (-2a^2 + 3a - 1)x \\ &\quad + (a^2 - 2a + 2) \end{aligned}$$

Den deriverte av denne funksjonen er gitt ved

$$h'_a(x) = 2(a^2 - a)x + (-2a^2 + 3a - 1)$$

og  $h'_a(1) = 2(a^2 - a) + (-2a^2 + 3a - 1) = a - 1$ .

Retningen til linja  $y = ax + (1 - a)$  er gitt ved vektoren  $\mathbf{v} = (1, a)$ . Det gir

$$f_{\mathbf{v}}(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot (1, a) = (a - 1)$$

og vi ser at de to utregningsmåtene gir samme resultat.

La nå alle retningene gitt ved vektorene  $\mathbf{v} = (1, a)$  for varierende  $a$  ha samme lengde, dvs. vi deler vektorene med sin egen lengde;

$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(1, a)$$

Dette gir oss et uttrykk for verdien av de retningsderivate som en funksjon av  $a$ , gitt ved

$$R(a) = \frac{a - 1}{\sqrt{1 + a^2}}$$

Deriverer vi denne funksjonen med hensyn på  $a$  og setter svaret lik 0 får vi (etter litt regning)

$$R'(a) = \frac{a + 1}{(1 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

eller  $a = -1$ , som passer med det vi fant tidligere, nemlig at den største endringen skjer i retningen langs  $(1, -1)$ . I dette eksemplet trenger vi ikke å bry oss noe om hvor vidt denne retningen gir oss et maksimum eller et minimum. Retningen som gir oss et maksimum vil, med motsatt fortegn gi oss retningen for minimum.

**Eksempel 8.3.5.** Vi har gitt en funksjon  $f(x, y, z) = x^2 + yz + 2z^2 + 1$  og er interessert i å finne den retningsderiverte av  $f(x, y, z)$  langs vektoren  $\mathbf{v} = (2, -1, 0)$  i punktet  $P = (1, 1, 1)$ .

Vi regner først ut gradienten til funksjonen,  $\nabla f = (2x, z, y + 4z)$ , og i punktet  $\nabla f(1, 1, 1) = (2, 1, 5)$ . Det gir retningsderivert langs vektoren  $\mathbf{v} = (2, -1, 0)$  gitt ved

$$\begin{aligned} f_{(2,-1,0)} &= \nabla f(1, 1, 1) \cdot (2, -1, 0) \\ &= (2, 1, 5) \cdot (2, -1, 0) = 3 \end{aligned}$$

## 8.4 Konservative felt

I forrige avsnitt introduserte vi gradienten til en funksjon, som en naturlig generalisering av den deriverte til en funksjon i en variabel. Et naturlig spørsmål å stille i en slik sammenheng er om vi har noe vi kan kalle anti-derivasjon.

**Problem 8.4.1.** Gitt et vektorfelt  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Kan vi finne en funksjon  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  slik at  $F = \nabla f$ ?

Dette er et svært viktig problem, og funksjoner som gir oss et ja-svar på spørsmålet har derfor fått et eget navn.

**Definisjon 8.4.2.** Et vektorfelt  $F$  som er slik at det finnes en funksjon  $f$  slik at  $F = \nabla f$  kalles et **konservativt** vektorfelt, og funksjonen  $f$  kalles et **potensial** for  $F$ .

Vi sier at funksjonen  $f$  er ett potensial, fordi potensialet ikke er entydig. Det finnes mange av dem.

Det er ikke alltid så enkelt å avgjøre om et felt er konservativt, men det er mye enklere å fastslå at et felt *ikke* er konservativt. Det er innholdet i det neste resultatet. Vi gir resultatet for vektorfelt på  $\mathbb{R}^2$ , men tilsvarende resultat finnes for mer generelle vektorfelt i høyere dimensjoner.

**Teorem 8.4.3.** *La  $F(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$  være et vektorfelt på  $\mathbb{R}^2$ . En nødvendig betingelse for at vektorfeltet er konservativt er at*

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

*Bevis.* Et konservativt felt har et potensial slik at  $F = \nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (p, q)$  og

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

□

**Merk.** Selv om denne betingelsen er oppfylt er det ikke sikkert at vektorfeltet har et potensial. F.eks. er betingelsen oppfylt for  $F(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$  (utenfor origo), men i dette tilfellet finnes det ikke noe potensial. Vi skal komme tilbake til dette eksemplet senere.

**Eksempel 8.4.1.** *Vi har gitt et vektorfelt*

$$F(x, y) = (2xy^4, 4x^2y^3)$$

*Vi skal teste om vektorfeltet kan ha et potensial. Vi gjør derivasjonstesten*

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy^4) = 8xy^3 \quad \frac{\partial}{\partial x}(4x^2y^3) = 8xy^3$$

*Det gikk bra, og det er dermed gode muligheter for at det finnes et potensial  $f = f(x, y)$ .*

Når vi har fastslått at det ikke er noe i veien for at det finnes et potensial, melder spørsmålet seg om vi kan finne dette potensialet altså om vi kan *anti-derivere* vektorfeltet.

Dersom et vektorfelt  $F(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$  er konservativt, dvs. at det finnes en funksjon  $f(x, y)$  slik at  $F = \nabla f$ , så vet vi at

$$p(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Betrakter vi variabelen  $y$  som en konstant, kan vi forsøke å anti-derivere  $p(x, y)$  med hensyn på variabelen  $x$ . Anta

at det går bra, og at vi har funnet en funksjon  $h(x, y)$  slik at dens partielt deriverte med hensyn på  $x$  er  $p(x, y)$ ,  $h(x, y)$  er dermed en kandidat til å være et potensial for vektorfeltet. Her må vi imidlertid huske på en viktig detalj, når vi anti-derivere med hensyn på  $x$  og betrakter  $y$  som en konstant, vil integrasjonskonstanten ikke bare være en konstant, men en vilkårlig funksjon i  $y$ . Slike funksjoner vil jo deriveres på 0 når  $y$  betraktes som en konstant og vi derivere med hensyn på  $x$ . Vi skriver derfor  $h(x, y) = f(x, y) + g(y)$ , der  $g(y)$  er en vilkårlig funksjon i  $y$ .

Dersom denne funksjonen skal være en god kandidat til vektorfeltet, må dens partielt deriverte med hensyn på  $y$  være den andre funksjonen  $q(x, y)$ . Vi derivere med hensyn på  $y$  og får

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + g'(y)$$

Dette uttrykket sammenlikner vi med  $q(x, y)$ , dvs. vi setter

$$q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} + g'(y)$$

Dersom vektorfeltet er konservativt kan vi nå alltid finne en funksjon  $g(y)$  slik at dette er oppfylt.

Det er mye lettere å følge denne prosedyren dersom vi tar for oss et konkret eksempel, og vi fortsetter derfor på eksempel 8.4.1.

**Eksempel 8.4.2.** *Vi har gitt vektorfeltet*

$$F(x, y) = (2xy^4, 4x^2y^3)$$

*og har i Eksempel 8.4.1 sett at derivasjonstesten ikke legger noen hindringer i veien for at vektorfeltet har et potensial. Vi må i så fall ha*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^4, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2y^3$$

*Integrerer vi  $2xy^4$  med hensyn på  $x$  får vi  $x^2y^4 + g(y)$ , der  $g(y)$  er en funksjon kun i  $y$  og som forsvinner når vi derivere med hensyn på  $x$ . Vi derivere denne funksjonen med hensyn på  $y$  og sammenlikner med uttrykket over;*

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^4 + g(y)) = 4x^2y^3 + g'(y)$$

*Siden dette skal være lik  $4x^2y^3$  slutter vi at  $g'(y) = 0$  eller at  $g(y) = K$  dvs. konstant. Et generelt potensial er derfor gitt ved*

$$f(x, y) = x^2y^4 + K$$

*og nå har vi funnet alle potensialfunksjonene.*

**Eksempel 8.4.3.** Vi har gitt et vektorfelt

$$\mathbf{F}(x,y) = (3x^2 - 6xy, -3x^2 + 3y^2)$$

Vi skal prøve å finne et potensial for  $\mathbf{F}$ . Vi gjør derivasjonstesten

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 6xy) = -6x, \quad \frac{\partial}{\partial x}(-3x^2 + 3y^2) = -6x$$

Det gikk bra, og det er dermed gode muligheter for at det finnes et potensial  $f(x,y)$  slik at  $\mathbf{F} = \nabla f$ . Vi må i så fall ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2 + 3y^2$$

Integrerer vi  $3x^2 - 6xy$  med hensyn på  $x$  får vi  $x^3 - 3x^2y + g(y)$ , der  $g(y)$  er en funksjon kun i  $y$  og som gir 0 når vi deriverer med hensyn på  $x$ . Vi deriverer denne funksjonen med hensyn på  $y$  og sammenlikner med uttrykket over.

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3 - 3x^2y + g(y)) = -3x^2 + g'(y)$$

Siden dette skal være lik  $-3x^2 + 3y^2$  slutter vi at  $g'(y) = 3y^2$  og  $g(y) = y^3 + K$  hvor  $K$  er en integrasjonskonstant. Et generelt potensial er derfor gitt ved

$$f(x,y) = x^3 - 3x^2y + y^3 + K$$

Merk at det ikke er noe i veien for å bytte om rekkefølgen på anti-derivasjonene med hensyn på  $x$  og  $y$ . Dersom vektorfeltet er konservativt vil svaret uansett bli det samme. Vi kan illustrere dette i eksempelet over.

**Eksempel 8.4.4.** Vi skal finne et potensial for det konservative feltet

$$\mathbf{F}(x,y) = (3x^2 - 6xy, -3x^2 + 3y^2)$$

Vi tar utgangspunkt i

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2 + 3y^2$$

og integrerer  $-3x^2 + 3y^2$  med hensyn på  $y$ . Det gir

$$f(x,y) = \int -3x^2 + 3y^2 dy = -3x^2y + y^3 + g(x)$$

der  $g(x)$  er en funksjon kun i  $x$  og som gir 0 når vi deriverer med hensyn på  $y$ . Vi deriverer denne funksjonen med hensyn på  $x$  og sammenlikner,

$$\frac{\partial}{\partial x}(-3x^2y + y^3 + g(x)) = -6xy + g'(x)$$

Siden dette skal være lik  $3x^2 - 6xy$  slutter vi at  $g'(x) = 3x^2$  og  $g(x) = x^3 + K$  hvor  $K$  er en integrasjonskonstant. Et generelt potensial er derfor gitt ved

$$f(x,y) = x^3 - 3x^2y + y^3 + K$$

som er det samme som vi fant tidligere.

## 8.5 Virvling

Vi har sett at når vi har gitt et vektorfelt  $\mathbf{F}(x,y) = (p(x,y), q(x,y))$  kan vi bruke en derivert-test for å avgjøre om feltet er konservativt, dvs. om det kan skrives som en gradient av en funksjon i flere variable. Testen sammenlikner de partiellderiverte

$$\frac{\partial q}{\partial x} \quad \text{og} \quad \frac{\partial p}{\partial y}$$

og konklusjonen er at likhet er en nødvendig betingelse for at feltet er konservativt. Det betyr at differansen

$$\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}$$

har en viktig rolle i å avgjøre om et felt er konservativt. Uttrykket har fått et eget navn, vi kaller det **virvlingen** til feltet og bruker betegnelsen *curl*.

**Definisjon 8.5.1.** La  $\mathbf{F}(x,y) = (p(x,y), q(x,y))$  være et plant vektorfelt. Vi definerer **virvlingen** til  $\mathbf{F}$ ,  $\text{curl}(\mathbf{F})$  ved

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}$$

Vi skal etter hvert se på hvorfor vi kaller dette for virvling. Vi skal først regne ut virvlingen til noen vektorfelt:

**Eksempel 8.5.1.** La  $\mathbf{F}(x,y) = (x,y)$  være et radially vektorfelt. Da er virvlingen til  $\mathbf{F}$

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}y - \frac{\partial}{\partial y}x = 0$$

så feltet er konservativt, gitt ved  $\mathbf{F} = \nabla f$ , der  $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C$ .

**Eksempel 8.5.2.** La  $\mathbf{F}(x,y) = (-y,x)$  være et sirkulært vektorfelt. Da er virvlingen til  $\mathbf{F}$

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}(-y) = 2$$

dvs. at virvlingen er konstant i hele planet.



**Eksempel 8.5.3.** Et konstant vektorfelt  $\mathbf{F}(x, y) = (a, b)$  har selvfølgelig ikke noen virvling, siden

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}a - \frac{\partial}{\partial y}b = 0$$

Feltet er gradienten til funksjonen  $f(x, y) = ax + by + C$ , dvs. en lineær funksjon.

Navnet virvling indikerer at det er noe ved vektorfeltet som danner en eller annen form for sirkulær bevegelse. Det stemmer, men begrepet er litt mer subtilt enn som så. Selv et vektorfelt der alle pilene peker i samme retning kan ha virvling.

**Eksempel 8.5.4.** La  $\mathbf{F}(x, y) = (y, 0)$  være et vektorfelt der alle pilene peker i  $x$ -retning. Virvlingen til  $\mathbf{F}$  er gitt ved

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}0 - \frac{\partial}{\partial y}y = -1$$

Grunnen til at vi får en ikke-null virvling i dette eksempelet er at størrelsen på feltet øker når vi beveger oss ut fra  $x$ -aksen.

En måte å visualisere virvling er som følger. Vi tenker oss at vi fyller hele planet med mennesker som beveger seg med vektorfeltet. Det betyr at de i et hvert punkt beveger seg i den retningen som feltet foreskriver og med en hastighet gitt ved lengden av vektoren i punktet. For eksempel vil feltet  $\mathbf{F}(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$  i punktet  $(a, b)$  ha retning  $(p(a, b), q(a, b))$  og størrelse  $\sqrt{p(a, b)^2 + q(a, b)^2}$ . For å måle virvlingen i feltet i punktet  $(a, b)$  plasserer vi en stolpe i punktet. Stolpen må bli værende i punktet, men må kunne sirkulere fritt om sin egen akse. Når folkemassen beveger seg med feltet vil virvlingen i stolpen presis beskrive virvlingen i feltet. I det ene eksempelet over så vi at feltet  $\mathbf{F}(x, y) = (y, 0)$  har virvling  $\text{curl}(\mathbf{F}) = -1$  selv om hele køen går i samme retning, langs  $x$ -aksen. Imidlertid går de fortere og fortere jo lenger ut fra  $x$ -aksen vi kommer. Det betyr at en stolpe som er plassert i folkemassen blir skubbet mer på den ene enn den andre siden, og derfor vil rotere.

**Eksempel 8.5.5.** Vi skal regne ut virvlingen til retningsdiagrammet til funksjonen  $y = g(x)$ . Retningsdiagrammet er i hvert punkt gitt som et vektorfelt  $\mathbf{G}(x, y) = (1, g'(x))$ . Virvlingen blir da

$$\text{curl}(\mathbf{G}) = \frac{\partial}{\partial x}g'(x) - \frac{\partial}{\partial y}1 = g''(x)$$

Det betyr at virvlingen i dette tilfellet måles av samme uttrykk som måler funksjonenes krumning.

Vi kan gi en romlig versjon av begrepet virvling. I det tilfellet vil virvlingen være et nytt vektorfelt.

**Definisjon 8.5.2.** La

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (p(x, y, z), q(x, y, z), r(x, y, z))$$

være et vektorfelt i rommet. Vi definerer virvlingen til  $\mathbf{F}$ ,  $\text{curl}(\mathbf{F})$  ved

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = \left( \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z}, \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right)$$

Betrakt nå et vektorfelt i planet, gitt ved at  $r(x, y, z) = 0$  og slik at  $p$  og  $q$  er konstante med hensyn på  $z$ . Alle vektorene i feltet er parallelle med  $xy$ -planet, og for gitte verdier av  $x$  og  $y$  er vektorene de samme for alle valg av  $z$ . Dette er det nærmeste vi kommer en romlig versjon av et plant vektorfelt. Det gir

$$\text{curl}(\mathbf{F}) = \left( 0, 0, \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right)$$

Mao. er virvlingen til et plant vektorfelt gitt ved en retning ut av planet og i den retningen er størrelsen på feltet lik med definisjonen av virvling for et plant vektorfelt. De to definisjonene er dermed konsistente, men vi skal i våre eksempler holde oss til den plane versjonen.

## Oppgaver

### Oppgave 1. Regn ut

- a)  $(2, 3) + (0, 1)$
- b)  $(1, 3, 0) + (2, -1, 1)$
- c)  $(1, 0, 1, 0) + (-1, 1, -1, 1)$

### Oppgave 2. Regn ut

- a)  $(2, 3) \cdot (0, 1)$
- b)  $(1, 3, 0) \cdot (2, -1, 1)$
- c)  $(1, 0, 1, 0) \cdot (-1, 1, -1, 1)$

### Oppgave 3. Regn ut

- a)  $(a, b) + (-a, -b)$
- b)  $(t, 3t, 2t) + (t, -2t, -t)$
- c)  $(x, y, z) + (y, z, x) + (z, x, y)$

### Oppgave 4. Regn ut

- a)  $(x, y) \cdot (1, 1)$
- b)  $(s, t, u) \cdot (2, -1, 1)$
- c)  $(1, -1, -1) \cdot (t, 2t, 3t)$

### Oppgave 5. Regn ut gradienten til funksjonene

- a)  $f(x, y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$
- b)  $f(x, y) = e^x \cos y$
- c)  $f(x, y) = x^2 y^3$

### Oppgave 6. Regn ut gradienten til funksjonene

- a)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 \sin(xy) + xyz$
- b)  $f(x, y, z, w) = e^{yz}(\cos y + \sin w)$
- c)  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$

### Oppgave 7. Avgjør om vektorfeltet er konservativt og finn i så fall et potensial.

- a)  $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2y^2 + 1, 2x^3y + 1)$
- b)  $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2e^y, 2x^3e^y)$
- c)  $\mathbf{F}(x, y) = (y \cos(xy), x \cos(xy))$

### Oppgave 8. Avgjør om vektorfeltet har et potensial, og finn i så fall dette.

- a)  $\mathbf{F}(x, y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$
- b)  $\mathbf{F}(x, y) = (\sin x, \cos x)$

### Oppgave 9. Avgjør om vektorfeltet er konservativt og finn i så fall et potensial.

- a)  $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$
- b)  $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2y, x^3)$
- c)  $\mathbf{F}(x, y) = (2xe^y + y, x^2e^y - x - 2y)$

### Oppgave 10. Vis at et konstant vektorfelt er konservativt. Finn et potensial for et konstant vektorfelt.

### Oppgave 11. Beregn virvlingen for vektorfeltene.

- a)  $\mathbf{F}(x, y) = (x^2y, xy^3)$
- b)  $\mathbf{F}(x, y) = (x, x^2)$
- c)  $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, x^2)$

### Oppgave 12. Gitt et vektorfelt

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - y^3, x^3 - y^2)$$

- a) Beregn virvlingen til vektorfeltet.
- b) Finn de kritiske punktene til virvlingen og avgjør hvor den har sin minste verdi.

### Oppgave 13. Beregn virvlingen for vektorfeltene.

- a)  $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2y^2 + 1, 2x^3y + 1)$
- b)  $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2e^y, 2x^3e^y)$
- c)  $\mathbf{F}(x, y) = (y \cos(xy), x \cos(xy))$

### Oppgave 14. Beregn sirkulajonen til vektorfeltene og finn deres største verdi.

- a)  $\mathbf{F}(x, y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$
- b)  $\mathbf{F}(x, y) = (\sin y, \cos x)$

### Oppgave 15. Vi har gitt en nivåkurve $f(x, y) = C$ . Tangentvektorfeltet til denne kurven er gitt ved $\mathbf{T}(x, y) = (-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x})$ . Vis at virvlingen til tangentfeltet er gitt ved $f_{xx} + f_{yy}$ , hvor vi bruker notasjonen $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ , osv.

### Oppgave 16. Regn ut $f_{xx} + f_{yy}$ for funksjonene

- a)  $f(x, y) = 2x + 3y - 1$
- b)  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$
- c)  $f(x, y) = e^{xy}$

# Kapittel 9

## Kurveintegraler

I dette kapitlet skal vi studere kurver i planet og se på hvordan vi kan integrere funksjoner som er definert over slike kurver. Når vi integrerer langs  $x$ -aksen kan vi tenke oss integralet som en uendelig sum av arealene til uendelig mange uendelig smale rektangler. Vi gjør det samme langs en kurve, men nå erstatter vi differensialet  $dx$  med et tilsvarende uendelig lite segment  $ds$  langs kurven. Integralet blir i prinsippet det samme.

Vi skal også se hvordan vi beregner verdien av et vektorfelt langs en kurve. Et av hovedresultatene for kurveintegraler sier at integralet av et konservativt vektorfelt langs en lukket kurve er 0, alternativt at kurveintegraler i et konservativt felt kun avhenger av endepunktene. Vi skal se nærmere på dette resultatet.

### 9.1 Parametriserte kurver

Vi har tidligere beskrevet kurver på to forskjellige måter. Den ene er som grafen til en funksjon  $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$ , og den andre er som løsningene av en likning,  $x^2 + y^2 = 1$ . Begge deler beskriver en sirkel (halvsirkel). En tredje måte å beskrive kurver i planet er ved parametriserte kurver. La

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$$

hvor  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Vi betrakter  $\mathbf{r}(t)$  for hver  $t$  som et punkt i planet. Til sammen vil alle punktene  $\mathbf{r}(t)$ , når  $t$  gjennomløper intervallet  $[0, 2\pi)$  beskrive enhetssirkelen i planet. Hvis vi skriver  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ , hvor  $x(t) = \cos t$  og  $y(t) = \sin t$ , har vi at  $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$ . Det gir oss tilbake likningen for en sirkel.

**Definisjon 9.1.1.** Funksjonen

$$\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t))$$

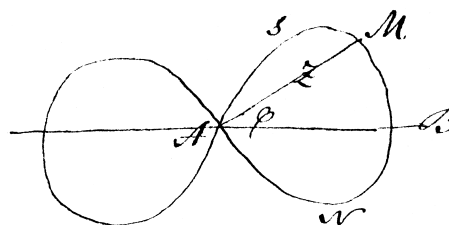
for  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , kalles en **parametrisert kurve**.

**Eksempel 9.1.1.** Parametriseringen  $\mathbf{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$  med  $t \in [0, 2\pi)$  beskriver en sirkel med radius  $R$ .

**Eksempel 9.1.2.** En parabel kan parametriseres ved  $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Generelt kan vi parametrisere grafen til en funksjon  $y = f(x)$  ved  $\mathbf{r}(t) = (t, f(t))$ . Dette gir oss en overgang fra beskrivelse av en kurve som grafen til en funksjon til en parametrisering av den samme kurven.

**Eksempel 9.1.3.** Parametriseringen  $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{t^2 + t^4}, \sqrt{t^2 - t^4})$  beskriver en **lemniscate**.



**Figur 9.1.** Niels Henrik Abels håndtegnede lemniscate.

Det er ikke alltid helt enkelt å gi likningen til en kurve på bakgrunn av en parametrisering og vice versa. I noen tilfeller, slik som med lemniscaten i eksempelet over, kan vi få det til. Vi setter

$$x = x(t) = \sqrt{t^2 + t^4} \quad , \quad y = y(t) = \sqrt{t^2 - t^4}$$

Det gir

$$x^2 = t^2 + t^4 \quad , \quad y^2 = t^2 - t^4$$

og

$$x^2 + y^2 = 2t^2 \quad , \quad x^2 - y^2 = 2t^4$$

Kvadrerer vi det første uttrykket og sammenlikner med det andre, får vi likningen

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$$

som er likningen for Abels lemniscate.

Gitt en plan kurve  $C \subset \mathbb{R}^2$  og et punkt  $P \in C$  på kurven. En **tangentvektor** til kurven i punktet  $P$  er en vektor (med startpunkt i  $P$ ) som er parallell med tangenten til kurven i punktet. En **normalvektor** til kurven  $C$  i punktet  $P$  er tilsvarende en vektor som står normalt på tangenten i punktet. Vi kan finne en tangentvektor til den parametriserte kurven i et punkt ved å derivere de to definerende funksjonene;

$$\mathbf{r}'(t) = (f'(t), g'(t))$$

En normalvektor vil da være gitt ved

$$\mathbf{r}'(t)^\perp = (-g'(t), f'(t))$$

**Eksempel 9.1.4.** Vi har gitt en sirkel ved  $\mathbf{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$ . Det gir tangentvektor  $\mathbf{r}'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$  og normalvektor  $\mathbf{r}'(t)^\perp = (R\cos t, R\sin t)$ . I dette tilfellet vil posisjonsvektoren  $\mathbf{r}(t)$  og normalvektoren  $\mathbf{r}'(t)^\perp$  peke i motsatt retning.

**Eksempel 9.1.5.** Parablen kan beskrives ved  $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$  og vi har tangentvektor  $\mathbf{r}'(t) = (1, 2t)$  og normalvektor  $\mathbf{r}'(t)^\perp = (-2t, 1)$ .

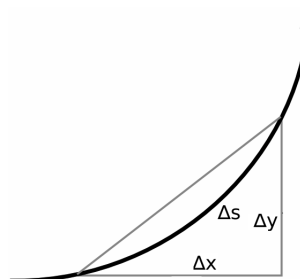
Vi skal komme tilbake til anvendelser av tangent- og normalvektorer.

## 9.2 Buelengde

Når vi har gitt en kurve vil vi i mange tilfeller være interessert i beregne lengden av kurven, vi omtaler denne lengden som buelengden. Problemet er at de eneste lengdene vi formelt sett kan regne ut er lengden av rette linjer, mens kurvene våre i svært få tilfeller vil være rette linjer. Vi skal derfor beregne buelengder ved å tilnærme kurven med stykkvis rette linjer, som vi kan regne ut lengden til. Vi gjør denne oppdelingen finere og finere, dvs. vi tilnærmer med flere og flere, kortere og kortere rette linjer, og grenseverdien når vi lar antallet rette linjestykker gå mot uendelig vil gi oss buelengden.

Vi betrakter et lite buesegment,  $\Delta s$  som på figuren. Vi lar  $\Delta x$  og  $\Delta y$  være  $x$ - og  $y$ -koordinatene til  $\Delta s$ . Ved Pythagoras teorem får vi at  $(\Delta s)^2 \approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ , og

$\Delta s \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ . Feilen vi gjør ved denne tilnæringen blir mindre og mindre (og går faktisk mot 0) når vi lar  $\Delta s \rightarrow 0$ .



**Figur 9.2.** Et buesegment  $\Delta s$ , tilnærmet med en rett linje.

Vi deler dette uttrykket med  $\Delta t$  og får

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

Når vi går til grensen  $\Delta t \rightarrow 0$  vil også  $\Delta s \rightarrow 0$  og vi får likheten

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

som vi kan skrive

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

På samme måte som vi har tolket  $dx$  som et uendelig lite linjestykke langs  $x$ -aksen, kan vi tolke  $ds$  som et uendelig lite linjestykke langs kurven. Uttrykket for  $ds$  beskriver forholdet mellom lengden av det lille buesegmentet og lengden av det tilsvarende lille linjestykket  $dt$  på parameteraksen. Dette kan vi bruke til å beregne buelengden.

**Definisjon 9.2.1.** Buelengden  $B$  til kurven  $C: \mathbf{r}(t) = (f(t), g(t))$  mellom  $t = a$  og  $t = b$  er gitt ved integralet

$$B = \int_C ds = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt$$

**Eksempel 9.2.1.** Buelengden til kurven  $\mathbf{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$  mellom  $t = 0$  og  $t = 2\pi$  er gitt ved integralet

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} R\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} R dt = [Rt]_0^{2\pi} = 2\pi R \end{aligned}$$

som vi gjenkjenner som omkretsen til en sirkel med radius  $R$ .

**Eksempel 9.2.2.** Buelengden til kurven  $\mathbf{r}(t) = (t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}})$  mellom  $t = 0$  og  $t = 3$  er gitt ved integralet

$$\begin{aligned} B &= \int_0^3 \sqrt{(1)^2 + (\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}})^2} dt \\ &= \int_0^3 \sqrt{1+t} dt \\ &= \frac{2}{3} [(1+t)^{\frac{3}{2}}]_0^3 = \frac{2}{3} (8-1) = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Til slutt tar vi med et eksempel hvor vi beregner buelengden til en rett linje og ser at det faktisk blir lengden av den rette linja.

**Eksempel 9.2.3.** Linjestykket mellom origo og punktet  $(1, 1)$  kan parametriseres ved  $\mathbf{r}(t) = (t, t)$  der  $0 \leq t \leq 1$ . Det gir buelengde

$$B = \int_0^1 \sqrt{(1)^2 + (1)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{2} dt = \sqrt{2}$$

som presis er lengden av linja, beregnet ved Pythagoras setning.

### 9.3 Kurveintegraler

Hvis vi kombinerer det vi har sagt om buelengde med vår kunnskap om integraler kan vi definere mer generelle kurveintegraler. Gitt en funksjon  $f(x, y)$  i to variable og en kurve  $\mathbf{r}(t)$ . Vi skal beregne integralet av funksjonen  $f$  langs kurven  $\mathbf{r}$ .

**Definisjon 9.3.1.** Kurveintegralet av en kontinuerlig funksjon  $f(x, y)$  langs kurven  $C$  gitt ved  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$  mellom  $t = a$  og  $t = b$  er gitt ved

$$\int_C f ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

**Eksempel 9.3.1.** Vi skal beregne kurveintegralet av funksjonen  $f(x, y) = \frac{y}{x}$  langs parabolen  $P$ , gitt ved  $\mathbf{r}(t) = (t, \frac{1}{2}t^2)$  mellom  $t = 0$  og  $t = \sqrt{3}$ . Merk at langs denne kurven ser funksjonen ut som

$$f(\mathbf{r}(t)) = f(t, \frac{1}{2}t^2) = \frac{t^2}{2t} = \frac{1}{2}t$$

og integralet blir

$$\begin{aligned} \int_P f ds &= \int_0^{\sqrt{3}} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(1)^2 + (t)^2} dt \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}t \cdot \sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{6}(4^{\frac{3}{2}} - 1) \\ &= [\frac{1}{6}(1+t^2)^{\frac{3}{2}}]_0^{\sqrt{3}} = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

**Eksempel 9.3.2.** Vi skal beregne kurveintegralet av funksjonen  $f(x, y) = -y$  langs sirkelen  $C$ , gitt ved  $\mathbf{r}(t) = (R \cos t, R \sin t)$  fra  $t = 0$  til  $t = 2\pi$ . Langs denne kurven ser funksjonen ut som

$$f(\mathbf{r}(t)) = f(R \cos t, R \sin t) = -R \sin t$$

Det gir integral

$$\begin{aligned} \int_C f ds &= \int_0^{2\pi} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt \\ &= - \int_0^{2\pi} R^2 \sin t dt = -R^2 [-\cos t]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

Integralet i det siste eksempelet beregnes rundt en hel sirkel slik at de to endepunktene faktisk er samme punkt i planet,  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi)$ . Slike integral har et eget (meget illustrerende) symbol, vi skriver

$$\oint_C f ds$$

som betyr at vi integrerer  $f$  langs en lukket kurve  $C$ .

### 9.4 Integrere vektorfelt\*

I forrige avsnitt integrerte vi funksjoner langs en kurve. Vi kan også integrere vektorfelt langs kurver. Ideen er som følger. Vi tenker oss at vi dekomponerer vektorfeltet i en komponent langs med kurven og en komponent normalt på kurven, dvs. i hvert punkt på kurven skriver vi vektorfeltet som en sum av en vektor som ligger langs kurven og en vektor som står normalt på kurven. Så bestemmer vi oss for at den komponenten som står normalt på kurven ikke skal gi noe bidrag til integralet, og vi står igjen med komponenten langs med kurven. Denne komponenten finner vi ved å ta prikkproduktet av vektorfeltet med en tangentvektor til kurven i punktet, av lengde 1. Vi vil at tangentvektoren skal ha lengde 1 fordi vi ikke vil at lengden av denne vektoren skal spille inn på resultatet, kun retningen av den.

For å finne en tangentvektor av lengde 1 bruker vi tangentvektoren definert i forrige avsnitt, og deler den på sin egen lengde. Da får vi en tangentvektor av lengde 1.

$$\mathbf{T}_C(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$$

**Definisjon 9.4.1.** La  $\mathbf{F}(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$  være et vektorfelt i planet og  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$  en parametrisering av kurven  $C$  i det samme planet. **Verdien av vektorfeltet  $\mathbf{F}$  langs  $C$  er en funksjon i to variable gitt ved**

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C &= (p(\mathbf{r}(t)), q(\mathbf{r}(t))) \cdot \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \\ &= \frac{p(\mathbf{r}(t))x'(t) + q(\mathbf{r}(t))y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \end{aligned}$$

På denne måten har vi skaffet oss en funksjon, definert i hvert punkt på kurven.

**Eksempel 9.4.1.** La  $f(x, y)$  være en funksjon i to variable og anta at den parametriserte kurven  $C$  gitt ved  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$  beskriver en nivåkurve for funksjonen, dvs. at  $f(x(t), y(t)) = c$ ,  $c$  en konstant. Gradienten til  $f$  danner et vektorfelt  $\nabla f$  i planet. Da er verdien av vektorfeltet  $\nabla f$  langs nivåkurven  $C$  lik 0. Vi kan se dette ved å regne ut

$$\begin{aligned} \nabla f \cdot \mathbf{T}_r(t) &= \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) \\ &= \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{d}{dt} c = 0 \end{aligned}$$

der overgangen fra første til andre linje er kjerneregelen for derivasjon. Alternativt kunne vi dedusert dette direkte siden vi vet at gradienten til en funksjon står normalt på nivåkurvene til funksjonen, og dermed også normalt på tangentene til nivåkurvene, og det er akkurat skalarproduktet mellom disse to vektorene vi regner ut.

**Eksempel 9.4.2.** La  $f(t) = (R \cos t, R \sin t)$  og  $g(x, y) = xy$ . Da har vi  $h(t) = g(f(t)) = R^2 \cos t \sin t$  og

$$h'(t) = -R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t = R^2 (\cos^2 t - \sin^2 t)$$

Bruker vi kjerneregelen på den samme funksjonen får vi

$$\begin{aligned} h'(t) &= (y, x) \cdot (-R \sin t, R \cos t) \\ &= R \sin t (-R \sin t) + R \cos t R \cos t \\ &= R^2 (\cos^2 t - \sin^2 t) \end{aligned}$$

siden  $x = R \cos t$ , og  $y = R \sin t$ .

Da har vi samlet nok bakgrunn til å kunne integrere et vektorfelt langs en kurve.

**Definisjon 9.4.2.** La  $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  være et vektorfelt i planet og  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$  en parametrisering av kurven  $C$  i det samme planet. **Kurveintegralet av vektorfeltet  $\mathbf{F}$  langs  $C$  er gitt ved**

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C ds = \int_a^b (P(\mathbf{r}(t))x'(t) + Q(\mathbf{r}(t))y'(t)) dt$$

For kurven  $\mathbf{r}(t)$  har vi  $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{T}_C \cdot \|\mathbf{r}'(t)\|$  og  $ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt$ . Kombinerer vi disse får vi

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}_C ds = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Heretter vil vi hovedsakelig bruke denne notasjonen for integralet av vektorfeltet  $\mathbf{F}$  langs kurven  $\mathbf{r}(t)$ .

**Eksempel 9.4.3.** La  $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$  være et vektorfelt i planet (tangentfeltet til konsentriske sirkler) og  $\mathbf{r}(t) = (R \cos t, R \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , en sirkulær kurve. **Kurveintegralet av vektorfeltet  $\mathbf{F}$  langs  $C$  er gitt ved**

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (-R \sin t)(-R \sin t) + R \cos t \cdot R \cos t dt \\ &= \int_0^{2\pi} R^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} R^2 dt = 2\pi R^2 \end{aligned}$$

**Eksempel 9.4.4.** La  $\mathbf{F}(x, y) = (2y, -x)$  være et vektorfelt i planet og  $\mathbf{r}(t) = (t, \frac{1}{2}t^2)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . **Kurveintegralet av vektorfeltet  $\mathbf{F}$  langs  $C$  er gitt ved**

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^1 (t^2 \cdot 1 + (-t)t) dt = 0 \end{aligned}$$

Hvorfor blir dette 0? Kurven er parabolen  $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$ . Tangentvektoren i punktet  $(x, y)$  har stigningstall  $f'(x) = x$ , dvs. tangentvektorfeltet har retning  $(1, x)$ . Det oppgitte vektorfeltet har retning  $(2y, -x)$ . Prikkproduktet av disse to retningene er  $(1, x) \cdot (2y, -x) = 2y - x^2$ . Men på kurven  $y = \frac{1}{2}x^2$  er dette tallet lik 0, og vektorfeltet har derfor ingen verdi langs med kurven.

## 9.5 Kurveintegraler i konservati- ve felt\*

Nå har vi kommet fram til et hovedresultat for kurveintegraler. Resultatet dreier seg om kurveintegraler i konservative felt. Vi starter med en funksjon  $f(x, y)$  og ser på gradientfeltet  $\mathbf{F} = \nabla f$ . Dette feltet er pr. definisjon konservativt. Vi lar  $C$  være en lukket kurve i planet, gitt ved en parametrisering  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$  slik at  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ . Da har vi

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}(t)) \cdot y'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) dt = [f(\mathbf{r}(t))]_a^b \\ &= f(\mathbf{r}(a)) - f(\mathbf{r}(b)) = 0 \end{aligned}$$

Dermed har vi bevist følgende teorem:

**Teorem 9.5.1.** Kurveintegralet av et konservativt felt  $\mathbf{F}$ , langs en lukket kurve  $C$  er 0;

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

**Korollar 9.5.2.** Kurveintegralet av et konservativt felt  $\mathbf{F} = \nabla f$  er kun avhengig av verdien av potensialet  $f$  i kurvens endepunkter;

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(p_1) - f(p_0)$$

der  $\mathbf{r}(a) = p_0$  og  $\mathbf{r}(b) = p_1$  er endepunktene til kurven  $C$  gitt ved  $\mathbf{R} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

*Bevis.* La  $C'$  være en annen, vilkårlig kurve mellom de to endepunktene. Vi setter sammen de to kurvene ved å gjennomløpe  $C'$  baklengs slik at vi får en lukket kurve. Kurveintegralet langs denne kurven er 0, og de to kurveintegralene, over  $C$  og  $C'$  må være like.  $\square$

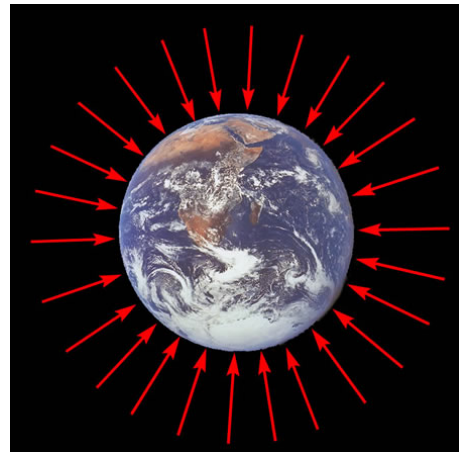
**Eksempel 9.5.1.** I kapittel 6.3 påsto vi at vektorfeltet  $F(x, y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$  ikke er konservativt. Det kan vi nå vise på følgende måte: La  $C$  være enhets sirkelen gitt

ved  $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Da har vi

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \right) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt \\ &= 2\pi \neq 0 \end{aligned}$$

som betyr at feltet ikke kan være konservativt.

**Eksempel 9.5.2.** En viktig anvendelse av dette teoremet/korollaret er gravitasjonsfeltet rundt jorda.



**Figur 9.3.** Gravitasjonsfeltet rundt jordkloden

Dette er et konservativt felt der potensialet kun er avhengig av avstanden til jordas sentrum, dvs. høyden over havoverflaten. Kurveintegraler i et gravitasjonsfelt måler energiforbruk langs kurven. Resultatet sier da at energiforbruket ved å bevege seg fra et punkt til et annet punkt kun avhenger av differansen mellom de to punktenes høyde over havoverflaten.

**Eksempel 9.5.3.** Et eksempel på et ikke-konservativt kraftfelt er feltet som over et område beskriver vindretning og -styrke.



**Figur 9.4.** Et fyr på et værutsatt sted på Vestlandet.

Vi antar at det i området befinner seg noen store steiner, fyr, trær e.l. Skal man bevege seg mot vinden, og man ønsker å bruke minst mulig krefter, prøver man å gå man mest mulig i le av steinene eller trærne, der motvinden er svakest. Energiforbruket langs en kurve i dette vindfeltet er presis kurveintegralet langs kurven, og det er som vi alle har erfart, avhengig av valg av vei, dvs. feltet er ikke konservativt.

## 9.6 Integralkurver

Gitt et vektorfelt  $\mathbf{F}(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$  og et punkt  $(a, b)$ . Kan vi finne en parametrisert kurve

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)), \quad 0 \leq t$$

slik at  $\alpha(0) = (a, b)$  og slik at

$$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) = \mathbf{F}(\alpha(t))$$

dvs.  $p(\alpha(t)) = x'(t)$  og  $q(\alpha(t)) = y'(t)$ ?

**Eksempel 9.6.1.** Betrakt vektorfeltet  $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$  med initialpunkt  $(1, 0)$ . Da vil den parametriserte kurven

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi >$$

danne en integralkurve. Det følger av at

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t) = \mathbf{F}(\cos t, \sin t)$$

**Eksempel 9.6.2.** Dersom vektorfeltet er gitt ved  $\mathbf{F}(x, y) = (1, -\frac{y}{x})$  ser vi at kurven  $\alpha(t) = (t, \frac{C}{t})$  gir oss en integralkurve for alle valg av konstanten  $C$ .

$$\mathbf{F}(\alpha(t)) = \mathbf{F}(t, \frac{C}{t}) = (1, -\frac{C}{t^2})$$

$$\alpha'(t) = (1, -\frac{C}{t^2})$$

**Retningsdiagrammet** til en funksjon  $y = f(x)$  er et eksempel på et vektorfelt i planet. Vi kan sette opp et uttrykk for tangentene til grafen til  $f(x)$  ved vektorene  $(1, f'(x))$ . Dette gir oss et vektorfelt ved å sette  $p(x, y) = 1$  og  $q(x, y) = f'(x)$ . Tangenten til grafen til funksjonen  $y = f(x)$  i et vilkårlig punkt vil nødvendigvis sammenfalle med retningsdiagrammet i det samme punktet. Vi sier at grafen til funksjonen er en **integralkurve** for sitt eget retningsdiagram. I dette

kapitlet skal vi studere en mer generell variant av dette eksemplet.

Vi tenker oss at vi har gitt et vektorfelt  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Dette vektorfeltet tilordner til et hvert punkt i planet en vektor, som blant annet er karakterisert ved sin retning. Vi er interessert i om det finnes en funksjon  $y = f(x)$  som i hvert punkt på grafen har en tangent med samme retning som det oppgitte vektorfeltet foreskriver.

**Definisjon 9.6.1.** La  $\mathbf{F}(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$  være et vektorfelt i planet. Vi sier at en funksjon  $y = g(x)$  er en **integralkurve** for vektorfeltet dersom  $(1, g'(x))$  er parallell med  $\mathbf{F}(x, y)$  i alle punkter på grafen til  $y = g(x)$ .

Siden retningen til vektorfeltet er en vektor med stigningstall  $\frac{q(x, y)}{p(x, y)}$ , betyr dette spesielt at i alle punkter på grafen til  $y = g(x)$  må vi ha at  $g'(x) = \frac{q(x, y)}{p(x, y)}$ . Dette er generelt vanskelig å få til, så vi må begrense problemet litt for å komme noe videre. Men først et par eksempler:

**Eksempel 9.6.3.** Betrakt vektorfeltet  $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$ . Da vil funksjonen  $y = g(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$  gi oss en integralkurve for alle valg av  $R$ . Det følger av at

$$g'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{-x}{y}$$

**Eksempel 9.6.4.** Dersom vektorfeltet er gitt ved  $\mathbf{F}(x, y) = (-x, y)$  ser vi at funksjonen  $y = g(x) = \frac{C}{x}$  gir oss en integralkurve for alle valg av konstanten  $C$ . Det følger siden

$$(1, g'(x)) = (1, -\frac{C}{x^2}) = -\frac{1}{x}(-x, \frac{C}{x}) = -\frac{1}{x}(-x, y)$$

som er parallell med  $\mathbf{F}(x, y)$ .

Vi legger inn et lite mellomspill om vektorer her.

**Lemma 9.6.2.** Gitt en vektor  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  i planet. Da vil vektoren  $\mathbf{v}^\perp = (-v_2, v_1)$  stå normalt på  $\mathbf{v}$ , dvs.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^\perp = 0$$

Symbolet  $\perp$  kalles **perp** som er en forkortelse for **perpendikulær** eller **normalt på**.

*Bevis.* Følger av at

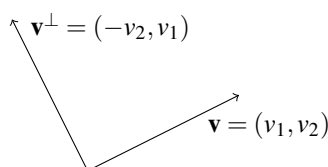
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^\perp = (v_1, v_2) \cdot (-v_2, v_1) = -v_1 v_2 + v_2 v_1 = 0$$

□



Gitt en vektor  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ . Vi har to mulige valg for  $\mathbf{v}^\perp$ ,  $(-v_2, v_1)$  og  $(v_2, -v_1)$ . For ikke å skape unødig forvirring skal vi alltid velge  $\mathbf{v}^\perp$  mot klokka, dvs.

$$(v_1, v_2)^\perp = (-v_2, v_1)$$



**Eksempel 9.6.5.** Vektorene  $\mathbf{v} = (1, 2)$  og  $\mathbf{v}^\perp = (-2, 1)$  står normalt på hverandre siden

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^\perp = (1, 2) \cdot (-2, 1) = 0$$

Vi skal bruke dette til å gi en framgangsmåte til å løse problemet gitt over. Vi har gitt et vektorfelt  $\mathbf{F}(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$ . Anta at dette vektorfeltet er konservativt og at vi kan finne et potensial  $f(x, y)$  slik at  $\nabla f = \mathbf{F}$ . Da vet vi at vektorfeltet  $\mathbf{F}(x, y)$  står normalt på nivåkurvene til funksjonen  $f(x, y)$ . Det betyr at vektorfeltet  $\mathbf{F}^\perp = (-q(x, y), p(x, y))$  ligger langs med nivåkurvene til  $f(x, y)$  ved lemmaene over. Dette kan vi benytte oss av. I stedet for å se på det opprinnelige vektorfeltet  $\mathbf{F}(x, y)$  tar vi for oss et vektorfelt som står normalt på dette vektorfeltet,  $\mathbf{F}^\perp(x, y)$ . Dersom vi kan finne et potensial for dette **normalfeltet**, så vil nivåkurvene til denne funksjonen stå normalt på  $\mathbf{F}^\perp(x, y)$ , dvs. ligge langs med  $\mathbf{F}(x, y)$  og vi har en løsning på problemet.

Gitt en kurve, f.eks. løsningsmengden til  $g(x, y) = x^2y + y + 1 = 0$ . Denne kurven er en nivåkurve for funksjonen  $g(x, y) = x^2y + y + 1$ , for  $g(x, y) = 0$ . Gradienten til kurven peker i hvert punkt på kurven i en retning som står vinkelrett på tangenten til kurven. I vårt tilfelle er gradienten gitt ved

$$\nabla g(x, y) = (2xy, x^2 + 1)$$

Siden gradienten står normalt på kurven kan vi finne tangenter til kurven ved å se på vektorer som står normalt på gradientvektorene.

$$\nabla g(x, y)^\perp = (-x^2 - 1, 2xy)$$

Dette vektorfeltet er et tangentsfelt til kurven, dvs. i hvert punkt på kurven gir feltet oss en tangentvektor.

Nå kan vi gjøre denne prosessen i motsatt rekkefølge. Anta at vi har gitt et vektorfelt  $\mathbf{F}$  og vi ønsker å finne en funksjon  $f(x, y)$  som er slik at løsningskurvene

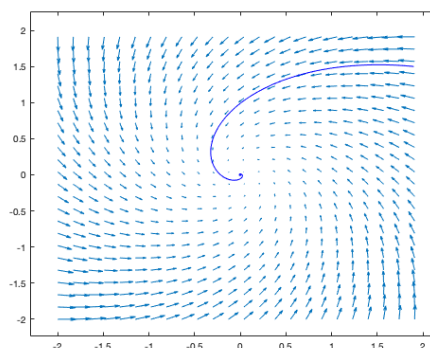
$f(x, y) = 0$  følger feltet  $\mathbf{F}$ . I følge resonnetet over vil  $\mathbf{F}$  stå normalt på løsningskurven. Men  $\mathbf{F}^\perp$  står også normalt på  $\mathbf{F}$  og  $\mathbf{F}^\perp$  er derfor parallell til løsningskurvene. Spørsmålet blir om  $\mathbf{F}^\perp$  har et potensial,  $\mathbf{F}^\perp = \nabla f$ . I så fall vil potensialfunksjonen  $f$  løse vårt problem.

**Eksempel 9.6.6.** Vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = (-x - y, x - y)$$

har

$$\mathbf{F}^\perp(x, y) = (-x + y, -x - y)$$



**Eksempel 9.6.7.** Et vektorfelt er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$$

Vi skal prøve å finne en kurve som følger dette vektorfeltet, dvs. som i hvert punkt på kurven har tangent som er parallell med vektorfeltet. I tillegg vil vi at kurven skal gå gjennom punktet  $(1, 0)$ . Vi begynner med å konstruere et vektorfelt som står normalt på det gitte vektorfeltet, nemlig

$$\mathbf{F}^\perp(x, y) = (-x, -y)$$

Det er lett å se at dette vektorfeltet er gradienten til funksjonen  $f(x, y) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ . Siden vår kurve skulle gå gjennom punktet  $(1, 0)$  så er det nivåkurven til  $f$  gitt ved  $f(1, 0) = -\frac{1}{2}(1^2 + 0^2) = -\frac{1}{2}$  vi er ute etter, med andre ord, en sirkel i planet, gitt ved

$$-\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = -\frac{1}{2}$$

eller

$$x^2 + y^2 = 1$$

**Eksempel 9.6.8.** Vi tar med et eksempel til. Vi har gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(\frac{1}{y}, -2x\right)$$

og vi skal prøve å finne en kurve som som i hvert punkt har en tangent som er parallell med dette vektorfeltet. I tillegg vil vi at kurven skal gå gjennom punktet  $(0, 1)$ . Vi begynner med å konstruere et vektorfelt som står normalt på det gitte vektorfeltet, nemlig

$$\mathbf{F}^\perp(x,y) = \left(2x, \frac{1}{y}\right)$$

Det er lett å se at dette vektorfeltet er gradienten til funksjonen  $f(x,y) = x^2 + \ln(y)$ . Siden vår kurve skulle gå gjennom punktet  $(0, 1)$  så er det nivåkurven til  $f$  gitt ved

$$f(0,1) = 0^2 + \ln 1 = 0$$

vi er ute etter, med andre ord,

$$f(x,y) = x^2 + \ln(y) = 0$$

eller  $\ln(y) = -x^2$  som gir  $y = e^{-x^2}$ .

## Oppgaver

**Oppgave 1.** Skriv kurvene på parameterform:

- $x - y = 0$
- $x^2 - y = 2$
- $x^2 + y^2 = 1$

**Oppgave 2.** Finn en likning for de parametriserte kurvene

- $\mathbf{r}(t) = (2t + 1, t - 2)$
- $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$
- $\mathbf{r}(t) = (\sin^2 t, t - 1)$

**Oppgave 3.** Finn skjæringspunktene mellom de to kurvene  $\mathbf{r}_1(t) = (t^2 + 1, 1 + t)$  og  $\mathbf{r}_2(u) = (2u, 4 - 2u)$ .

**Oppgave 4.** Finn en tangentvektor og en normalvektor for de gitte kurvene

- $\mathbf{r}(t) = (2t + 1, t - 2)$
- $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3)$
- $\mathbf{r}(t) = (\sin^2 t, t - 1)$

**Oppgave 5.** Regn ut buelengden av kurvene over de gitte intervallene.

- $\mathbf{r}(t) = (t + 1, 2t + 1), 0 \leq t \leq 2$
- $\mathbf{r}(t) = (at, bt), 0 \leq t \leq 1$

**Oppgave 6.** Regn ut buelengden av kurvene over de gitte intervallene.

- $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2), 0 \leq t \leq 1$
- $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^3), 0 \leq t \leq 1$

**Oppgave 7.** Regn ut buelengden av kurvene over de gitte intervallene.

- $\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$
- $\mathbf{r}(t) = (t, t^{\frac{3}{2}}), 0 \leq t \leq 5$

**Oppgave 8.** Beregn kurveintegralet av vektorfeltet  $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$  langs parabelen  $y = x^2$  fra  $x = -1$  til  $x = 1$ .

**Oppgave 9.** Beregn kurveintegralet av vektorfeltet  $\mathbf{F}(x,y) = (2 - y, x)$  langs kurven gitt ved  $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$  fra  $t = 0$  til  $t = 2\pi$ .

**Oppgave 10.** Beregn kurveintegralet av vektorfeltet  $\mathbf{F}(x,y) = (x,y)$  langs den rette linja fra  $(0,0)$  til  $(2,4)$ .

**Oppgave 11.** Beregn kurveintegralet av vektorfeltet  $\mathbf{F}(x,y) = (x+y, -x+y)$  langs en hel runde av sirkelen  $x^2 + y^2 = 1$

**Oppgave 12.** Vis at vektorfeltet  $\mathbf{F}(x,y) = (y, -x)$  ikke er en gradient. Finn også en vei  $C$  slik at  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$ .

**Oppgave 13.** Vis at vektorfeltet  $\mathbf{F}(x,y) = (y, -xy - x)$  ikke er en gradient. Finn også en vei  $C$  slik at  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$ .

**Oppgave 14.** a) Beregn gradienten  $\nabla f$  til funksjonen  $f(x,y) = x^2y + xy^2$ .

b) Beregn kurveintegralet av vektorfeltet  $\nabla f$  langs en rett linje mellom punktene  $(0,0)$  og  $(2,4)$ .

c) Beregn kurveintegralet av det samme vektorfeltet mellom de samme punktene, men denne gangen langs parabolen  $y = x^2$ .

**Oppgave 15.** a) Vis at vektorfeltet  $\mathbf{F}(x,y) = (y \sin(xy), x \sin(xy))$  er konservativt.

b) Finn et potensial for vektorfeltet gitt i a)

c) Regn ut kurveintegralet av vektorfeltet gitt i a) langs en rett linje mellom punktene  $(-1, \frac{\pi}{2})$  og  $(1, -\frac{\pi}{2})$ .

**Oppgave 16.** a) Vis at vektorfeltet  $\mathbf{F}(x,y) = (e^y, xe^y)$  er konservativt.

b) Finn et potensial for vektorfeltet gitt i a)

c) Regn ut kurveintegralet av vektorfeltet gitt i a) langs en rett linje mellom punktene  $(-1,1)$  og  $(1,1)$ .

**Oppgave 17.** a) Vis at vektorfeltet  $\mathbf{F}(x,y) = (1,1)$  er konservativt.

b) Finn et potensial for vektorfeltet gitt i a)

c) Regn ut kurveintegralet av vektorfeltet gitt i a) rundt en hel sirkel, gitt ved  $x^2 + y^2 = 4$

**Oppgave 18.** Hvilke av parene av vektorer står normalt på hverandre?

a)  $(1,0)$  og  $(0,1)$

b)  $(1,2)$  og  $(2,1)$

c)  $(2,3)$  og  $(-3,2)$

**Oppgave 19.** Hvilke av parene av vektorfelt står normalt på hverandre?

a)  $(x, y-2)$  og  $(2-y, x)$

b)  $(x, -y)$  og  $(y, -x)$

c)  $(x^2 - x, xy)$  og  $(y, 1-x)$

**Oppgave 20.** Et vektorfelt er gitt ved  $\mathbf{F}(x,y) = (-1,1)$ .

a) Vis at vektorfeltet  $\mathbf{F}^\perp$  har et potensial.

b) Finn et potensial for  $\mathbf{F}^\perp$ .

c) Finn en kurve som går gjennom punktet  $(2,2)$  og slik at tangenten til kurven i hvert punkt på kurven er parallell med vektorfeltet  $\mathbf{F}$ .

**Oppgave 21.** Et vektorfelt er gitt ved  $\mathbf{F}(x,y) = (1,2x)$ .

a) Vis at vektorfeltet  $\mathbf{F}^\perp$  har et potensial.

b) Finn et potensial for  $\mathbf{F}^\perp$ .

c) Finn en kurve som går gjennom punktet  $(0,1)$  og slik at tangenten til kurven i hvert punkt på kurven er parallell med vektorfeltet  $\mathbf{F}$ .

**Oppgave 22.** Et vektorfelt er gitt ved  $\mathbf{F}(x,y) = (-x^2, 2xy + 2)$ .

a) Vis at vektorfeltet  $\mathbf{F}^\perp$  har et potensial.

b) Finn et potensial for  $\mathbf{F}^\perp$ .

c) Finn en kurve som går gjennom punktet  $(1,1)$  og slik at tangenten til kurven i hvert punkt på kurven er parallell med vektorfeltet  $\mathbf{F}$ .

# Kapittel 10

## Multippel integrasjon

Fundamentalteoremet sier at integrasjon og derivasjon er motsatte operasjoner. I de foregående kapitlene har vi sett ulike måter vi kan derivere funksjoner i flere variable. Neste skritt er å integrere funksjoner i flere variable. Dette kalles **multippel integrasjon**.

### 10.1 Multippel integrasjon over rektangler

Vi skal begynne med å integrere funksjoner i to variable over rektangler i planet. Dette kalles **dobbelintegrasjon**, siden vi må utføre to integrasjons-operasjoner.

Ved partiell derivasjon deriverte vi med hensyn på en variabel og betraktet alle andre variable som konstanter. Multippel integrasjon baserer seg på nøyaktig samme prinsipp, bare motsatt vei. Vi integrerer med hensyn på variablene i tur og orden, og ved hver integrasjon betrakter vi de andre variablene som konstanter.

La  $f(x, y)$  være en funksjon i to variable, og  $Q : [a, b] \times [c, d]$  et rektangulært område i  $(x, y)$ -planet. Det betyr at området  $Q$  består av alle punkter  $(x, y)$  i planet der  $a \leq x \leq b$  og  $c \leq y \leq d$ . Vi skal bruke notasjonen

$$\iint_Q f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Dette betyr at vi først integrerer  $f(x, y)$  med hensyn på  $x$  (og tenker på  $y$  som en konstant) for deretter å integrere svaret med hensyn på  $y$ . La  $F(x, y)$  være en slik anti-derivert med hensyn på  $x$ , dvs.  $\frac{\partial F}{\partial x} = f$ . Det gir oss

$$\int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d (F(b, y) - F(a, y)) dy$$

Integranden  $F(b, y) - F(a, y)$  er en funksjon i  $y$  som vi kan anti-derivere med hensyn på  $y$  på vanlig måte, og regne ut det bestemte integralet.

Vi må være nøye på at det er samsvar mellom integrand og grenser i hver av de to integralene. Merk også at vi bruker notasjonen  $dA = dx dy$  for en (uendelig) liten firkant.

**Eksempel 10.1.1.** Vi skal regne ut integralet av funksjonen  $f(x, y) = xy + 1$  over rektangelet  $Q : [0, 1] \times [-1, 1]$  i  $(x, y)$ -planet. Vi har

$$\begin{aligned} \iint_Q xy + 1 dA &= \int_{-1}^1 \left( \int_0^1 xy + 1 dx \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2}x^2y + x \right]_0^1 dy \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}y + 1 dy \\ &= \left[ \frac{1}{4}y^2 + y \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} - (-1) = 2 \end{aligned}$$

**Eksempel 10.1.2.** Vi kan regne ut det samme integralet, men i motsatt rekkefølge:

$$\begin{aligned} \iint_Q xy + 1 dA &= \int_0^1 \left( \int_{-1}^1 xy + 1 dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2}xy^2 + y \right]_{-1}^1 dx \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{2}x + 1 \right) dx \\ &= [2x]_0^1 \\ &= 2 - 0 = 2 \end{aligned}$$

Det er ikke noen tilfeldighet at disse to integralene er like. Det er et generelt faktum, kalt **Fubinis teorem**.

**Teorem 10.1.1.** En funksjon  $f(x, y)$  er definert og kontinuerlig over et rektangel  $Q: [a, b] \times [c, d]$  i planet. Da har vi

$$\begin{aligned} \iint_Q f dA &= \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

**Eksempel 10.1.3.** Funksjonen  $f(x, y) = x \sin y - ye^x$  er definert over rektangelet  $[-1, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ . Vi skal beregne integralet  $\iint_Q f dx dy$ .

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin y - ye^x dy \right) dx &= \int_{-1}^1 \left[ -x \cos y - \frac{1}{2} y^2 e^x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( -\frac{\pi^2}{8} e^x + x \right) dx \\ &= \left[ -\frac{\pi^2}{8} e^x + \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^1 \\ &= -\frac{\pi^2}{8} e + \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8} e^{-1} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{1}{e} - e \right) \end{aligned}$$

På samme måte som at integralet av en positiv funksjon i en variabel uttrykker arealet mellom  $x$ -aksen og grafen, vil integralet av en positiv funksjon i to variable uttrykke volumet mellom  $xy$ -planet og grafen.

**Eksempel 10.1.4.** Vi skal regne ut volumet under grafen til  $f(x, y) = x^2 + y^2$  over rektangelet  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ .

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left( \int_{-1}^1 x^2 + y^2 dy \right) dx &= \int_{-1}^1 \left[ x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{-1}^1 dx \\ &= \int_{-1}^1 \left( x^2 + \frac{1}{3} - (-x^2) - \left(-\frac{1}{3}\right) \right) dx \\ &= \left[ \frac{2}{3} x^3 + \frac{2}{3} x \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \left( -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Tilsvarende som at dobbeltintegrasjon dreier seg om å integrere en funksjon i to variable over et område i planet, så bruker vi begrepet **trippelintegrasjon** når vi integrerer en funksjon over et område i rommet. Regneteknikkene er helt parallelle.

**Eksempel 10.1.5.** La  $Q = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$  være en boks i 3-rommet. Vi skal finne volumet av denne boksen ved å integrere konstantfunksjonen  $f(x, y, z) = 1$  over  $Q$ .

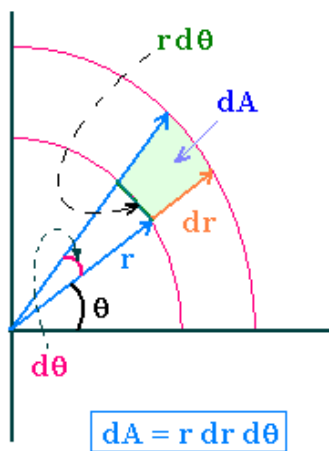
$$\begin{aligned} \iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_Q 1 dx dy dz \\ &= \int_0^3 \left( \int_0^2 \left( \int_0^1 1 dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_0^3 \left( \int_0^2 (1 - 0) dy \right) dz \\ &= \int_0^3 (2 - 0) dz \\ &= 2(3 - 0) = 6 \end{aligned}$$

Vi skal se på et eksempel til.

**Eksempel 10.1.6.** La  $Q = [0, 1] \times [-1, 2] \times [1, 3]$  være en boks i 3-rommet. Vi skal regne ut integralet av funksjonen  $f(x, y, z) = xyz$  over  $Q$ .

$$\begin{aligned} \iiint_Q xyz dx dy dz &= \int_0^3 \left( \int_0^2 \left( \int_0^1 xyz dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_0^3 \left( \int_0^2 \left[ \frac{1}{2} x^2 yz \right]_0^1 dy \right) dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^3 \left( \int_0^2 yz dy \right) dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^3 \left[ \frac{1}{2} y^2 z \right]_0^2 dz \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \int_0^3 z dz \\ &= \left[ \frac{1}{2} z^2 \right]_0^3 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Anta nå at vi har gitt en funksjon i to variable  $z = f(x, y)$  over et område  $D$  i planet, og vi av gode grunner ønsker å bruke polarkoordinater. Det kan f.eks. hende at området  $D$  er mye mer hensiktsmessig å beskrive i polarkoordinater, heller enn i kartesiske koordinater. Framgangsmåten minner mye om vanlig substitusjon i én variabel. Vi erstatter variablene i funksjonsuttrykket med  $x = r \cos \theta$  og  $y = r \sin \theta$ . Det gir oss en ny funksjon i polar-variablene  $r$  og  $\theta$ . For å utføre integrasjonen må vi også endre  $dx dy$  til  $dr d\theta$ . Dersom vi tenker på  $dA = dx dy$  som arealet av en bitte liten firkant i  $(x, y)$ -planet vil ikke forholdet mellom denne og den tilsvarende firkanten  $dr d\theta$  være konstant, men avhenge av  $r$  dvs. hvor langt unna origo vi er.



Tenk på det som at en sektor med fast vinkel vil ha mindre areal, jo nærmere origo vi kommer. Dette gir oss følgende formel for integralet, hvor vi lar  $D'$  betegne området i  $(r, \theta)$ -koordinatene som svarer til området  $D$  i  $(x, y)$ -planet.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Vi skal illustrere formelen med et eksempel.

**Eksempel 10.1.7.** Betrakt funksjonen

$$z = f(x, y) = x + y$$

og la området  $D$  være øvre halvdel av en sirkelskive med sentrum i origo og radius 1. I polarkoordinater er  $D$  gitt ved  $D': 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi$ . Det gir integralet

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{D'} (r \cos \theta + r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 r^2 (\cos \theta + \sin \theta) dr d\theta \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\pi (\cos \theta + \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{3} [\sin \theta - \cos \theta]_0^\pi \\ &= \frac{1}{3} (\sin \pi - \cos \pi - \sin 0 + \cos 0) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Vi kan også bruke dobbeltintegrasjon ved polarkoordinater til å beregne volumet av en kule. Vi ser på et område i  $(x, y)$ -planet gitt ved

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

Vi merker oss at  $D$  ikke er noe rektangulært område. Vi har ennå ikke gått gjennom hvordan vi skal integrere

over mer generelle områder enn rektangler, men problemet løser seg når vi skifter til polarkoordinater. Området  $D$  svarer da til rektangelet

$$\begin{aligned} D' &= \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \\ &= [0, R] \times [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Funksjonen vi skal integrere er gitt ved

$$z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Dette gir oss den øvre halvkula. For å finne volumet av hele kula multipliserer vi integralet med 2. Vi kan skrive om funksjonen i polarkoordinater; det gir

$$\begin{aligned} z &= f(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= \sqrt{R^2 - (r \cos \theta)^2 - (r \sin \theta)^2} \\ &= \sqrt{R^2 - r^2} \end{aligned}$$

Dette gir oss volumet av kula;

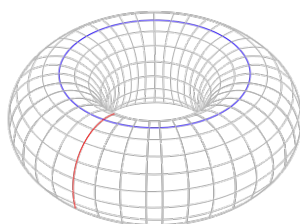
$$\begin{aligned} 2 \iint_D f(x, y) dx dy &= 2 \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= 2 \int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - r^2} r d\theta dr \\ &= 2 \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r [ \theta ]_0^{2\pi} dr \\ &= 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr \end{aligned}$$

Vi substituerer  $u = R^2 - r^2$ , det gir  $du = -2r dr$  og nye grenser  $u_0 = u(0) = R^2$ ,  $u_1 = u(R) = 0$ ,

$$\begin{aligned} 2 \iint_D f(x, y) dx dy &= 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr \\ &= -4\pi \int_{R^2}^0 \frac{1}{2} \sqrt{u} du \\ &= -2\pi \frac{2}{3} [u^{\frac{3}{2}}]_{R^2}^0 \\ &= -\frac{4\pi}{3} (0^{\frac{3}{2}} - (R^2)^{\frac{3}{2}}) \\ &= \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

som er den korrekte formelen for volumet av en kule med radius  $R$ , først utledet av Archimedes for mer enn 2000 å siden.

Et annet eksempel på en beregning av et volum som et dobbeltintegral ved å bruke polarkoordinater er torusen,



Vi setter radius i den blå sirkelen til å være  $A$ , og den røde sirkelen til å være  $a$ . En parametrisering av torusen er gitt ved

$$\rho(r, \theta) = \sqrt{a^2 - (r - A)^2}$$

Volumet av torusen finner vi ved å integrere  $\rho(r, \theta)$  over området

$$D = [0, 2\pi] \times [A - a, A + a]$$

På samme måte som for kula har vi en øvre og en nedre halv-torus, slik at volumet blir 2 ganger integralet:

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_D \rho(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= 2 \int_{A-a}^{A+a} \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (r - A)^2} r d\theta dr \\ &= 4\pi \int_{A-a}^{A+a} \sqrt{a^2 - (r - A)^2} r dr \end{aligned}$$

Vi setter først  $v = r - A$ , som gir  $dv = dr$ , og nye grenser  $v(A - a) = -a$ ,  $v(A + a) = a$ . Det gir

$$\begin{aligned} V &= 4\pi \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - v^2} (v + A) dv \\ &= 4\pi \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - v^2} v dv + 4\pi A \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - v^2} dv \end{aligned}$$

Symmetrien av  $\sqrt{a^2 - v^2} v$  i intervallet  $[-a, a]$  gir at det første integralet blir 0, dvs

$$V = 0 + 4\pi A \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - v^2} dv$$

Så setter vi  $v = a \sin u$  og  $dv = a \cos u du$ , med nye gren-

ser  $u = \pm \frac{\pi}{2}$ , fordi  $a \sin \pm \frac{\pi}{2} = \pm a$ . Det gir

$$\begin{aligned} V &= 4\pi A \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a \sin u)^2} a \cos u du \\ &= 4\pi A \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sqrt{1 - (\sin u)^2} \cos u du \\ &= 4\pi a^2 A \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du \end{aligned}$$

Men vi vet fra tidligere at en anti-derivert av  $\cos^2 u$  er  $\frac{1}{2}(u + \sin u \cos u)$ , som gir

$$\begin{aligned} V &= 4\pi a^2 A \left[ \frac{1}{2}(u + \sin u \cos u) \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4\pi a^2 A \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \right) \\ &= 2\pi^2 a^2 A \end{aligned}$$

som gir oss volumet av torusen. Dette er nøyaktig det samme volumet som en sylinder med radius  $a$  og lengde  $2\pi A$ . Når vi bøyer denne sylindere til en torus vil volumtapet innenfor midten svare nøyaktig til volumgevinsten utenfor midten.

## 10.2 Multipl integrasjon over mer generelle områder

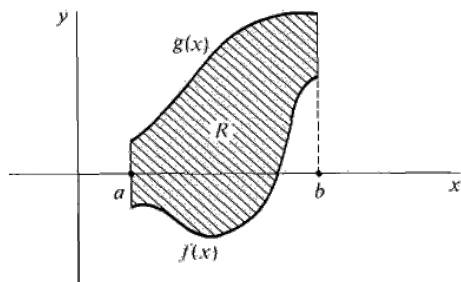
Vi skal se på dobbeltintegralet over mer generelle områder enn rektangler, områder som er begrenset av grafene til funksjoner i en variabel. Vi begynner med de områdene vi kaller type I. Dette er områder gitt ved

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

Dette området i  $(x, y)$ -planet er avgrenset av de to grafene til  $g(x)$  og  $f(x)$ , mellom de to linjene  $x = a$  og  $x = b$ . Grensene i den første integrasjonen, si med hensyn på  $y$ , vil være funksjoner i  $x$ . Disse setter vi inn for  $y$  i uttrykket for den anti-deriverte til funksjonen  $f(x, y)$  med hensyn på  $y$ . Det gir oss en ny funksjon i  $x$  som vi så kan regne ut det bestemte integralet til.

Proseduren for å regne ut slike integral er den samme som over rektangler, bortsett fra at rekkefølgen nå er vesentlig. I områder av type I er avgrensingen gitt ved at  $y$  ligger mellom to funksjoner i  $x$ . Det betyr at vi først må integrere med hensyn på  $y$ , og deretter med

hensyn på  $x$ . Hvis vi integrerer med hensyn på  $x$  først vil integrasjon med hensyn på  $y$  etterpå gi oss et svar som er en funksjon i  $x$ , noe vi ikke skal ha. Svaret skal være et tall.



Figur 10.1. Område av type I

**Definisjon 10.2.1.** Vi definerer integralet av funksjonen  $f(x,y)$  over området  $D$ , gitt over, til å være

$$\iint_D f dA = \int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

**Eksempel 10.2.1.** La  $D$  være området gitt ved ulikhetene  $1 \leq x \leq 2$  og  $0 \leq y \leq x^2$ . Vi skal beregne dobbeltintegralet

$$\iint_D xy dx dy$$

I dette eksemplet er  $g(x) = 0$  og  $h(x) = x^2$ . Det gir

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \int_1^2 \left( \int_0^{x^2} xy dy \right) dx \\ &= \int_1^2 \left[ \frac{1}{2} xy^2 \Big|_0^{x^2} \right] dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{2} x^5 dx = \left[ \frac{1}{12} x^6 \right]_1^2 = \frac{63}{12} \end{aligned}$$

Områder (integraler) av type II er avgrenset av kurver på formen  $x = g(y)$ , altså grafer der  $x$ -aksen og  $y$ -aksen har byttet roller i forhold til type I.

$$D = \{(x,y) \mid c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

Formelen for dobbeltintegralet av en funksjon  $f(x,y)$  over et slikt område er gitt ved

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y) dx \right) dy$$

Det er viktig å merke seg at i disse tilfellene er det ikke nødvendigvis mulig å bytte om på integrasjonsrekkefølgen, det kan vi kun gjøre dersom området både er av type I og av type II.

**Eksempel 10.2.2.** Vi skal beregne dobbeltintegralet  $\iint_D y^2 \sin xy dx dy$  der  $D$  er området mellom  $x = y$  og  $x = 0$  og der  $y \in [0, a]$ . Vi regner ut

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y) dx dy &= \int_0^a \left( \int_0^y y^2 \sin xy dx \right) dy \\ &= - \int_0^a \left[ y^2 \cdot \frac{1}{y} \cos xy \right]_0^y dy \\ &= - \int_0^a y \cos y^2 - y dy \\ &= - \left[ \frac{1}{2} \sin y^2 - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^a \\ &= \frac{a^2 - \sin a^2}{2} \end{aligned}$$

### 10.3 Areal og tyngdepunkt

Vi kan bruke dobbeltintegrasjon til å finne arealet til et område i  $xy$ -planet. Det gjør vi ved å betrakte konstantfunksjonen  $f(x,y) = 1$  over det området vi skal finne arealet av. Det legemet vi da beregner volumet av vil være en sylindrisk boks med grunnflate lik området i  $xy$ -planet og høyde 1, og arealet får nøyaktig samme verdi som volumet. Vi kan se på et eksempel.

**Eksempel 10.3.1.** Vi skal finne arealet av området i  $xy$ -planet som ligger inni parabelen  $y = x^2$ , under  $y = 1$  og mellom  $x = -1$  og  $x = 1$ . Vi beregner dobbeltintegralet

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 1 dy dx = \int_{-1}^1 [y]_{x^2}^1 dx \\ &= \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left[ x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 \\ &= \left( 1 - \frac{1}{3} \right) - \left( -1 - \frac{1}{3} (-1)^3 \right) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Vi kan bruke en tilsvarende teknikk for å finne **tyngdepunktet** av et areal i planet. Tyngdepunktet av et område  $D$  i planet er det punktet som ligger mest midt i området. Det betyr at dersom vi kutter ut området på en papplatt og setter platen på toppen av en passerspiss, så vil platen balansere dersom vi har satt passerspissen i tyngdepunktet.

Vi skal vise at koordinatene  $(\bar{x}, \bar{y})$  til tyngdepunktet til området  $D$  er gitt ved formelene

$$\bar{x}A = \iint_D x dx dy \quad \bar{y}A = \iint_D y dx dy$$

der  $A$  er arealet av området  $D$ . Vi skal vise dette for et type I-område. La området  $D$  være gitt ved

$$D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$



Fra Archimedes likevektsprinsipp vet vi at momentene av områdene på de to sidene av  $\bar{x}$  i  $x$ -retningen må være like store, og tilsvarende for  $\bar{y}$  i  $y$ -retningen. For en verdi av  $x$  er bredden av området gitt ved  $h(x) - g(x)$  i  $y$ -retningen og vi får

$$\int_a^{\bar{x}} (\bar{x} - x)(h(x) - g(x)) dx = \int_{\bar{x}}^b (x - \bar{x})(h(x) - g(x)) dx$$

som vi kan skrive

$$\begin{aligned} \bar{x} \int_a^{\bar{x}} (h(x) - g(x)) dx - \int_a^{\bar{x}} x(h(x) - g(x)) dx \\ = \int_{\bar{x}}^b x(h(x) - g(x)) dx \\ - \bar{x} \int_{\bar{x}}^b (h(x) - g(x)) dx \end{aligned}$$

eller

$$\bar{x} \int_a^b (h(x) - g(x)) dx = \int_a^b x(h(x) - g(x)) dx$$

Nå har vi at

$$\int_{g(x)}^{h(x)} 1 dy = h(x) - g(x)$$

og vi får derfor

$$\begin{aligned} \bar{x} \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} 1 dy dx &= \int_a^b x \int_{g(x)}^{h(x)} 1 dy dx \\ &= \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} x dy dx \end{aligned}$$

Dobbeltintegralet på venstresiden er akkurat arealet av området  $D$  og formelen gitt over følger. Argumentet er helt tilsvarende for et type II-område. Mer generelle områder kan man alltid dele opp i delområder av type I eller type II, og bruke dette til å vise at formen for tyngdepunktet blir på nøyaktig samme form som vi har vist for type I-områder.

**Eksempel 10.3.2.** Vi kan bruke disse formelene til å finne tyngdepunktet til en trekant med grunnlinje  $a$  og høyde  $h$ . Vi legger de tre hjørnene i punktene  $(-\frac{a}{2}, 0)$ ,  $(\frac{a}{2}, 0)$  og  $(0, h)$ . Siden trekanten stikker like mye ut på hver side av  $y$ -aksen vil et enkelt symmetriargument gi at  $\bar{x} = 0$ . For å finne  $y$ -koordinaten deler vi trekanten i to og betrakter den delen som ligger i første kvadrant.

Igjen vil et symmetriargument gi at  $y$ -koordinaten til tyngdepunktet er den samme for den halve trekanten som for hele trekanten. Området vi skal integrere over er gitt ved  $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$  og  $0 \leq y \leq h - \frac{2h}{a}x$ . Den siste ulikheten får vi fra uttrykket som gir likningen til hypotenusen i den halve trekanten, nemlig  $y = h - \frac{2h}{a}x$ . Arealet av den halve trekanten er  $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h = \frac{ah}{4}$  og formelen over gir oss

$$\begin{aligned} \bar{y} \cdot \frac{ah}{4} &= \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{h - \frac{2h}{a}x} y dy dx \\ &= \int_0^{\frac{a}{2}} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{h - \frac{2h}{a}x} dx \\ &= \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{h^2}{2} - \frac{2h^2}{a}x + \frac{2h^2}{a^2}x^2 dx \\ &= \left[ \frac{h^2x}{2} - \frac{h^2}{a}x^2 + \frac{2h^2}{3a^2}x^3 \right]_0^{\frac{a}{2}} \\ &= h^2 \frac{a}{4} - \frac{h^2}{a} \left( \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{2h^2}{3a^2} \left( \frac{a}{2} \right)^3 \\ &= ah^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right) = ah^2 \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Deler vi ut får vi at  $\bar{y} = \frac{1}{3}h$  som er  $y$ -koordinaten til tyngdepunktet.

I mange situasjoner er vi interessert i å beregne gjennomsnittet av en funksjon over et område i planet. En ikke-negativ funksjon  $f = f(x, y)$  i to variable vil definere et volum over sitt definisjonsområde. Gjennomsnittsverdien  $\bar{f}$  til  $f$  finner vi ved å dele dette volumet på arealet av området. Formelen blir da

$$\bar{f} = \frac{1}{\text{areal}(D)} \iint_D f(x, y) dx dy$$

**Eksempel 10.3.3.** Vi skal beregne gjennomsnittsverdien til funksjonen  $f(x, y) = x^2 + xy$  over rektangelet  $[0, 1] \times [0, 2]$ . Arealet av området er opplagt 2, og gjennomsnittsverdien blir da

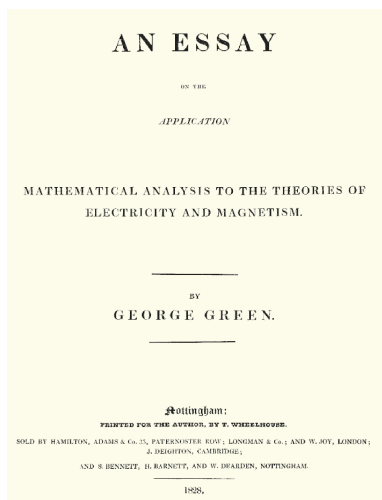
$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^2 x^2 + xy dy dx \\ &= \int_0^1 \left[ x^2y + \frac{1}{2}xy^2 \right]_0^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (2x^2 + 2x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Merk sammenhengen mellom gjennomsnittsverdien av en funksjon og tyngdepunkt,  $x$ -koordinaten til

tyngdepunktet er gjennomsnittsverdien av variabelen  $x$  over området, tilsvarende for  $y$ . Vi kan altså betrakte tyngdepunktet som et slags gjennomsnittspunkt for området.

## 10.4 Greens teorem\*

Det dreier seg om et av matematikkens mest berømte resultater, nemlig det som kalles **Stokes teorem**. Stokes teorem ble først formulert av vitenskapsmannen William Thompson (1824-1907), eller Lord Kelvin, i 1850, men har fått navn etter Sir George Gabriel Stokes (1819-1903). Begge disse to satt dype spor etter seg innen matematikk og naturvitenskap.



Vi skal studere den 2-dimensjonale versjonen av Stokes teorem. Denne versjonen har fått navnet **Greens teorem**, oppkalt etter George Green (1793-1841). Green formulerte dette resultatet i det oppsiktsvekkende essayet *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* fra 1828. Essayet er oppsiktsvekkende av to grunner. For det første fordi det inneholder nye og banebrytende resultater, for det andre fordi det er skrevet av en legmann. Green hadde faktisk bare ett års skolegang! Her er hans resultat:

**Teorem 10.4.1.** La  $C$  være en positivt orientert (dvs. mot klokka), lukket kurve i planet gitt ved parametriseringen  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$  og la  $D$  være det området som kurven  $C$  omslutter. La  $F(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$  være

et vektorfelt. Da har vi

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt &= \oint_C (p(\mathbf{r}(t))x'(t) + q(\mathbf{r}(t))y'(t)) dt \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \text{curl}(\mathbf{F}) dx dy \end{aligned}$$

Med andre ord, den totale sirkulasjonen til feltet over et område er lik kurveintegralet til feltet langs randa til området. Dersom feltet er konservativt vil begge sider i likheten være 0, venstresiden fordi lukkede kurveintegral i et konservativt felt er 0, høyresiden fordi integranden er 0 for et konservativt felt.

**Eksempel 10.4.1.** Betrakt det sirkulære vektorfeltet  $f(x, y) = (-y, x)$  og sirkelen  $\mathbf{r}(t) = (R \cos t, R \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Vi har tidligere sett at venstresiden er lik  $2\pi R^2$ . Høyresiden kan vi også regne ut,

$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{\partial}{\partial x}(-y) - \frac{\partial}{\partial y}(x) \right) dx dy &= \iint_D (1 + 1) dx dy \\ &= 2 \cdot \text{areal}(D) = 2\pi R^2 \end{aligned}$$

**Eksempel 10.4.2.** Vi skal beregne integralet

$$\oint_C y^2 dx + 3xy dy = \oint_C y^2 x'(t) + 3xy y'(t) dt$$

rundt øvre halvpart av enhetssirkelen  $C$  med sentrum i origo. Vi kaller øvre halvpart av enhetsdisken  $D_+$ . Da har vi

$$\begin{aligned} \oint_C y^2 dx + 3xy dy &= \iint_{D_+} \left( \frac{\partial}{\partial x} 3xy - \frac{\partial}{\partial y} y^2 \right) dx dy \\ &= \iint_{D_+} (3y - 2y) dx dy = \iint_{D_+} y dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

**Eksempel 10.4.3.** Vi kan uttrykke arealet av et område som et kurveintegral:

$$\begin{aligned} \oint_C -\frac{1}{2} y dx + \frac{1}{2} x dy &= \iint_D \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} (-y) \right) dx dy \\ &= \iint_D 1 dx dy \\ &= \text{areal}(D) \end{aligned}$$

**Eksempel 10.4.4.** Vi lar kurven  $C$  være firkanten gitt av hjørnene  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  og  $(1, 1)$ . Vi skal beregne kurveintegralet

$$I = \oint_C (5 - xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy) dy$$

La

$$\mathbf{F}(x, y) = (5 - xy - y^2, x^2 - 2xy)$$

Da kan vi skrive kurveintegralet som

$$I = \oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

hvor  $\mathbf{r}(t)$  er en parametrisering av kurven  $C$ . Vi har

$$\text{curl}(5 - xy - y^2, x^2 - 2xy) = 2x - 2y + x + 2y = 3x$$

og Greens teorem gir at

$$I = \iint_D \text{curl}(\mathbf{F}) dA = \iint_D 3x dA$$

hvor  $D$  er firkanten som omslutes av kurven  $C$ . Bruker vi tyngdepunktsformelen motsatt vei finner vi at

$$\iint_D 3x dA = 3 \cdot \text{areal}(D) \cdot \bar{x} = \frac{3}{2}$$

Vi skal se på et eksempel der vi regner ut begge sidene i Greens teorem og se at vi får samme svar.

Vi lar vektorfeltet være gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (p(x, y), q(x, y)) = (xy, x + y)$$

og vi skal integrere det langs randa til området  $D$ , gitt som første kvadrant av enhetsdisken i planet, dvs. i kartesiske koordinater,

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$$

eller i polarkoordinater,

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 1$$

Randa til  $D$ , dvs. den lukkede kurven som omslutter  $D$  er gitt ved tre deler, segmentet langs  $x$ -aksen;  $\mathbf{r}_1(t) = (t, 0)$ ,  $0 \leq t \leq 1$  med  $\mathbf{r}'_1(t) = (1, 0)$ , sirkelbuen  $\mathbf{r}_2(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  med  $\mathbf{r}'_2(t) = (-\sin t, \cos t)$  og segmentet langs  $y$ -aksen,  $\mathbf{r}_3(t) = (0, 1 - t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , med  $\mathbf{r}'_3(t) = (0, -1)$ .

Venstresiden i Greens teorem ser da ut som

$$\begin{aligned} \oint_C p dx + q dy &= \int_0^1 p(t, 0)x'_1(t) + q(t, 0)y'_1(t) dt \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(\cos t, \sin t)x'_2(t) + q(\cos t, \sin t)y'_2(t) dt \\ &+ \int_0^1 p(0, 1 - t)x'_3(t) + q(0, 1 - t)y'_3(t) dt \\ &= \int_0^1 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 dt \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t \cdot \sin t)(-\sin t) + (\cos t + \sin t)(\cos t) dt \\ &+ \int_0^1 0 \cdot 0 + (1 - t)(-1) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin^2 t \cos t + \cos^2 t + \sin t \cos t) dt \\ &+ \int_0^1 t - 1 dt \\ &= \left[-\frac{1}{3} \sin^3 t + \frac{1}{4} \sin 2t + \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{2} t^2 - t\right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Vi har  $\text{curl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = 1 - x$  som gir høyresiden

$$\iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx dy = \iint_D 1 - x dx dy$$

Området  $D$  er både type 1 og type 2, vi skal beregne integralet som et type 1-integral. Som nevnt tidligere er området gitt ved  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$ , og vi har

$$\begin{aligned} \iint_D 1 - x dx dy &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1 - x dy dx \\ &= \int_0^1 [y - xy]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx - \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx \end{aligned}$$

Det første integralet gir presis arealet mellom  $x$ -aksen og grafen til  $y = \sqrt{1 - x^2}$ , dvs. arealet av  $D$ . Dette er en kvart sirkelskive med radius 1, og areal  $\frac{\pi}{4}$ . Det andre integralet løser vi ved å substituere  $u = 1 - x^2$ , med

$du = -2x dx$ . Det gir

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{1-x^2} dx &= \frac{1}{-2} \int \sqrt{u} du \\ &= -\frac{1}{2} \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Setter vi dette inn i integralet får vi

$$\begin{aligned} \iint_D 1-x dx dy &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx - \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Vi kan også beregne dette integralet ved å bruke polarkoordinater,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq r \leq 1$ . For polarkoordinater har vi alltid  $dx dy = r dr d\theta$ . Med  $x = r \cos \theta$  gir det

$$\begin{aligned} \iint_D 1-x dx dy &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-r \cos \theta) r d\theta dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r-r^2 \cos \theta) d\theta dr \\ &= \int_0^1 [r\theta - r^2 \sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} dr \\ &= \int_0^1 \left(r \frac{\pi}{2} - r^2\right) dr \\ &= \left[\frac{1}{2} r^2 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} r^3\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Det fabelaktige med Greens teorem illustreres godt av dette eksemplet, vi beregner to forskjellige integraler, ett kurveintegral og ett dobbeltintegral. Det er vanskelig å se direkte at disse to utregningene gir samme svar, men det gjør det altså.

## Opgaver

**Oppgave 1.** Beregn dobbeltintegralet  $\iint_D f(x,y) dx dy$  for

- $f(x,y) = xye^{x^2+y^2}$ , hvor  $D = [1,3] \times [1,2]$ .
- $f(x,y) = xy + \frac{x}{y+1}$ , hvor  $D = [1,4] \times [1,2]$ .
- $f(x,y) = \sin xe^y$ , hvor  $D = [0,\pi] \times [-1,0]$ .

**Oppgave 2.** Beregn dobbeltintegralet  $\iint_D f(x,y) dx dy$  for

- $f(x,y) = x^2 + y^2$ , hvor  $D = [-1,1] \times [-1,1]$ .
- $f(x,y) = x^4 y^2 + x^2 y^4$ , hvor  $D = [0,1] \times [0,1]$ .
- $f(x,y) = xe^{xy}$ , hvor  $D = [0,1] \times [-1,1]$ .

**Oppgave 3.** Finn volumet av legemet som ligger mellom området  $[0,1] \times [0,1]$  i  $xy$ -planet og grafen til funksjonen  $f(x,y) = x + y$ .

**Oppgave 4.** En eske har grunnflate  $G = [0,1] \times [0,1]$  og høyde gitt ved funksjonen  $g(x,y) = 4 - x - y$ . Finn volumet av esken.

**Oppgave 5.** Beregn dobbeltintegralene.

- $\int_0^2 \int_{y^2-1}^{y^3} 3 dx dy$
- $\int_0^1 \int_x^{2x} (x+y)^2 dy dx$
- $\int_0^1 \int_0^{3y} e^{x+y} dx dy$

**Oppgave 6.** Finn gjennomsnittsverdien av  $x^2 + y^2$  over følgende områder:

- Kvadratet  $[0,1] \times [0,1]$
- Kvadratet  $[a, a+1] \times [0,1]$ , hvor  $a > 0$ .
- Kvadratet  $[0,a] \times [0,a]$ , hvor  $a > 0$ .

**Oppgave 7.** Finn tyngdepunktet til området i  $xy$ -planet som ligger mellom grafen til  $y = 1 - x^2$  og  $-1 \leq x \leq 1$  på  $x$ -aksen.

**Oppgave 8.** a) Finn arealet til området i  $xy$ -planet som ligger mellom grafene til  $f(x) = x^2$  og  $g(x) = x^3$ , og for  $0 \leq x \leq 1$ .

- Finn tyngdepunktet til området beskrevet i oppg. a).

**Oppgave 9.** En ellipse  $C$  er gitt ved  $x(t) = a \cos t$ ,  $y(t) = b \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Bruk Greens teorem på vektorfeltet  $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$  til å beregne arealet av ellipsen.

**Oppgave 10.** Et område  $D$  i  $(x, y)$ -planet er avgrenset av en kurve  $C$  gitt ved rette linjer gjennom de fire hjørnene  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$  og  $(2, 2)$ . Beregn kurveintegralet (mot klokka)

$$\oint_C y^2 dx + x dy$$

ved å bruke Greens teorem.

**Oppgave 11.** Samme oppgave som over, men la området være avgrenset av hjørnene  $(\pm 1, \pm 1)$ .

**Oppgave 12.** Samme oppgave som over, men nå lar vi området være avgrenset av en sirkel om origo, med radius lik 2

**Oppgave 13.** Løs integralene ved å bruke polarkoordinater:

- $\iint_R xy^2 dA$ , der  $R$  er området i første kvadrant som ligger innenfor sirkelen  $x^2 + y^2 = 9$ .
- $\iint_R (x^2 + y^2) dA$ , der  $R$  er området i første kvadrant som ligger innenfor sirkelen  $x^2 + y^2 = 25$  og mellom linjene  $y = 0$  og  $y = x$ .
- $\iint_R e^{x^2+y^2} dA$ , der  $R$  er området mellom sirklene om origo med radier lik 1 og 4.
- $\iint_R xy dA$ , der  $R$  er området i første kvadrant avgrenset av  $x$ -aksen, linjen  $y = x$  og sirkelen  $x^2 + y^2 = 1$
- $\iint_R (x^2 - y^2) dA$ , der  $R$  er området i tredje kvadrant som ligger mellom linjene  $y = \sqrt{3}x$ ,  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$  og innenfor sirkelen  $x^2 + y^2 = 1$ .
- $\iint_R \sqrt{2 - x^2 - y^2} dA$ , der  $R$  er den delen av sirkelen  $x^2 + y^2 \leq 1$  som ligger i første kvadrant.

# Kapittel 11

## Vekstmodeller

For å forstå prosesser i naturen er **matematiske modeller** et nyttig verktøy. Matematiske modeller tar utgangspunkt i naturlover og “modellerer” disse i et matematisk språk. Naturlovene uttaler seg veldig ofte om hva som kommer til å skje med et system når forutsetningene er gitt og tiden går. F.eks. vil en ball falle til bakken når vi slipper den fra en høyde. Ved å stille opp en matematisk modell som beskriver gravitasjon, kan vi med stor nøyaktighet regne ut hvor lang tid det tar før ballen treffer bakken.

Ingrediensene i en matematisk modell er en eller flere størrelser, deres relasjoner i forhold til hverandre og ikke minst, kunnskap om hvordan størrelsene forandrer seg over tid. Størrelsene erstatter vi med funksjoner eller variable, og endringer modellerer vi ved derivasjon. Dermed ender en matematisk modell gjerne opp som en likning som involverer funksjoner og deres deriverte. Dette er det vi kaller **differensiallikninger**.

I dette kapitlet skal vi se på noen enkle fysiske prosesser, stille opp modeller for disse og se hvordan vi ved å bruke matematiske verktøy kan predikere hva som vil skje over tid.

Det er viktig å understreke at matematiske modeller bare er *modeller* av virkeligheten. Modellene kan være gode eller dårlig, alt etter som hvor nøyaktig de beskriver et tidsforløp. Men de vil aldri *være* virkeligheten.

### 11.1 Enkle vekstmodeller

Vi lar  $y = y(t)$  betegne en størrelse som varierer med tiden. Anta at endringen av  $y$  er konstant og derfor ikke varierer, verken med hensyn på tid eller størrelsen på  $y$ . Dette gir oss likningen

$$\frac{dy}{dt} = k$$

som betyr at  $y$  har lineær vekst,  $y = kt + C$ , hvor  $k$  og  $C$  er reelle konstanter. Selv om vi snakker om vekst, er det fullt mulig at  $k$  er negativ, slik at  $y$  avtar. Mao negativ vekst er også en form for vekst.

En veldig vanlig vekstmodell er det som kalles **eksponensiell vekst**. I en eksponensiell vekstmodell antar vi at vekstraten til en størrelse er proporsjonal med størrelsen selv. Eksempler på slike vekstmodeller er befolkningsvekst, radioaktiv stråling og unimolekylære reaksjoner. Kaller vi den gitte størrelsen for  $y = y(t)$  sier modellen at

$$\frac{dy}{dt} = \lambda \cdot y$$

Dette er en **første ordens differensiallikning** og vi kan løse den ved en teknikk som kalles **separasjon av variable**. Differensiallikninger som er mulig å løse med denne teknikken kalles **separable differensiallikninger**. Vi samler alt som har med  $y$  å gjøre på venstre side av likhetstegnet og resten på høyre side. Det gir

$$\frac{dy}{y} = \lambda dt$$

Nå integrer vi begge sider og får på venstre side

$$\int \frac{dy}{y} = \ln y + C_1$$

der  $C_1$  er en vilkårlig konstant. Høyre side blir

$$\int \lambda dt = \lambda t + C_2$$

Dette gir oss likheten

$$\ln y = \lambda t + C_2 - C_1$$

som vi opphøyer  $e$  i og får

$$y(t) = Ce^{\lambda t}$$

der vi har slått sammen konstantene  $C = e^{C_2 - C_1}$ .

**Eksempel 11.1.1.** En befolkning  $N = N(t)$  vokser med en konstant vekstrate  $\lambda$ , og ved tiden  $t = 0$  har vi  $N(0) = 5 \cdot 10^6$ . Det gir

$$\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N$$

og derfor

$$N(t) = Ce^{\lambda t}$$

Vi kan sette inn  $t = 0$  for å bestemme  $C$ :

$$N(0) = Ce^{\lambda \cdot 0} = C = 5 \cdot 10^6$$

Det gir

$$N(t) = 5 \cdot 10^6 e^{\lambda t}$$

Et annet eksempel på eksponensiell vekst er radioaktiv stråling. En av karbon-isotopene,  $C^{14}$  er ustabil, med en halveringstid på ca. 5730 år. Ved utstråling av  $\beta$ -partikler vil isotopen omdannes til en stabil nitrogenisotop.

**Eksempel 11.1.2.** Den matematiske modellen sier at mengden av stråling er proporsjonal med mengden av gjenværende  $C^{14}$ . Vi kaller mengden av  $C^{14}$  for  $y = y(t)$ . Det gir

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y$$

der  $\lambda$  er en positiv konstant. Vi har satt minus foran siden strålingen reduserer mengden av  $C^{14}$ . Likningen har løsning

$$y(t) = y_0 e^{-\lambda t}$$

hvor vi har  $y_0 = y(0)$ . Halveringstiden til den ustabile isotopen er den tiden det tar til halvparten av den opprinnelige mengden er borte. Hvis vi kaller halveringstiden for  $T$  har vi

$$\frac{y_0}{2} = y(T) = y_0 e^{-\lambda T}$$

Det betyr at

$$-\lambda T = \ln \frac{1}{2}$$

som vi løser ut med hensyn på  $\lambda$  og får

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

dvs.

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t} = y_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

Vi kan sammenfatte det vi har sagt til nå i følgende teorem:

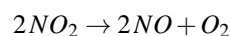
**Teorem 11.1.1.** La  $y = y(t)$  være en deriverbar funksjon som oppfyller differensiallikningen

$$\frac{dy}{dt} = \lambda \cdot y$$

og hvor  $y(0) = y_0$ . Da er løsningen av likningen gitt ved

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t}$$

Modellen over kalles en **første ordens lineær** differensiallikning. Første orden betyr at kun  $y$  og  $y'$  inngår i likningen, mens den er lineær siden ingen av uttrykkene som inneholder  $y$  opptrer i høyere potens enn 1. Et eksempel på en første ordens **ikke-lineær** differensiallikning er en modell for en kjemisk reaksjon der reaktanden består av to like atomer, f.eks



Vi lar  $y = y(t)$  betegne konsentrasjonen av  $NO_2$ . Da vil  $y$  tilfredsstille differensiallikningen

$$\frac{dy}{dt} = \lambda \cdot y^2$$

Dette er også en separabel likning som vi løser ved samme teknikk som over, separasjon av variable:

$$\frac{dy}{y^2} = \lambda dt$$

Nå integrer vi begge sider og får på venstre side

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + C_1$$

der  $C_1$  er en vilkårlig konstant. Høyre side blir

$$\int \lambda dt = \lambda t + C_2$$

Dette gir

$$-\frac{1}{y} + C_1 = \lambda t + C_2$$

eller

$$y = \frac{1}{C - \lambda t}$$

der igjen  $C = C_1 - C_2$  er en felles konstant. Setter vi  $y(0) = y_0$  inn i likningen får vi

$$y_0 = y(0) = \frac{1}{C - 0} = \frac{1}{C}$$

som gir

$$y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - \lambda t} = \frac{y_0}{1 - y_0 \lambda t}$$

**Eksempel 11.1.3.** La  $N = N(t)$  være antallet dyr, f.eks. kaniner på en øy, uten naturlige fiender. Vi tenker oss at kaninene ferdes fritt og at formeringen bare avhenger av hvor ofte to kaniner møtes. Dette antallet møter mellom to kaniner vil være proporsjonalt med kvadratet av antall kaniner. Dermed få vi den matematiske modellen gitt ved likningen

$$\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N^2$$

Vi har akkurat vist at løsningen av denne likningen er

$$N(t) = \frac{N_0}{1 - N_0 \lambda t}$$

Et interessant poeng med denne formelen er at dersom vi lar  $t \rightarrow \frac{1}{N_0 \lambda}$ , så vil  $N(t) \rightarrow \infty$ . Det er jo selvfølgelig umulig i praksis. Det betyr ikke at modellen er dårlig, for så lenge antall kaniner er lavt tenker vi oss at modellen stemmer godt overens med virkeligheten. Dette er et eksempel på at modeller kan ha et **gyldighetsområde**. Så lenge antall kaniner holder seg i det området fungerer modellen, dvs. modell og virkelighet stemmer godt overens. Når vi beveger oss ut av dette gyldighetsområdet begynner det å bli stort avvik mellom modell og virkelighet, selvfølgelig fordi andre faktorer, som f.eks konsekvenser av overbefolkning som matmangel og forurensing, begynner å bli vesentlige faktorer. Dermed kollapser modellen som modell av virkeligheten.

## 11.2 Logistisk vekst

I det forrige eksempelet så vi at vekstmodellen kollapset når antallet kaniner begynte å bli veldig stort. En måte å modifisere modellen for å ta hensyn til denne effekten kalles **logistisk vekst**. I den logistiske vekstmodellen antar vi at vekstraten til en størrelse  $y = y(t)$  er proporsjonal, ikke bare med  $y$ , men også med  $A - y$  der  $A$  er **bærekraften** til størrelsen. Størrelsen  $A - y$  uttrykker hvor langt det er igjen til "taket" for størrelsen  $y$ . Vi skriver likningen som

$$\frac{dy}{dt} = \lambda \cdot y(A - y)$$

Dette er også en separabel differensiallikning som vi kan skrive på formen

$$\frac{dy}{y(A - y)} = \lambda \cdot dt$$

For å løse denne likningen bruker vi likheten

$$\frac{1}{y(A - y)} = \frac{1}{A} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{A - y} \right)$$

Det gir

$$A \frac{dy}{y(A - y)} = \frac{dy}{y} + \frac{dy}{A - y} = A \lambda \cdot dt$$

Vi integrerer begge sider og får på venstre side

$$\int \frac{dy}{y} + \frac{dy}{A - y} = \ln y - \ln(A - y)$$

Høyresiden blir

$$\int A \lambda \cdot dt = A \lambda t + C'$$

Som vi har sett tidligere trenger vi bare å ta med en integrasjonskonstant på den ene siden.

Regnereglene for logaritmefunksjoner gir at

$$\ln y - \ln(A - y) = \ln \left( \frac{y}{A - y} \right)$$

Ved å bruke eksponensialfunksjonen på likheten og det faktum at eksponensialfunksjonen og logaritmefunksjonen er omvendte funksjoner får vi

$$\frac{y}{A - y} = e^{A \lambda t + C'} = C e^{A \lambda t}$$

hvor vi for enkelthet skyld har satt  $C = e^{C'}$ . Setter vi  $y(0) = y_0$  får vi

$$C = \frac{y_0}{A - y_0}$$

dvs.

$$\frac{y}{A - y} = \frac{y_0}{A - y_0} e^{A \lambda t}$$

Denne likningen kan vi løse med hensyn på  $y$  og vi får (med litt regning)

$$y(t) = \frac{A y_0}{(A - y_0) e^{-A \lambda t} + y_0}$$

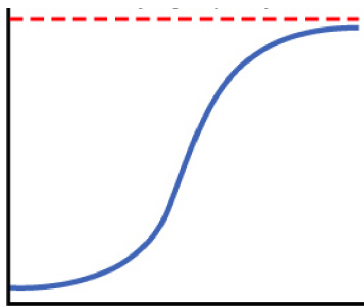
Hvis vi lar  $t \rightarrow \infty$ , så vil leddet  $(A - y_0) e^{-A \lambda t} \rightarrow 0$ , og vi står igjen med

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{A y_0}{0 + y_0} = A$$

Denne funksjonen er illustrert i figur 11.1. Den vannretteaksen er tid. Så lenge  $y$  er liten vil funksjonen



oppføre seg veldig likt vanlig eksponensiell vekst, siden  $A - y$ -faktoren er tilnærmet konstant. Etter hvert som  $y$  øker vil veksten begynne å avta siden leddet  $A - y$  gjør at vekstraten igjen blir redusert. Størst vekst har vi når de to faktorene  $y$  og  $A - y$  er like, dvs. for  $y = \frac{A}{2}$ . Når  $y$  nærmer seg bærekraft-grensa  $A$  vil veksten flate ut og etter hvert gå mot 0.



**Figur 11.1.** Grafen til en logistisk vekstfunksjon

Vi kan sammenfatte dette resonnementet i et teorem:

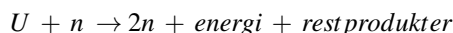
**Teorem 11.2.1.** La  $y = y(t)$  være en deriverbar funksjon som tilfredsstiller differensiallikningen

$$\frac{dy}{dt} = \lambda \cdot y(A - y)$$

og hvor  $\lambda$  og  $A$  er positive konstanter. Anta videre at  $y(0) = y_0$ . Da kan  $y(t)$  skrives på formen

$$y(t) = \frac{Ay_0}{(A - y_0)e^{-\lambda t} + y_0}$$

En kjemisk reaksjon sies å være **autokatalytisk** dersom et av reaksjons-produktene også virker som en katalysator for den samme eller en koplet reaksjon. Et eksempel på en autokatalytisk reaksjon er spaltning av uran i en atombombe-eksplosjon. Under reaksjonen skytes et nøytron inn i en uran-kjerne som så spaltes og frigjør energi og 2 nye nøytroner. I tillegg dannes noen restprodukter. De 2 nøytronene kan inngå i nye kjerne-reaksjoner, slik at mengden spaltninger øker raskt. Vi skriver reaksjonslikningen som



der  $U$  står for den aktuelle uran-isotopen og  $n$  et nøytron.

La  $y = y(t)$  betegne antall spaltede uran-kjerner, og  $A$  det totale antall av uran-isotopen rett før kjerne-reaksjonen starter. Antall spaltbare uran-atomer vil da

være  $A - y$ . La  $[n]$  være antall frie nøytroner. Den første antagelsen vi gjør i modellen er at antall kjerne-reaksjoner er proporsjonalt med produktet av antall uran-atomer og antall frie nøytroner. Dette er en rimelig antagelse siden kjerne-reaksjonene er direkte avhengig av at et nøytron treffer et uran-atom, og frekvensen av slike treff er proporsjonal både med antall atom-kjerner og antall frie nøytroner. Dermed har vi likningen

$$\frac{dy}{dt} = \lambda \cdot (A - y) \cdot [n]$$

Fra reaksjonslikningen vet vi at for hver spaltet kjerne får vi frigjort 2 nøytroner. På den annen side vil vær spaltning sluke ett nøytron. Det betyr at antall frie nøytroner er gitt ved  $[n] = 2y - y = y$ , og vi får

$$\frac{dy}{dt} = \lambda \cdot (A - y) \cdot y$$

som svarer helt til den logistiske vekstmodellen. Teoremet og figuren over gir da en komplett beskrivelse av forløpet av atombombe-eksplosjonen.

Alle modellene vi har sett på i dette kapitlet er eksempler på **separable differensiallikninger**. En separabel første-ordens differensiallikning er en likning på formen

$$\frac{dy}{dt} = f(y) \cdot g(t)$$

hvor  $f$  og  $g$  er to funksjoner, den ene i variabelen  $y$  og den andre i variabelen  $t$ . Vi kan separere variablene,

$$\frac{dy}{f(y)} = g(t) dt$$

og regne ut en anti-derivert på begge sider,

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(t) dt$$

Dermed får vi en relasjon mellom en funksjon i  $y$  og en i  $t$ . Hvis mulig, så løser vi ut denne relasjonen med hensyn på  $y$ , for å forsøke å uttrykke  $y$  som en funksjon i  $t$ . Vi skal se på et eksempel.

**Eksempel 11.2.1.** Et legeme beveger seg med konstant akselerasjon  $a$  i en retlinjet bevegelse. Ved tidspunktet  $t$  har legemet flyttet seg  $s(t)$ . Da har vi likningen

$$v = \frac{ds}{dt} = at$$

hvor farten  $v$  er uttrykt som den deriverte av strekningen  $s$  med hensyn på tiden  $t$ . Dette er en separable differensiallikning med  $f(y) = 1$  og  $g(t) = at$ . Separering av de

variable og påfølgende integrasjon gir

$$\int ds = \int at dt$$

eller  $s = s(t) = \frac{1}{2}at^2 + C$  hvor  $C = s(0)$ .

**Eksempel 11.2.2.** I en innsjø slippes det kontinuerlig ut en viss mengde av en miljøgift. Samtidig foregår den en jevn utskifting av vannet i innsjøen gjennom elver og bekker som dels renner ut i innsjøen, dels renner ut av innsjøen. Vannvolumet i innsjøen er  $V$ , utskiftingen av vann pr. tidsenhet setter vi til  $v$  og mengden av miljøgift som slippes ut pr. tidsenhet er  $p$ . Den totale mengde av miljøgift i innsjøen kaller vi  $P = P(t)$ . Vi antar at giften til enhver tid er jevnt fordelt i hele vannvolumet  $V$ . Konsentrasjonen av giften er da gitt ved  $\frac{P}{V}$ . Det betyr at mengden gift som dreneres ut pr. tidsenhet er  $\frac{P}{V} \cdot v$ . Samtidig tilføres ny gift med  $p$  pr. tidsenhet. Totalregnskapet for endring av giftmengde blir da

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{P}{V} \cdot v + p = -\frac{v}{V}(P - \frac{pV}{v})$$

Likningen har to variable,  $P$  og  $t$ , mens  $V$ ,  $v$  og  $p$  er konstanter. Den er separabel og vi kan skrive

$$\int \frac{dP}{P - \frac{pV}{v}} = -\int \frac{v}{V} dt$$

som gir

$$\ln(P - \frac{pV}{v}) = -\frac{v}{V}t + C'$$

Vi bruker eksponentialfunksjonen på begge sider og får

$$P - \frac{pV}{v} = Ce^{-\frac{v}{V}t}$$

hvor vi for enkelthet skyld har satt  $C = e^{C'}$ . Det gir oss giftmengden i sjøen gitt ved

$$P = \frac{pV}{v} + Ce^{-\frac{v}{V}t}$$

Vi ser at når  $t \rightarrow \infty$  så vil det høyre leddet gå mot 0. Det betyr at

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P = \frac{pV}{v}$$

som forteller oss at giftmengden etter hvert stabiliserer seg på et bestemt nivå. Dette kunne vi alternativt ha sett direkte fra differensiallikningen; stabil giftmengde betyr at  $\frac{dP}{dt} = 0$  eller

$$-\frac{v}{V}(P - \frac{pV}{v}) = 0$$

mao  $P = \frac{pV}{v}$ . Denne verdien kaller vi for en **likevekts-tilstand** for modellen.

## 11.3 Numeriske og analytiske løsninger

I forrige kapittel så vi hvordan noen enkle vekstmodeller ga opphav til differensiallikninger. Felles for disse likningene var at vi kunne finne løsninger, dvs. funksjoner som tilfredsstillte den gitte likningen. Dessverre er det mange differensiallikninger som ikke lar seg løse på denne måten. Etter hvert skal vi også studere systemer av differensiallikninger, og da vil det være enda færre tilfeller hvor vi faktisk kan finne en løsning. Men vi er fortsatt interessert i å bruke likningene til å forstå og å prediktere utviklingen av de størrelsene som inngår i modellen. Det betyr at vi må finne andre metoder til å behandle likningene. En effektiv strategi er det som kalles **Eulers metode**.

Vi skal begynne med et eksempel hvor vi kan finne en løsning analytisk, for så å introdusere Eulers metode og sammenlikne resultatene.

Vi betrakter likningen

$$\frac{dy}{dt} = y \quad y(0) = 1$$

Løsningen av likningen er gitt ved  $y = e^x$ , og denne kan vi bruke til å beregne verdien av  $y$  for en gitt  $t$ . F.eks. vil  $y(1) = e \approx 2,718$ .

La oss nå anta at vi ikke har funnet noen løsning, men at vi likevel ønsker å beregne verdien av  $y$  for  $t = 1$ . En første tilnærming er å ta utgangspunkt i funksjonsverdien i  $t = 0$ , og at stigningstallet til funksjonen er  $\frac{dy}{dt}(0) = y(0) = 1$  i dette punktet. Dersom vi bruker denne verdien for den deriverte i hele intervallet  $[0, 1]$  vil verdien i  $t = 1$  være

$$y(0) + \frac{dy}{dt}(0) \cdot 1 = 1 + 1 \cdot 1 = 2$$

som jo er en litt dårlig tilnærming. En bedre tilnærming får vi dersom vi deler intervallet  $[0, 1]$  i to deler og bruker samme metode på de to delintervallene. På intervallet  $[0, \frac{1}{2}]$  tar vi utgangspunkt i  $y(0) = 1$  og lar den deriverte i intervallet være lik den deriverte i  $t = 0$ . Det gir på samme måte som over at  $y(\frac{1}{2}) \approx \frac{3}{2}$ . Så gjør vi det samme på intervallet  $[\frac{1}{2}, 1]$ . Vi tar utgangspunkt i den estimerte funksjonsverdien  $\frac{3}{2}$ , men nå vil stigningstallet være  $y'(\frac{1}{2}) = y(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$ . Bruker vi dette stigningstallet gjennom hele delintervallet  $[\frac{1}{2}, 1]$  får vi en ny tilnær-

ming for  $y(1)$  ved formelen

$$y(1) \approx y(0) + y'(0) \cdot \frac{1}{2} + y'(\frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2} =$$

$$1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{4} = 2,25$$

Fortsatt er vi et stykke unna det eksakte svaret, men vi kan se hva som skjer dersom vi deler i enda flere deler. Med 3 deler får vi følgende oppsett:

$$y(0) = 1 \qquad y'(0) = y(0) = 1$$

$$y(\frac{1}{3}) \approx y(0) + y'(0) \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \qquad y'(\frac{1}{3}) \approx \frac{4}{3}$$

$$y(\frac{2}{3}) \approx y(\frac{1}{3}) + y'(\frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{3} = \frac{16}{9} \qquad y'(\frac{2}{3}) \approx \frac{16}{9}$$

Og dermed

$$y(1) \approx y(\frac{2}{3}) + y'(\frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{64}{27} \approx 2,37$$

Enda mer generelt, deler i  $n$  deler:

$$y'(0) = y(0) = 1$$

$$y'(\frac{1}{n}) = y(\frac{1}{n}) \approx y(0) + y'(0) \cdot \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$$

$$y'(\frac{2}{n}) = y(\frac{2}{n}) \approx y(\frac{1}{n}) + y'(\frac{1}{n}) \cdot \frac{1}{n} = \frac{(n+1)^2}{n^2}$$

$$\dots$$

$$y'(\frac{j}{n}) = y(\frac{j}{n}) \approx y(\frac{1}{n}) + y'(\frac{1}{n}) \cdot \frac{1}{n} = \frac{(n+1)^j}{n^j}$$

Det betyr at for  $j = n$  har vi

$$y(1) = y(\frac{n}{n}) = \frac{(n+1)^n}{n^n} = (1 + \frac{1}{n})^n$$

Lar vi  $n \rightarrow \infty$  får vi med denne metoden

$$y(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

som er det korrekte svaret.

## 11.4 Eulers metode

I dette avsnittet skal vi lage et generelt oppsett for Eulers metode, bygget opp på samme måte som vi gjorde i eksemplet i forrige avsnitt.

La  $y = y(t)$  være en funksjon som tilfredsstiller differensiallikningen

$$\frac{dy}{dt} = g(y, t)$$

og med initialbetingelsen  $y(0) = y_0$ . Vi skal finne en tilnærmet verdi for  $y(a)$  for et reelt tall  $a > 0$ . Vi deler intervallet  $[0, a]$  i  $n$  like store deler og definerer rekursivt

$$y_{j+1} = y_j + y'(\frac{a}{j}) \cdot \frac{a}{n} = y_j + g(y_j, \frac{a}{j}) \cdot \frac{a}{n}$$

Påstanden er nå at  $y_n$  gir en god tilnærming av  $y(a)$ . I tillegg vil den bli stadig bedre når vi øker antall delintervaller  $n$ . Vi skal se på noen eksempler som illustrerer at metoden gir gode resultater.

La  $y = y(t)$  være løsning av den logistiske vekstmodellen

$$y' = 10 \cdot y(1 - y)$$

der  $y(0) = 0,01$ . Vi er interessert i å regne ut  $y(1)$ . Først bruker vi formelen fra forrige kapittel for å finne den eksakte verdien. Fra teorem 11.2.1 har vi formelen

$$y(t) = \frac{Ay_0}{(A - y_0)e^{-A\lambda t} + y_0}$$

Setter vi inn  $A = 1$ ,  $\lambda = 10$ ,  $y_0 = 0,01$  og  $t = 1$ , får vi

$$y(1) = \frac{0,01}{(1 - 0,01)e^{-10} + 0,01} \approx 0,9955$$

Så skal vi bruke Eulers metode, og vi bruker  $n = 5$  delintervaller. Det gir

$$y_0 = y(0) = 0,01$$

$$y_1 = y_0 + 10y_0(1 - y_0) \cdot \frac{1}{5} \approx 0,0298$$

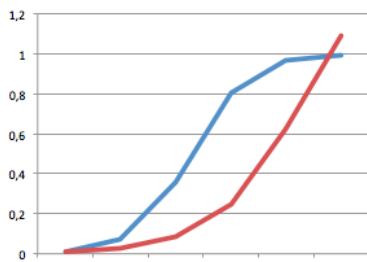
$$y_2 = y_1 + 10y_1(1 - y_1) \cdot \frac{1}{5} \approx 0,0876$$

$$y_3 = y_2 + 10y_2(1 - y_2) \cdot \frac{1}{5} \approx 0,2475$$

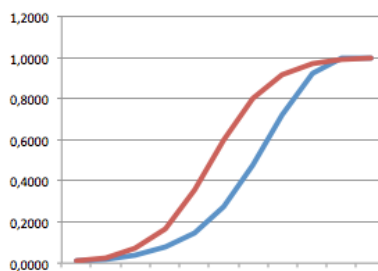
$$y_4 = y_3 + 10y_3(1 - y_3) \cdot \frac{1}{5} \approx 0,6200$$

$$y_5 \approx 1,0912$$

som opplagt er litt for mye, siden likevektstilstanden for denne modellen er  $y = 1$ . I figurene 11.2, 11.3 og 11.4 har vi plottet punktene  $(\frac{j}{n}, y_j)$  (blå kurve) for ulike antall delintervaller. Den røde kurven er en stykkvis lineær kurve der knekkpunktene tilsvarer de korrekte løsningspunktene  $(\frac{j}{n}, f(\frac{j}{n}))$ .



**Figur 11.2.** Plot av  $y_j$  og  $f(\frac{j}{n})$  for  $0 \leq j \leq 5$ .

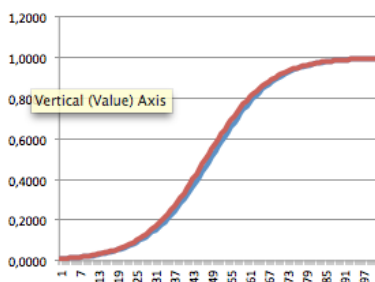


**Figur 11.3.** Plot av  $y_j$  og  $f(\frac{j}{n})$  for  $0 \leq j \leq 10$ . (Merk at fargene er byttet om i forhold til figuren over)

For å øke treffsikkerheten går vi opp til  $n = 100$  delintervaller. Det gir

$$\begin{aligned}
 y_0 &= y(0) = 0,01 \\
 y_1 &= y_0 + 10y_0(1 - y_0) \cdot \frac{1}{100} \approx 0,0110 \\
 y_2 &= y_1 + 10y_1(1 - y_1) \cdot \frac{1}{100} \approx 0,0121 \\
 y_3 &= y_2 + 10y_2(1 - y_2) \cdot \frac{1}{100} \approx 0,0133 \\
 &\dots \\
 y_{100} &\approx 0,9957
 \end{aligned}$$

som er adskillig nærmere det korrekte svaret. Figur 11.4 gir et plot av de 101 punktene  $(j, y_j)$  for  $j = 0, 1, \dots, 100$ . Vi ser at dette likner veldig på en S-kurve.



**Figur 11.4.** Plot av  $y_j$  og  $f(\frac{j}{n})$  for  $j \leq 0 \leq 100$ .

Ideen med Eulers metode er å bruke det som kalles **lineær interpolasjon**. Gitt en funksjon  $y = f(x)$ . Vi har sett tidligere at Taylor-rekka til funksjonen gir oss en god tilnærming til funksjonen. Dersom vi bare tar med ett ledd vil vi normalt få en relativt dårlig tilnærming, men jo smalere intervall vi jobber i, jo bedre vil den lineære tilnærmingen være. Taylors formel med restledd for  $n = 1$  gir at

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{f''(c)}{2} h^2$$

for en  $c$  mellom  $x$  og  $x+h$ . Anta at vi vil bruke Eulers metode med  $n$  delintervaller på et intervall  $[a, b]$ . Siden intervallet er lukket vil absoluttverdien av den andrederiverte av funksjonen være begrenset på intervallet,  $|f''(c)| \leq M$ . Det betyr at feilen vi gjør ved å bruke lineariseringen i stedet for funksjonen er gitt ved

$$|E| = \left| \frac{f''(c)}{2} h^2 \right| \leq \frac{Mh^2}{2}$$

Med  $n$  delintervaller har vi  $h = \frac{1}{n}$  som gir

$$|E| \leq \frac{M(\frac{1}{n})^2}{2} = \frac{M}{2n^2}$$

Summerer vi feilen over alle delintervallene, i alt  $n$  stykker, får vi den samlede feilen gitt ved

$$n|E| = n \cdot \frac{M}{2n^2} = \frac{M}{2n}$$

Dermed følger det at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n|E| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M}{2n} = 0$$

og vi har vist at Eulers metode faktisk virker.

Eulers metode er enkel å kode, f.eks. i MATLAB. Vi skal bruke samme eksempel som over.

Vi starter med å definere funksjonen på høyre side av differensiallikningen i et eget skript som vi kaller f.m;

```
function yp=f(y,t)
yp=10*y*(1-y);
```

Så lager vi et nytt skript hvor vi spesifiserer alle parametrene og kjører algoritmen:

```
t0=0; tf=1;           (definerer intervallet)
y0=0.01;              (setter startverdien til y)
n=100;                (antall delintervaller)
h=(tf-t0)/n;         (bredden av hvert delintervall)
```

```

t=t0; T=t;      (initierer t-kolonnen)
y=y0; Y=y;     (initierer y-kolonnen)
for i=1:n      (algoritmen begynner)
    k=f(y,t);
    y=y+h*k;
    t=t+h;
    T=[T;t];
    Y=[Y;y];
end           (algoritmen slutter)
[T,Y];      (liste over punktene)
plot(T,Y)   (utskrift)

```

Utskriften gir oss en illustrasjon av grafen, og den siste verdien i  $Y$ -kolonnen vil være tilnærmingen til  $y(1)$ .

## Oppgaver

**Oppgave 1.** La  $y = y(t)$ . Bruk framgangsmåten i teksten til å finne en løsning av den separable differensiallikningen

$$y' = y$$

der  $y(0) = 1$ .

**Oppgave 2.** La  $y = y(t)$ . Bruk framgangsmåten i teksten til å finne en løsning av den separable differensiallikningen

$$y' = 2y$$

der  $y(0) = 1$ .

**Oppgave 3.** La  $y = y(t)$ . Bruk framgangsmåten i teksten til å finne en løsning av den separable differensiallikningen

$$y' = -y$$

der  $y(1) = \frac{2}{e}$ .

**Oppgave 4.** La  $y = y(t)$ . Bruk framgangsmåten i teksten til å finne en løsning av den separable differensiallikningen

$$y' = 2\sqrt{y}$$

der  $y(0) = 1$ .

**Oppgave 5.** La  $y = y(t)$ . Bruk framgangsmåten i teksten til å finne en løsning av den separable differensiallikningen

$$y' = \frac{1}{y}$$

der  $y(0) = 2$ .

**Oppgave 6.** La  $y = y(t)$ . Bruk framgangsmåten i teksten til å finne en løsning av den separable differensiallikningen

$$y' = \frac{t}{y}$$

der  $y(0) = 2$ .

**Oppgave 7.** La  $y = y(t)$ . Finn en løsning av den separable differensiallikningen

$$y' = y(1 - y)$$

der  $y(0) = 1$ .

**Oppgave 8.** Finn en likevektstilstand for modellen gitt ved likningen

$$\frac{dy}{dt} = 2y - y^2$$

**Oppgave 9.** En matematisk modell er beskrevet av differensiallikningen

$$\frac{dy}{dt} = y(y-1)(y-2)$$

Finn likevektstilstandene til modellen.

**Oppgave 10.** En matematisk modell er gitt ved differensiallikningen

$$y' = y^2 - 3y + 2$$

For hvilke verdier av  $y$  vil vekstraten ha sin største verdi?

**Oppgave 11.** En matematisk modell er gitt ved differensiallikningen

$$yy' = 2t^3$$

hvor  $y(0) = 0$ . Finn  $y = y(t)$ .

**Oppgave 12.** En hårløkk som påstås å være fra Harald Hårfagres pannelugg blir  $C^{14}$ -datert. Det viser seg at hårløkken inneholder 98% av naturlig mengde av  $C^{14}$ -isotopen. Er det noen grunn til å stole på påstanden?

**Oppgave 13.** En fiskebestand  $N = N(t)$  vokser i henhold til en logistisk vekstmodell

$$\frac{dN}{dt} = \beta N(B - N)$$

der  $\beta$  er positiv konstant og  $B$  er bestandens bærekraftsgrense. Man bestemmer seg for drive en viss fangst fra fiskebestanden. Når vi tar hensyn til fangsten vil fiskebestanden være modellert av differensiallikningen

$$\frac{dN}{dt} = \beta N(B - N) - h$$

der  $h$  beskriver fangstvolum pr tidsenhet. Hva vil likevektstilstanden for bestanden være med en slik fangst?

Vi setter  $h = \frac{\beta B^2}{4}$ . Kan du finne en løsning av likningen?

**Oppgave 14.** Bruk Eulers metode med  $n = 5$  delintervaller på differensiallikningen

$$y' = 2, \quad y(0) = 0$$

over intervallet  $[0, 1]$ . Hva blir den tilnærmede verdien for  $y(1)$ ? Løs også likningen analytisk og sammenlikn svarene.

**Oppgave 15.** Bruk Eulers metode med  $n = 5$  delintervaller på differensiallikningen

$$y' = \frac{1}{y}, \quad y(0) = 1$$

over intervallet  $[0, 4]$ . Hva blir den tilnærmede verdien for  $y(4)$ ? Gjør samme analyse, men nå med  $n = 10$  delintervaller. Løs også likningen analytisk og sammenlikn svarene.

**Oppgave 16.** Bruk Eulers metode med  $n = 5$  delintervaller på differensiallikningen

$$y' = 0, 1y^2, \quad y(0) = 1$$

over intervallet  $[0, 10]$ . Hva blir den tilnærmede verdien for  $y(10)$ ? Gjør samme analyse, men nå med  $n = 10$  delintervaller. Løs også likningen analytisk og sammenlikn svarene.

**Oppgave 17.** Samme som oppgave 3, men bruk funksjonen

$$y' = 2y(5 - y), \quad y(0) = 1$$

over intervallet  $[0, 1]$ .

**Oppgave 18.** Bruk MATLAB eller et annet program til å lage en illustrasjon av løsningen av differensiallikningen

$$y' = ty$$

Velg selv et passende intervall og startverdi, og forsøk med forskjellig antall delintervaller.

**Oppgave 19.** Bruk MATLAB eller et annet program til å lage en illustrasjon av løsningen av differensiallikningen

$$y' = y + \frac{1}{t}$$

Velg selv et passende intervall og startverdi, og forsøk med forskjellig antall delintervaller.

**Oppgave 20.** Bruk MATLAB eller et annet program til å lage en illustrasjon av løsningen av differensiallikningen

$$y' = \sqrt{y^2 + t^2}$$

Velg selv et passende intervall og startverdi, og forsøk med forskjellig antall delintervaller.

**Oppgave 21.** Bruk MATLAB eller et annet program til å lage en illustrasjon av løsningen av differensiallikningen

$$yy' = y + t$$

Velg selv et passende intervall og startverdi, og forsøk med forskjellig antall delintervaller.

## Kapittel 12

# Systemer av differensiallikninger

I mange fysiske prosesser vil det være flere enn en størrelse som inngår. Disse størrelsene kan være avhengige av hverandre, slik at en endring av en av dem påvirker alle de andre. Et eksempel er en matematisk modell for størrelsen på to dyrepopulasjoner hvor den ene jakter på den andre. Færre byttedyr gir færre jegere, mens færre jegere fører til økning av byttedyrbestanden, osv.

Et annet eksempel er utslipp av en miljøgift i et vassdrag. Konsentrasjonen av gift i hver enkelt innsjø i vassdraget vil avhenge av konsentrasjonen i hver ovenforliggende innsjø. Vi får et koplet system der flere størrelser og deres endring står i gjensidig avhengighetsforhold til hverandre. For å lage matematiske modeller for denne type fenomener trenger vi ikke bare en differensiallikning, men et **system av differensiallikninger**.

Vi tenker oss et lite vassdrag som består av to sjøer med en elv i mellom. Vi har tilførsel av vann fra omgivelsene til begge sjøene, og fra den nederste sjøen renner også vann ut i havet. Vannmengden i de to sjøene er konstant. Ved den øverste sjøen ligger det en fabrikk som kontinuerlig slipper ut gift i vannet. Vi kaller mengden av gift i dette vannet for  $x = x(t)$ . Denne størrelsen oppfyller differensiallikningen

$$\frac{dx}{dt} = c - k_1x$$

der  $c$  uttrykker den konstante tilførselen av gift, mens  $k_1x$  reflekterer den mengden av forgiftet vann som renner ut av sjøen. Så beveger vi oss ned til den neste sjøen. Mengden av gift i denne sjøen kaller vi  $y = y(t)$ . Endringen av giftmengden her vil være avhengig av konsentrasjonen av gift i vannet som tilføres fra den øvre sjøen, minus den giften som renner ut i havet. Dette beskrives av likningen

$$\frac{dy}{dt} = k_1x - k_2y$$

Dette gir oss et system av differensiallikninger. Vi skal se hvordan vi kan håndtere slike systemer, både analytisk og numerisk.

### 12.1 Lineære systemer med konstante koeffisienter

Et lineært system av differensiallikninger er gitt ved

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy\end{aligned}$$

Vi gjetter på en løsning for dette systemet, på formen

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t}, \quad y(t) = C_2 e^{\lambda t}$$

Setter vi denne løsningen inn i likningssystemet får vi

$$\begin{aligned}\lambda C_1 e^{\lambda t} &= aC_1 e^{\lambda t} + bC_2 e^{\lambda t} \\ \lambda C_2 e^{\lambda t} &= cC_1 e^{\lambda t} + dC_2 e^{\lambda t}\end{aligned}$$

eller ved å dele ut med  $e^{\lambda t}$

$$\begin{aligned}\lambda C_1 &= aC_1 + bC_2 \\ \lambda C_2 &= cC_1 + dC_2\end{aligned}$$

Det betyr at vi må finne  $\lambda$ ,  $C_1$  og  $C_2$  som passer i det lineære likningssystemet.

$$\begin{aligned}(a - \lambda)C_1 + bC_2 &= 0 \\ cC_1 + (d - \lambda)C_2 &= 0\end{aligned}$$

Vi har en opplagt løsning, nemlig  $C_1 = C_2 = 0$ , men den er vi ikke spesielt interessert i siden den kun gir oss løsningen  $x = y = 0$ . Vi multipliserer den første

likningen med  $c$ , og den andre med  $(a - \lambda)$  og trekker dem fra hverandre. Det gir

$$(bc - (a - \lambda)(d - \lambda))C_2 = 0$$

Siden vi ikke er interessert i trivielle løsninger antar vi at  $C_2 \neq 0$ . Det betyr at

$$bc - (a - \lambda)(d - \lambda) = 0$$

som vi omformer til en 2.gradslikning i  $\lambda$ ;

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Ved å bruke  $abc$ -formelen får vi

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{a + d \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2} \\ &= \frac{a + d \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2} \end{aligned}$$

Vi kaller det som står under rottegnet for **diskriminanten** til likningssystemet, og skriver

$$\mathcal{D} = (a - d)^2 + 4bc$$

Det gir oss to løsninger

$$\lambda_1 = \frac{a + d + \sqrt{\mathcal{D}}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a + d - \sqrt{\mathcal{D}}}{2}$$

For hver av disse verdiene av  $\lambda$  må vi nå løse likningssystemet

$$\begin{aligned} (a - \lambda)C_1 + bC_2 &= 0 \\ cC_1 + (d - \lambda)C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Den første likningen gir

$$C_2 = -\frac{(a - \lambda)}{b}C_1$$

mens den andre gir

$$C_2 = -\frac{c}{(d - \lambda)}C_1$$

Men siden vi har regnet ut verdien av  $\lambda$  fra likningen  $bc - (a - \lambda)(d - \lambda) = 0$  følger det at

$$-\frac{(a - \lambda)}{b} = -\frac{c}{(d - \lambda)}$$

og de to likningene gir oss samme svar.

Før vi går videre med løsningen av differensiallikningssystemet skal vi introdusere det såkalte **superposisjonsprinsippet**. I matematisk språk sier dette at dersom vi har funnet to løsninger av et system av lineære differensiallikninger, så vil også summen av de to løsningene også være en løsning av systemet. Et fysisk eksempel på dette prinsippet er at bølger kan passere uforandret gjennom hverandre. Hvis vi har to separate kilder som genererer bølger, f.eks. lydbølger, så kommer bølgeene uforandret ut på den andre siden etter at de har møttes. Nå vi snakker i munnen på hverandre, så blir ikke lydene påvirket av hverandre.

I vårt eksempel betyr dette at vi kan finne de to løsningene hver for seg, for så å legge dem sammen og i praksis finne mange flere løsninger.

**Teorem 12.1.1.** *Et lienært system av differensiallikninger gitt ved*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy \end{aligned}$$

og hvor  $b \neq 0$ , har løsninger gitt ved

$$\begin{aligned} x(t) &= Ce^{\lambda_1 t} + De^{\lambda_2 t} \\ y(t) &= \frac{(\lambda_1 - a)}{b}Ce^{\lambda_1 t} + \frac{(\lambda_2 - a)}{b}De^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

hvor  $C$  og  $D$  er vilkårlige konstanter. Størrelsene  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  er gitt ved

$$\lambda_1 = \frac{a + d + \sqrt{\mathcal{D}}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a + d - \sqrt{\mathcal{D}}}{2}$$

hvor  $\mathcal{D} = (a - d)^2 + 4bc$  er diskriminanten til likningen.

De to konstantene  $C$  og  $D$  er å betrakte som integrasjonskonstanter og vil alltid bli bestemt av **initialverdiene** til systemet, f.eks. gitt ved verdiene  $x(0)$  og  $y(0)$ .

Vi skal se på noen eksempler.

**Eksempel 12.1.1.** *Betrakt likningssystemet*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + y \\ \frac{dy}{dt} &= -3x - 2y \end{aligned}$$

der  $x(0) = 2$ ,  $y(0) = -5$ . I dette tilfellet har vi  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = -3$  og  $d = -2$ . Det gir diskriminanten

$$\mathcal{D} = (2 + 2)^2 + 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4$$



og

$$\lambda_1 = \frac{2-2+\sqrt{4}}{2} = 1 \quad \lambda_2 = \frac{2-2-\sqrt{4}}{2} = -1$$

som vi setter inn i formelen over og får

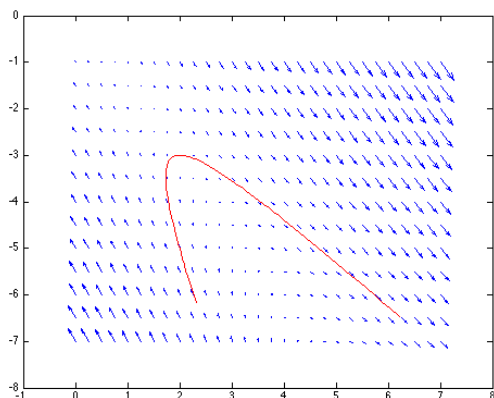
$$\begin{aligned} x(t) &= Ce^t + De^{-t} \\ y(t) &= -Ce^t - 3De^{-t} \end{aligned}$$

Setter vi inn for  $t = 0$  får vi

$$\begin{aligned} x(0) &= C + D = 2 \\ y(0) &= -C - 3D = -5 \end{aligned}$$

som gir  $C = \frac{1}{2}$  og  $D = \frac{3}{2}$ . Det gir oss den spesielle løsningen

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t} \\ y(t) &= -\frac{1}{2}e^t - \frac{9}{2}e^{-t} \end{aligned}$$



**Figur 12.1.** Vektorfelt med løsningskurve for eksempel 12.1.1

MATLAB-koden til illustrasjonen over er som følger:

```
[x,y]=meshgrid(0:0.25:7,-7:0.5:-1);
u = 2*x + y;
v = -3*x - 2*y;
quiver(x,y,u,v);
hold on
t=linspace(-0.25,2.5,100);
x1=(1/2)*exp(t)+(3/2)*exp(-t);
x2=-(1/2)*exp(t)-(9/2)*exp(-t);
plot(x1,x2,'r')
```

Vi skal se på et litt mer komplisert eksempel, der diskriminanten  $\mathcal{D}$  er negativ, slik at løsning av 2.gradslikningen gir komplekse tall.

**Eksempel 12.1.2.** Betrakt likningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x - 2y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - y \end{aligned}$$

der  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 2$ . I dette tilfellet har vi  $a = -1$ ,  $b = -2$ ,  $c = 2$  og  $d = -1$ . Det gir diskriminant

$$\mathcal{D} = (-1+1)^2 + 4 \cdot (-2) \cdot 2 = -16$$

og

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-1-1+\sqrt{-16}}{2} = -1+2i \\ \lambda_2 &= \frac{-1-1-\sqrt{-16}}{2} = -1-2i \end{aligned}$$

som vi setter inn i formelen over og får

$$\begin{aligned} x(t) &= Ce^{(-1+2i)t} + De^{(-1-2i)t} \\ y(t) &= -iCe^{(-1+2i)t} + iDe^{(-1-2i)t} \end{aligned}$$

I dette tilfellet må vi la konstantene  $C$  og  $D$  være komplekse tall. Vi setter  $C = E + iF$  og  $D = G + iH$ , og bruker samtidig formelen  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ . I tillegg har vi at  $\cos(-2t) = \cos(2t)$  og  $\sin(-2t) = -\sin(2t)$ . Det gir

$$\begin{aligned} x(t) &= (E + iF)e^{-t}(\cos(2t) + i \sin(2t)) \\ &\quad + (G + iH)e^{-t}(\cos(-2t) + i \sin(-2t)) \\ &= e^{-t}((E + G)\cos(2t) + (-F + H)\sin(2t)) \\ &\quad + ie^{-t}((F + H)\cos(2t) + (E - G)\sin(2t)) \end{aligned}$$

Tilsvarende utregning for  $y(t)$  gir

$$\begin{aligned} y(t) &= -i(E + iF)e^{-t}(\cos(2t) + i \sin(2t)) \\ &\quad + i(G + iH)e^{-t}(\cos(-2t) + i \sin(-2t))e^{(1-2i)t} \\ &= e^{-t}((F - H)\cos(2t) + (E + G)\sin(2t)) \\ &\quad + ie^{-t}((-E + G)\cos(2t) + (F + H)\sin(2t)) \end{aligned}$$

Vi er kun interessert i reelle løsninger og vi krever derfor at imaginærdelen til løsningen er 0. Det betyr at

$$F + H = E - G = 0$$

Dermed får vi

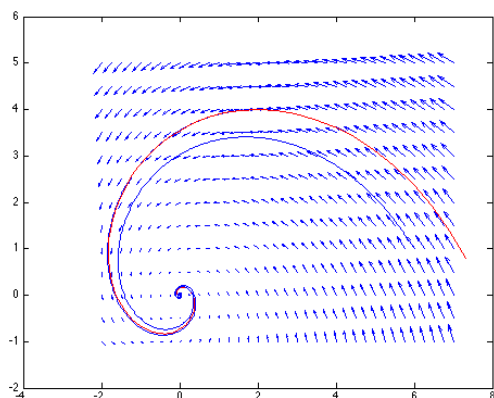
$$\begin{aligned}x(t) &= 2e^{-t} (E \cos(2t) - F \sin(2t)) \\y(t) &= 2e^{-t} (F \cos(2t) + E \sin(2t))\end{aligned}$$

Setter vi inn for  $t = 0$  får vi

$$x(0) = 2E = 1, \quad y(0) = 2F = 2$$

som gir  $E = \frac{1}{2}$  og  $F = 1$ . Det gir oss den spesielle løsningen

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-t} (\cos(2t) - 2 \sin(2t)) \\y(t) &= e^{-t} (2 \cos(2t) + \sin(2t))\end{aligned}$$



**Figur 12.2.** Vektorfelt med to løsningskurver for eksempel 12.1.2.

MATLAB-koden til illustrasjonen over er som følger:

```
[x,y]=meshgrid(-2:0.25:7,-1:0.5:5);
u = -x -2*y;
v = 2*x -y;
quiver(x,y,u,v);
hold on
t=linspace(-0.5,4,100);
x1=exp(-t).*(2*cos(2*t)-4*sin(2*t));
x2=exp(-t).*(4*cos(2*t)+2*sin(2*t));
plot(x1,x2,'r')
streamline(x,y,u,v,6,1);
```

De to eksemplene vi har sett på skiller seg fra hverandre ved fortegnet på diskriminanten. Når diskriminan-

ten er positiv vil vi alltid få en løsning på formen

$$\begin{aligned}x(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \\y(t) &= D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 e^{\lambda_2 t}\end{aligned}$$

Dersom den største av  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  er positiv, og den tilhørende koeffisienten er forskjellig fra 0, så vil denne størrelsen vokse mot  $\infty$  når  $t$  vokser. Dersom  $\lambda_1, \lambda_2 \leq 0$  vil både  $x$  og  $y$  gå mot en fast grense. I alle tilfelle vil  $(0, 0)$  være en likevektstilstand, siden

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$$

i dette punktet. I det første tilfellet sier vi at vi har en ustabil likevektstilstand, siden et lite avvik fra likevektstilstanden vil bringe systemet vekk fra likevektspunktet. Det andre tilfellet kalles en stabil likevektstilstand, for der er det motsatte tilfellet. Vi skal komme tilbake til betraktninger rundt likevektstilstander senere i kapitlet.

Når diskriminanten er negativ får vi et nokså annerledes forløp. Løsningene av differensiallikningssystemet vil alltid være på formen

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)) \\y(t) &= e^{\alpha t} (D_1 \cos(\beta t) + D_2 \sin(\beta t))\end{aligned}$$

for to reelle tall  $\alpha = \frac{a+d}{2}$  og  $\beta = \frac{\sqrt{-\mathcal{D}}}{2}$ . Uttrykkene består av to faktorer, en harmonisk funksjon, og en eksponensialfunksjon. Vi kan betrakte eksponensialfunksjonen som en amplitudefunksjon som bestemmer om den harmoniske funksjonen gir oss en spiral som går utover, innover, eller som faktisk stabiliserer seg på en fast bane. Et eksempel på det siste er det lineære likningssystemet

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -x + y \\ \frac{dy}{dt} &= -2x + y\end{aligned}$$

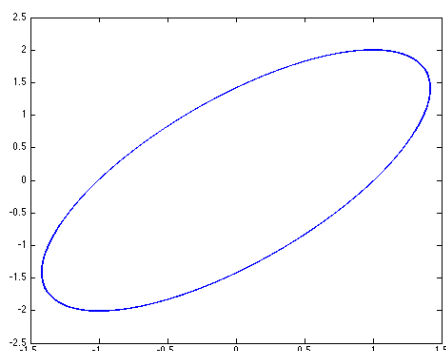
I dette tilfellet har vi  $\mathcal{D} = (-1 - 1)^2 + 4 \cdot 1 \cdot (-2) = -4$  og

$$\lambda = \frac{-1 + 1 \pm \sqrt{-4}}{2} = \pm i$$

Det vil gi oss en løsning på formen

$$\begin{aligned}x(t) &= C_1 \cos t + C_2 \sin t \\y(t) &= D_1 \cos t + D_2 \sin t\end{aligned}$$

som beskriver en konstant, elliptisk bane i  $(x, y)$ -planet.



**Figur 12.3.** En periodisk løsning.

Det er viktig å merke seg at løsningen i forrige eksempel ikke er en likevekt. Alle likevektstilstander er stabile i den forstand at alle de deriverte med hensyn på  $t$  er 0. Men det motsatte er ikke tilfelle. Vi kan ha stabile løsninger som ikke er likevektstilstander, slik som i eksemplet over.

## 12.2 Eulers metode i flere variabler\*

I forrige kapittel så vi hvordan vi kunne bruke Eulers metode til å illustrere løsninger av differensiallikninger uten at vi kjenner noen eksplisitt form på løsningene. Vi kan bruke samme framgangsmåte for å illustrere løsningene til mer omfattende differensiallikningssystemer. La

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_m, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_m, t) \\ &\dots \\ \frac{dx_m}{dt} &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_m, t) \end{aligned}$$

være et system av differensiallikninger med initialbetingelse  $x_i(0) = b_i$  for  $i = 1, 2, \dots, m$ . Vi betrakter et intervall  $[0, a]$  av  $t$ -verdier som vi deler opp i  $n$  like store deler. Vi setter  $t_j = \frac{ja}{n}$  for  $j = 0, 1, 2, \dots, n$  og definerer

$$x_{i,0} = x_i(0) = b_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$$

og rekursivt

$$\begin{aligned} x_{i,j+1} &= x_{i,j} + x'_i(t_j) \cdot \frac{a}{n} \\ &= x_{i,j} + f_i(x_{i,j}, t_j) \cdot \frac{a}{n} \end{aligned}$$

Dette gir oss stykkvis lineære funksjoner definert av knekkpunktene  $(t_j, x_{i,j})$ . Når vi øker antall delintervaller  $n$  vil disse stykkvis lineære funksjonene gi oss stadig bedre tilnærminger til funksjonene  $x_i$ . Vi skal se på noen eksempler som illustrerer at metoden gir gode resultater.

Vi betrakter systemet

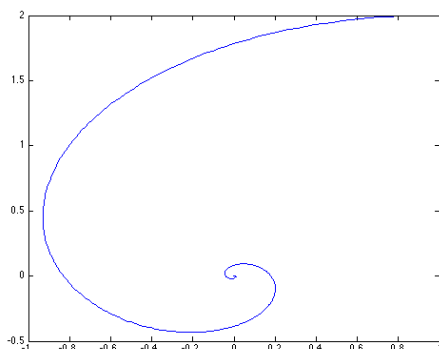
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x - 2y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - y \end{aligned}$$

der  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 2$  som vi så på i eksempel 12.1.2. Vi skal betrakte intervallet  $[0, 10]$  som vi deler i  $n$  like store deler. I dette tilfelle får vi rekursjonen

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= x_j + (-x_j - 2y_j) \cdot \frac{10}{n} \\ y_{j+1} &= y_j + (2x_j - y_j) \cdot \frac{10}{n} \end{aligned}$$

Denne algoritmen kan vi enkelt implementere i f.eks. MATLAB på følgende måte:

```
t0=0; tf=10;      (definerer intervallet)
x0=1;             (setter startverdien til x)
y0=2;             (setter startverdien til y)
n=1000;           (antall delintervaller)
h=(tf-t0)/n;      (bredden av hvert delintervall)
t=t0; T=t;        (initierer t-kolonnen)
x=x0; X=x;        (initierer x-kolonnen)
y=y0; Y=y;        (initierer y-kolonnen)
for i=1:n          (algoritmen begynner)
    z=x;
    x=x+h*(-x-2*y);
    y=y+h*(2*z-y);
    t=t+h;
    T=[T;t];
    X=[X;x];
    Y=[Y;y];
end                (algoritmen slutter)
plot(X,Y)          (utskrift)
```

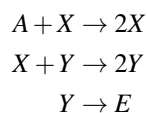


**Figur 12.4.** Utskriften gir oss en illustrasjon av løsningen i eksempelet over.

### 12.3 Dynamiske systemer

Vi bruker fellesbetegnelsen dynamisk system om en eller flere matematiske (eller fysiske) størrelser hvor vi på en eller annen måte koder inn en tidsutvikling for størrelsene.

Et berømt dynamisk system er den såkalte Lotka-Volterra-likningen. Et fysisk system som beskrives ved denne modellen kan være følgende: Vi betrakter et koblet system av to autokatalytiske reaksjoner der konsentrasjonen av en av reaktantene  $A$  er mye høyere en likevektsverdien. Dermed kan vi neglisjere den reverserte reaksjonen og bare konsentrere oss om en retning. Det idealiserte systemet ser ut som

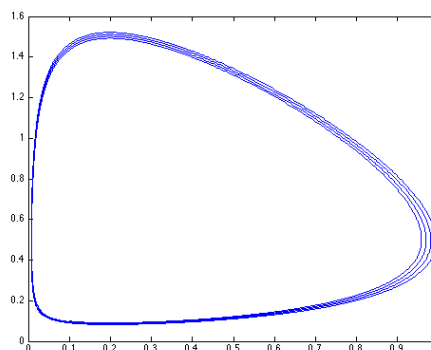


og den matematiske modellen er gitt ved

$$\begin{aligned} \frac{d[A]}{dt} &= -k_1[A][X] \\ \frac{d[X]}{dt} &= k_1[A][X] - k_2[X][Y] \\ \frac{d[Y]}{dt} &= k_2[X][Y] - k_3[Y] \end{aligned}$$

der  $[A]$  betyr konsentrasjonen av stoffet  $A$ . Produktene som inngår i likningene svarer naturlig til at den aktuelle størrelsen endrer seg når to molekyler møtes. Den hyppigheten er proporsjonal med hver av de størrelsene som inngår.

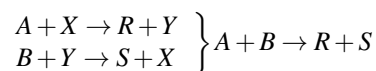
Siden konsentrasjonen av  $A$  er antatt å være stor, ser vi bort fra problemet med at vi bruker opp  $A$ . Vi kan se på et tall-eksempel: Vi lar  $0 \leq t \leq 100$ ,  $[X]_0 = [Y]_0 = 0.1$  og  $[A]_0 = 500$ . Videre setter vi  $k_1 = 0.001$ ,  $k_2 = 1$  og  $k_3 = 0.2$ . Bruker vi Eulers metode med  $n = 10000$  får vi dette bildet av et  $X, Y$ -plot:



**Figur 12.5.** Illustrasjon av Lotka-Volterra-modellen.

Figuren illustrerer en oscillerende løsning. Den er ikke en stabil løsning siden "rundene" i figur 12.5 stadig blir mindre etter hvert som reservoaret  $A$  blir mer og mer oppbrukt. Til slutt vil løsningen stabilisere seg i et likevektspunkt som blir en slags grense for den ovale spiralen vi ser på illustrasjonen.

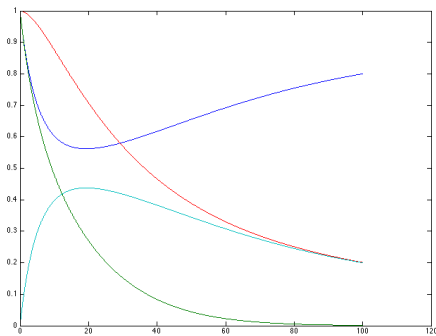
Et annet eksempel er en reaksjon med katalysatorer. Vi studerer reaksjonssystemet



med tilhørende modell

$$\begin{aligned} \frac{d[A]}{dt} &= -k_1[A][X] \\ \frac{d[B]}{dt} &= -k_2[B][Y] \\ \frac{d[X]}{dt} &= -k_1[A][X] + k_2[B][Y] \\ \frac{d[Y]}{dt} &= k_1[A][X] - k_2[B][Y] \end{aligned}$$

I et talleksempel setter vi  $k_1 = 0.1$  og  $k_2 = 0.05$ . Videre lar vi  $[A]_0 = 1$ ,  $[B]_0 = 1$ ,  $[X]_0 = 1$  og  $[Y]_0 = 0$ . Det gir følgende forløp (der  $[X]$  er blå,  $[Y]$  er lysegrønn,  $[A]$  er grønn og  $[B]$  er rød)

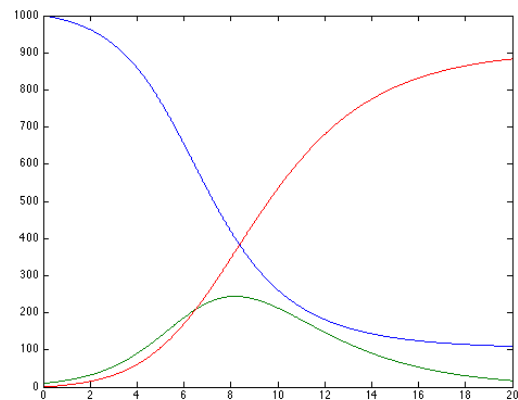


**Figur 12.6.** Illustrasjon av den beskrevne reaksjonslikningen.

Vi skal se på et eksempel på en annen type matematisk modell, for utviklingen i antall smittede av en epidemisk sykdom, kalt SIR-modellen. Vi deler befolkningen i tre,  $S = S(t)$  er de **smitteutsatte**,  $I = I(t)$  er de **smittede**, og  $R = R(t)$  er de **fjernede**, dvs. de som enten er døde eller er blitt friske og derfor hverken kan smitte noen eller bli smittet. Vi har følgende modell:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -aSI \\ \frac{dI}{dt} &= aSI - bI \\ \frac{dR}{dt} &= bI\end{aligned}$$

Vi tenker oss at vi har en smitteutsatt befolkning på  $S_0 = 1000$ , at antall smittede er  $I_0 = 10$ , og at antall fjernede ved starten er  $R_0 = 0$ . Vi velger å sette  $a = 0,001$  og  $b = 0,4$ . Det gir oss følgende forløp av antall smittede når vi bruker Eulers metode på intervallet  $0 \leq t \leq 20$  med  $n = 1000$ :



**Figur 12.7.** Illustrasjon av smitte modellen. Antall smitteutsatte er illustrert med den blå grafen, antall smittede ved den grønne grafen og antall fjernede ved den røde grafen.,

## 12.4 Likevektstilstander

En **likevektstilstand** for et dynamisk system er en tilstand hvor systemet ikke endrer seg over tid. Den matematiske tolkningen av en slik tilstand beskrives av at alle tids-deriverte er 0. Vi kan derfor finne likevektstilstander ved å erstatte alle deriverte med 0, og så løse likningssystemet vi sitter igjen med.

**Eksempel 12.4.1.** For et differensiallikningssystem m

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 3x + 5y + 1 \\ \frac{dy}{dt} &= x + 2y + 1\end{aligned}$$

finner vi likevektstilstanden ved å løse likningssystemet

$$\begin{aligned}3x + 5y + 1 &= 0 \\ x + 2y + 1 &= 0\end{aligned}$$

Multipliserer vi den andre likningen med  $-3$  og legger sammen får vi  $-y - 2 = 0$ , dvs.  $y = -2$ . Innsetting i en av likningene gir  $x = 3$ , så likevektstilstanden for dette systemet er gitt ved  $(x, y) = (3, -2)$ .

Gitt et dynamisk system

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy\end{aligned}$$

med likevektspunkt  $(0,0)$ . Diskriminanten til systemet er gitt ved

$$\mathcal{D} = (a-d)^2 + 4bc$$

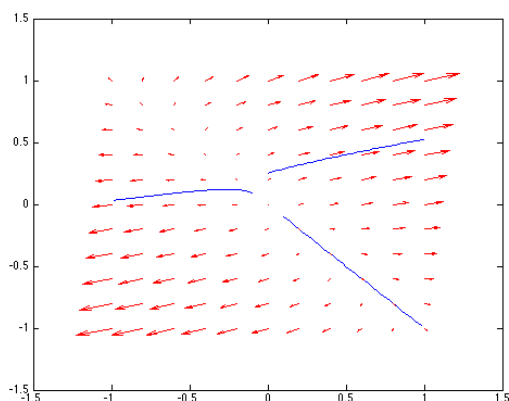
Anta  $\mathcal{D} > 0$ . Da har vi løsninger av systemet gitt ved

$$\begin{aligned}x(t) &= Ce^{\lambda_1 t} + De^{\lambda_2 t} \\ y(t) &= \frac{(\lambda_1 - a)}{b} Ce^{\lambda_1 t} + \frac{(\lambda_2 - a)}{b} De^{\lambda_2 t}\end{aligned}$$

hvor  $C$  og  $D$  er vilkårlige konstanter. Størrelsene  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  er gitt ved

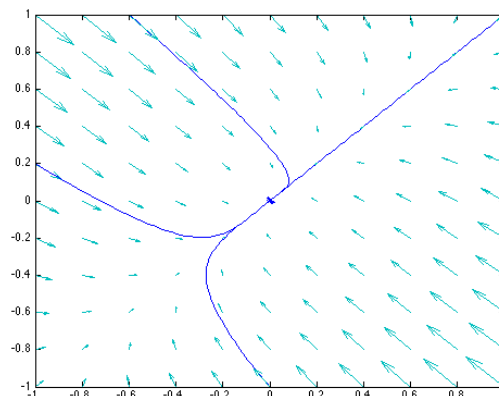
$$\lambda_1 = \frac{a+d+\sqrt{\mathcal{D}}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a+d-\sqrt{\mathcal{D}}}{2}$$

Dersom  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  vil likevektspunktet være ustabil (en **frastøter**) siden integralkurvene vil bevege seg vekk fra likevektspunktet. Dersom startpunktet er gitt ved  $(C, \frac{(\lambda_1 - a)}{b} C) = \frac{C}{b}(b, -a + \lambda_1)$  vil  $D = 0$  og integralkurvene vil ha stigningstall  $\frac{(\lambda_1 - a)}{b}$ . Tilsvarende får vi for  $(D, \frac{(\lambda_2 - a)}{b} D)$ . Setter vi  $a = 6, b = 5, c = 1$  og  $d = 2$  får vi  $\mathcal{D} = 36$  og  $\lambda = 4 \pm 3$ , og  $(b, -a + \lambda_1) = (5, -4)$ , mens  $(b, -a + \lambda_2) = (2, 2)$ .



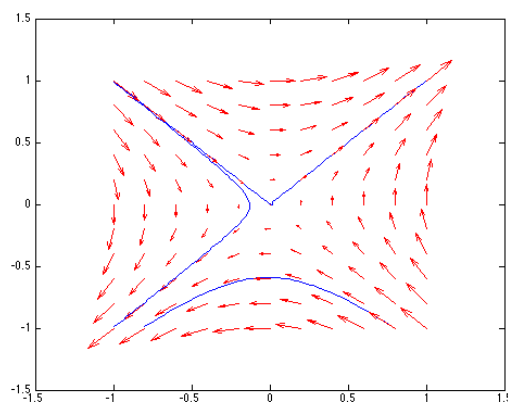
**Figur 12.8.** Retningsdiagram og noen integralkurver i tilfellet over, hvor likevektspunktet er en frastøter.

Dersom  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  vil likevektspunktet være stabilt (en **attraktor** eller **tiltrekker**) siden integralkurvene nå vil bevege seg inn mot likevektspunktet. Et eksempel kan være  $a = -3, b = 2, c = 2$  og  $d = -3$ . Det gir  $\mathcal{D} = 16$  og  $\lambda = -3 \pm 2$ . Det er to rette linjer inn mot likevektspunktet, gitt ved  $(C, C)$  og  $(D, -D)$ .



**Figur 12.9.** Retningsdiagram og noen integralkurver for et tiltrekker-likevektspunkt.

Til slutt har vi tilfellet der  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ . Her setter vi  $a = 0, b = 2, c = 2$  og  $d = 0$ , med  $\mathcal{D} = 16$  og  $\lambda = \pm 2$ . Det betyr at vi har en integralkurve som er en rett linje gitt ved  $(D, \frac{(\lambda_2 - a)}{b} D) = D(1, -1)$ . I alle andre punkter vil integralkurvene forsvinne ut fra likevektspunktet. Et slikt likevektspunkt kalles en **bifurkasjon**. Vi bruker bifurkasjon om alle likevektspunkter der små endringer i initialverdiene fører til vesentlige endringer for de aktuelle integralkurvene.



**Figur 12.10.** Et eksempel på en bifurkasjon, der en bestemt rett linje fører oss inn i likevektspunktet, alle andre sklir utenom.

Vi kan videre se på tilfellet der  $\mathcal{D} < 0$ . Tidligere har vi sett at løsningene er på formen

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{\alpha t} (C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)) \\y(t) &= e^{\alpha t} (D_1 \cos(\beta t) + D_2 \sin(\beta t))\end{aligned}$$

for to reelle tall  $\alpha = \frac{a+d}{2}$  og  $\beta = \frac{\sqrt{-\mathcal{D}}}{2}$ . Det betyr at vi har en tiltrekker for  $\alpha < 0$  og integralkurvene vil være innover-krummende spiraler. Det motsatte har vi for  $\alpha > 0$ . Da har vi en frastøter hvor alle integralkurver er utover-krummende spiraler som ender i det uendelig fjerne.

Vi kan oppsummere det vi har sagt i et samlet teorem:

**Teorem 12.4.1.** Gitt et dynamisk system

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy\end{aligned}$$

med likevektspunkt  $(0,0)$  og diskriminant

$$\mathcal{D} = (a-d)^2 + 4bc$$

La

$$\lambda_1 = \frac{a+d+\sqrt{\mathcal{D}}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a+d-\sqrt{\mathcal{D}}}{2}$$

og

$$\alpha = \frac{a+d}{2}$$

Da har vi følgende klassifikasjon av likevektspunktet

- 1a) For  $\mathcal{D} > 0$  og  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  har vi et frastøtende likevektspunkt.
- 1b) For  $\mathcal{D} > 0$  og  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  har vi et tiltrekkende likevektspunkt.
- 1c) For  $\mathcal{D} > 0$  og  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$  har vi en bifurkasjon med en tiltrekkende linje og hvor initialpunkter utenfor linja gir frastøting.
- 2a) For  $\mathcal{D} < 0$  og  $\alpha < 0$  har vi et tiltrekkende likevektspunkt.

2b) For  $\mathcal{D} < 0$  og  $\alpha > 0$  har vi et frastøtende likevektspunkt.

2c) For  $\mathcal{D} < 0$  og  $\alpha = 0$  har vi en bifurkasjon hvor initialpunkter utenfor likevektspunktet gir oss stabile periodiske løsninger.

I et tidligere kapittel regnet vi ut integralkurver for et vektorfelt ved å studere et perpendikulært felt. Vi kan plukke opp den tråden.

Vi betrakter et dynamisk system gitt ved

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy\end{aligned}$$

der  $a, b, c$  og  $d$  er reelle konstanter. Det tilhørende vektorfeltet er gitt ved  $\mathbf{F}(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ . Det betyr at normalfeltet  $\mathbf{F}^\perp(x, y) = (-cx - dy, ax + by)$ . Vi regner ut sirkulasjonen i dette feltet,

$$\text{curl}(\mathbf{F}^\perp) = \frac{\partial}{\partial x}(ax + by) - \frac{\partial}{\partial y}(-cx - dy) = a + d$$

For å finne en potensialfunksjon for  $\mathbf{F}^\perp$  er vi avhengig av at feltet er sirkulasjonsfritt, så i det videre antar vi at  $a + d = 0$  eller  $d = -a$ . Vi regner ut

$$f(x, y) = \int (-cx + ay) dx = -\frac{c}{2}x^2 + axy + g(y)$$

som er en kandidat som potensialfunksjon. Partiellderiverer vi denne med hensyn på  $y$  får vi

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{c}{2}x^2 + axy + g(y) \right) = ax + g'(y)$$

som vi sammenlikner med  $ax + by$ . Det betyr at vi må ha  $g'(y) = by$ , eller  $g(y) = \frac{1}{2}by^2 + K$  for en konstant  $K$ . Dermed får vi en potensialfunksjon

$$f(x, y) = -\frac{c}{2}x^2 + axy + \frac{b}{2}y^2 + K$$

med nivåkurver

$$\frac{c}{2}x^2 - axy - \frac{b}{2}y^2 = K$$

Vi har tidligere sett at løsningene til systemet er gitt ved

$$\begin{aligned}x(t) &= Ce^{\lambda_1 t} + De^{\lambda_2 t} \\ y(t) &= \frac{(\lambda_1 - a)}{b} Ce^{\lambda_1 t} + \frac{(\lambda_2 - a)}{b} De^{\lambda_2 t}\end{aligned}$$

Vi bruker at  $a + d = 0$  og får

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{\mathcal{D}}}{2} = -\lambda_2$$

hvor diskriminanten

$$\mathcal{D} = (a - d)^2 + 4bc = (a + a)^2 + 4bc = 4(a^2 + bc)$$

Det gir

$$\lambda_1 = \sqrt{a^2 + bc} = -\lambda_2$$

For å forenkle notasjonen setter vi  $\lambda_1 = \lambda$ ,  $\lambda_2 = -\lambda$ .  
Setter vi dette inn i likningen for nivåkurven får vi

$$\begin{aligned} & \frac{c}{2}x^2 - axy - \frac{b}{2}y^2 \\ &= \frac{c}{2}(Ce^{\lambda t} + De^{-\lambda t})^2 \\ & - a(Ce^{\lambda t} + De^{-\lambda t})\left(-\frac{(a-\lambda)}{b}Ce^{\lambda t} - \frac{(a+\lambda)}{b}De^{-\lambda t}\right) \\ & - \frac{b}{2}\left(-\frac{(a-\lambda)}{b}Ce^{\lambda t} - \frac{(a+\lambda)}{b}De^{-\lambda t}\right)^2 \\ &= C^2e^{2\lambda t}\left(\frac{c}{2} + \frac{a(a-\lambda)}{b} - \frac{b}{2}\left(\frac{(a-\lambda)}{b}\right)^2\right) \\ & + CD\left(c + \frac{a(a+\lambda)}{b} + \frac{a(a-\lambda)}{b} - b\frac{(a-\lambda)(a+\lambda)}{b^2}\right) \\ & + D^2e^{-2\lambda t}\left(\frac{c}{2} + \frac{a(a+\lambda)}{b} - \frac{b}{2}\left(\frac{(a+\lambda)}{b}\right)^2\right) \end{aligned}$$

Nå har vi

$$\begin{aligned} & \frac{c}{2} + \frac{a(a \pm \lambda)}{b} - \frac{b}{2}\left(\frac{(a \pm \lambda)}{b}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2b}(bc + 2a^2 \mp 2a\lambda - a^2 \pm 2a\lambda - \lambda^2) = 0 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} & c + \frac{a(a+\lambda)}{b} + \frac{a(a-\lambda)}{b} - b\frac{(a-\lambda)(a+\lambda)}{b^2} \\ &= \frac{1}{b}(bc + a^2 + a\lambda + a^2 - a\lambda - a^2 + \lambda^2) = \frac{2\mathcal{D}}{b} \end{aligned}$$

som betyr at den generelle løsningen til systemet passer inn i likningen

$$\frac{c}{2}x^2 - axy - \frac{b}{2}y^2 = \frac{2\mathcal{D}}{b}CD$$

Vi har med andre ord bygget en bro mellom to vidt forskjellige løsninger av ett og samme problem.

Likningen

$$\frac{c}{2}x^2 - axy - \frac{b}{2}y^2 = K$$

beskriver det som kalles et **kjeglensnitt**, og man kan vise at for  $a^2 + bc > 0$  såløsningene danne en **hyperbel**, mens vi for  $a^2 + bc < 0$  vil få en **ellipse**. Dette stemmer også veldig bra med formen på integralkurvene til det opprinnelige dynamiske systemet.



## Oppgaver

**Oppgave 1.** Et dynamisk system er gitt ved

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - 2y + 1 \\ \frac{dy}{dt} &= x - 3y + 2\end{aligned}$$

Finn likevektspunktet for systemet.

**Oppgave 2.** Et dynamisk system er gitt ved

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 3x - y - 3 \\ \frac{dy}{dt} &= x - 3y + 7\end{aligned}$$

Finn likevektspunktet for systemet.

**Oppgave 3.** Det dynamiske systemet

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x^2 - y \\ \frac{dy}{dt} &= xy - x\end{aligned}$$

har tre likevektspunkter. Bestem disse.

**Oppgave 4.** Gitt et dynamisk system

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - 2y \\ \frac{dy}{dt} &= x - 3y\end{aligned}$$

Bestem likvektspunktets type.

**Oppgave 5.** Gitt et dynamisk system

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x + y \\ \frac{dy}{dt} &= x - 4y\end{aligned}$$

Bestem likvektspunktets type.

**Oppgave 6.** Gitt et dynamisk system

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x + y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - y\end{aligned}$$

Bestem likvektspunktets type.

**Oppgave 7.** Gitt et dynamisk system

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x + y \\ \frac{dy}{dt} &= 3x - 2y\end{aligned}$$

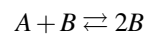
Bestem likvektspunktets type.

**Oppgave 8.** Finn løsningen av systemet

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x - y \\ \frac{dy}{dt} &= 3x - 2y\end{aligned}$$

med initialverdier  $x(0) = y(0) = 1$ .

**Oppgave 9.** Still opp en modell for den autokatalytiske reaksjonslikningen



# Kapittel 13

## Fasit til oppgavene

### Kapittel 1

**Oppgave 1.** a)  $2x + 1$

b)  $12x^3 - 12x^2$

c)  $1 + \cos x$

d)  $2e^{2x}$

e)  $e^x \cos x - e^x \sin x$

f)  $\frac{1}{(1+x)^2}$

g)  $\ln x + 1$

h)  $\frac{1}{\cos^2 x}$

**Oppgave 2.** *Vokser overalt*

**Oppgave 3.** -

**Oppgave 4.** -

**Oppgave 5.**  $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ , Max for  $k$  jevn, min for  $k$  odde

**Oppgave 6.**  $x^2 - 3x + 2$  har kritisk punkt i  $x = \frac{3}{2}$ , avtar i  $(-\infty, \frac{3}{2}]$ , vokser i  $[\frac{3}{2}, \infty)$   
 $(x-1)^2(x+2)$  har kritiske punkter i  $x = \pm 1$ , avtar i  $[-1, 1]$ , vokser i  $(-\infty, -1]$  og i  $[1, \infty)$   
 $x + \frac{1}{x^2}$  har kritisk punkt i  $x = \sqrt[3]{2}$ , avtar i  $(0, \sqrt[3]{2}]$ , vokser i  $(-\infty, 0)$  og i  $[\sqrt[3]{2}, \infty)$

**Oppgave 7.** a) i)  $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$ , ii) Avtagende på  $[-1, \frac{2}{\sqrt{3}}]$ , voksende på  $[\frac{2}{\sqrt{3}}, 2]$ , iii) Lokalt minimum i  $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ , lokale maksimum i  $x = -1$  og i  $x = 2$ , iv) Krummer ned på  $[-1, 0]$  og krummer opp på  $[0, 2]$ , v) vendepunkt for  $x = 0$  vi) globalt maksimum i  $x = -1$  og globalt minimum i  $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

b) i)  $x = 0$ ,  $x = 2$ , ii) Avtagende på  $[0, 2]$ , iii) Lokalt minimum i  $x = 2$ , lokalt maksimum i  $x = 0$ , iv) Krummer ned på hele  $[0, 2]$ , v) Ingen vendepunkter vi) Globalt minimum i  $x = 2$ , globalt maksimum i  $x = 0$ .

c) i)  $x = 0$ ,  $x = 2\pi$ , ii) Voksende i hele definisjonsområdet, iii) Lokalt minimum i  $x = 0$ , lokalt maksimum i  $x = 2\pi$ , iv) Krummer opp på  $[0, \pi]$  og ned på  $[\pi, 2\pi]$ , v)  $x = \pi$  vi) globalt maksimum i  $x = 2\pi$  og globalt minimum i  $x = 0$ .

d) i)  $x = 0$ ,  $x = \pm \frac{\pi}{2}$  og  $x = \pm \pi$ , ii) Avtagende på  $[-\frac{\pi}{2}, 0]$  og  $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ , voksende på  $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$  og  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , iii) Lokalt minimum i  $x = 0$  og i  $x = \pm \pi$ , lokale maksimum i  $x = \pm \frac{\pi}{2}$ , iv) Krummer ned på  $[-\frac{3}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi]$  og på  $[\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi]$ , og krummer opp på  $[-\pi, -\frac{3}{4}\pi]$ ,  $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$  og  $[\frac{3}{4}\pi, \pi]$ , v) vendepunkter for  $x = -\frac{3}{4}\pi$ ,  $x = -\frac{1}{4}\pi$ ,  $x = \frac{1}{4}\pi$  og  $x = \frac{3}{4}\pi$  vi) Globalt minimum i  $x = 0$  og i  $x = \pm \pi$ , globalt maks i  $x = \pm \frac{\pi}{2}$ .

**Oppgave 8.** a) Vokser på  $(-\infty, a]$ , avtar på  $[a, \infty)$ , globalt maks for  $x = a$ .

b) Krummer opp på  $(-\infty, a-1]$  og på  $[a+1, \infty)$ , krummer ned på  $[a-1, a+1]$ , vendepunkt i  $x = a \pm 1$

**Oppgave 9.** Vokser på  $[1, 3]$ , avtar på  $[\frac{1}{4}, 1]$ , minste verdi for  $x = 1$ , størst verdi for  $x = 3$ .

**Oppgave 10.** Kvadrat med side 25

**Oppgave 11.** Dimensjon  $15m \times 30m$ , med areal  $450m^2$ .

**Oppgave 12.**  $11664cm^3$

**Oppgave 13.** 6 kroner

**Oppgave 14.** -

**Oppgave 15.** a) Kritiske punkter:  $\pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm 2\sqrt{2}$

b) Vokser:  $[-2\sqrt{\frac{2}{3}}, 2\sqrt{\frac{2}{3}}]$ , avtar:  $[-2\sqrt{2}, 2\sqrt{\frac{2}{3}}]$  og  $[2\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{2}]$ , lokale maksimum:  $-2\sqrt{2}$  og  $2\sqrt{\frac{2}{3}}$ , lokale minimum:  $-2\sqrt{\frac{2}{3}}$  og  $2\sqrt{2}$

**Oppgave 16.** -

## Kapittel 2

**Oppgave 1.** a)  $\frac{1}{2}x^2 - \cos x + C$

b)  $\frac{1}{2}e^{2x} + C$

c)  $2\ln|x| + C$

d)  $-\frac{1}{x} + C$

e)  $\frac{1}{\omega} \sin \omega x + C$

f)  $-\frac{1}{2} \cos x^2 + C$

**Oppgave 2.** a)  $\frac{1}{4}x^4 + C$

b)  $x^3 + x^5 + C$

c)  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + C$

d)  $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$

e)  $\sin \omega x + C$

f)  $x \ln x + C$

**Oppgave 3.**  $\frac{1}{n+1}$

**Oppgave 4.** a) 9 b) 18 c) 16 d) 0

**Oppgave 5.** a)  $\frac{9}{2}$  b)  $\frac{1}{3}$  c)  $\frac{3}{4}$  d)  $2 + \frac{1}{2}\pi^2$

**Oppgave 6.** a)  $\frac{3}{2}$  b)  $2\ln 2 + \frac{14}{3}$  c)  $\frac{\sin(2\pi\omega)}{\omega^2 - 1}$  d)  $\frac{1}{6}(e^3 - 1)$  e)  $\frac{1}{4}(e^2 + 1)$

**Oppgave 7.** a)  $\frac{5}{2}$  b) 1 c) 1

**Oppgave 8.** a)  $\frac{14}{3}$  b)  $\frac{3}{2} + \ln 2$  c)  $\frac{2}{3}$

**Oppgave 9.** a) 8 b)  $\frac{16}{15}$  c)  $\frac{1}{2}$  d)  $\sqrt{2} - 1$  e)  $\frac{9}{2}$

**Oppgave 10.** a)  $\frac{64}{3}$  b)  $270 - \frac{112}{3}$  c)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(\ln 2)^2$

**Oppgave 11.**  $\frac{27}{2}$

**Oppgave 12.** a) 1.98 b) 1.88 c) 1.52 d) 1.76

**Oppgave 13.**  $n = 2$ :  $0.69444 \pm 0.00833$ ,  $n = 4$ :  $0.69325 \pm 0.00052$ ,  $n = 8$ :  $0.69315 \pm 0.00003$ ,  $\ln 2 \approx 0.693147$

**Oppgave 14.** a) 1.9 b) 2.2

**Oppgave 15.** a) -38, -37.3 b) -37.9

**Oppgave 16.**  $n = 2$ : 0.5,  $n = 8$ : 0.5

**Oppgave 17.** a) 1 b) 2 c) 1 d)  $\frac{1}{64}$

**Oppgave 18.** a) 10 b)  $\frac{3}{2}$  c)  $\frac{1}{3}$  d)  $\frac{1}{2}$

**Oppgave 19.** a) Eksisterer b) Eksisterer ikke

**Oppgave 20.** a) 2 b) 4

## Kapittel 3

**Oppgave 1.** a) Konvergerer b) Konvergerer c) Divergerer

**Oppgave 2.**

**Oppgave 3.** a)  $1 + 3 + 9 + 27 = 40$  b)  $2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} = \frac{73}{12}$

**Oppgave 4.** a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n+2}$  b)  $\sum_{n=-1}^{\infty} (-\frac{1}{3})^n$  c)  $\sum_{n=0}^{\infty} 2(\frac{3}{4})^n$

**Oppgave 5.** a)  $\frac{5}{4}$  b)  $\frac{3}{4}$

**Oppgave 6.**  $\frac{27}{8}$

**Oppgave 7.** Rekka divergerer og da kan vi ikke regne på denne måten.

**Oppgave 8.** a) Divergerer b) Divergerer c) Konvergerer d) Divergerer

**Oppgave 9.** a) Konvergerer b) Konvergerer c) Divergerer d) Konvergerer

**Oppgave 10.** b) 1

**Oppgave 11.** Konvergerer

## Kapittel 4

**Oppgave 1.**  $1 - x + x^2 - x^3$

**Oppgave 2.**  $1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{5}{16}(x-1)^3$

**Oppgave 3.**  $x^2 - \frac{1}{3}x^4$

**Oppgave 4.** a)  $x^3 + 2x + 1$     b)  $4 + 5(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$

**Oppgave 5.** a)  $x - \frac{1}{2}x^2$ ,  $|E_2(x)| = \frac{1}{3}\left(\frac{x}{c+1}\right)^3$ ,  
 $|E_2(x)| \leq \frac{1}{3}x^3$

b)  $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ ,  $|E_3(x)| = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{c+1}\right)^4$ ,  $|E_3(x)| \leq \frac{1}{4}x^4$

**Oppgave 6.** a)  $1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4$

b)  $1 - x^2 + x^4$

**Oppgave 7.**  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$ ,  $E_n = \frac{x^{n+1}}{(1-c)^{n+2}}$ ,  
 $-1 < x < \frac{1}{2}$  (men rekken konvergerer for  $|x| < 1$ )

**Oppgave 8.** -

**Oppgave 9.** -

**Oppgave 10.** -

**Oppgave 11.** *FASIT MANGLER*

## Kapittel 5

**Oppgave 1.**  $(\sqrt{12}, \frac{7\pi}{4})$ ,  $(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4})$ ,  $(2, \frac{11\pi}{6})$

**Oppgave 2.**  $(-4\sqrt{3}, -4)$ ,  $(-\frac{3}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$ ,  $(0, -5)$

**Oppgave 3.** -

**Oppgave 4.**  $x^2 + y^2 = 25$ ,  $y = \sqrt{3}x$ ,  $x^2 - 2x + y^2 = 0$ ,  $y = 3$

**Oppgave 5.** -

**Oppgave 6.** -

**Oppgave 7.**  $x^2 + y^2 - 8x = 0$

**Oppgave 8.**  $\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{3}$

**Oppgave 9.**  $\frac{1}{2}a$

## Kapittel 6

**Oppgave 1.** a)  $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$   $2e^{i\frac{\pi}{3}}$   $e^{-i\pi}$   
b)  $-2$   $i$   $3$

**Oppgave 2.** a)  $5 + 6i$  b)  $18 - i$  c)  $1 + 2i$   
d)  $5 + 12i$

**Oppgave 3.** a)  $i$  b)  $1 - 2i$  c)  $\frac{7}{2} - \frac{9}{2}i$   
d)  $-\frac{i}{5}$  e)  $\frac{43}{29} - \frac{6}{29}i$  f)  $\frac{48}{25} + \frac{64}{25}i$

**Oppgave 4.** a)  $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$  b)  $2e^{i\frac{\pi}{3}}$  c)  $3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$   
d)  $\sqrt{13}e^{i\theta}$ ,  $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$ ,  $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{13}}$

**Oppgave 5.** a)  $2 + 2\sqrt{3}i$  b)  $5i$  c)  $-3 - 3i$  d)  $-4$

**Oppgave 6.** a)  $3^8 \cdot 2^4$  b)  $-1$

**Oppgave 7.** a)  $\pm 3i$  b)  $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$  c)  $\frac{2}{3} \pm i\frac{\sqrt{2}}{3}$   
d)  $\frac{1}{4} \pm i\frac{3\sqrt{3}}{4}$

**Oppgave 8.** a)  $\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$  b)  $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$  c)  $\frac{11}{41} + \frac{17}{41}i$

**Oppgave 9.** a)  $x = 4$ ,  $y = -6$  b)  $x = \frac{4}{3}$ ,  $y = \frac{5}{3}$

**Oppgave 10.** -

**Oppgave 11.** a) - b)  $w^2 - 1$

**Oppgave 12.** -

**Oppgave 13.** -

**Oppgave 14.** a) Sirkel med radius 1 b) Imaginære  
aksen c) Rett linje gjennom  $\frac{2}{3}$  og  $2i$

**Oppgave 15.** a)  $3 + iy$  b)  $(2 \pm \sqrt{10})i$  c)  $-7 + 5i$

## Kapittel 7

**Oppgave 1.** -

**Oppgave 2.** -

**Oppgave 3.** -

**Oppgave 4.** -

**Oppgave 5.** a)  $2x, 3y^2$  b)  $1 + \cos x, 0$  c)  
 $2xy^2 + y, 2x^2y + x$

**Oppgave 6.** a)  $\sin y + y \cos x, x \cos y + \sin x$  b)  
 $ye^{xy}, xe^{xy}$  c)  $\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}$

**Oppgave 7.** a)  $y + z, x + z, y + x$  b)  $x_2x_3 -$   
 $x_1x_3, x_1x_3, x_1x_2 - \frac{1}{2}x_1^2$  c)  $2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n$

**Oppgave 8.** a)  $2 \cdot 6y - 0^2 = 12y$     b)  $0 \cdot 0 - 1^2 = -1$

c)  $0 \cdot (-x \sin y) - (\cos y)^2 = -\cos^2 y$

**Oppgave 9.** a)  $0$     b)  $2xy \sin(xy) \cos xy - \cos^2(xy)$

**Oppgave 10.** a)  $(0,0)$     b)  $(-1,-1)$     c)  $(0,y)$

**Oppgave 11.** a)  $(0,0)$     b)  $(0,0)$  og hyperbelen  $xy - 1 = 0$     c)  $(-1,1)$

**Oppgave 12.** a)  $(0,0)$  og  $(1,1)$     b)  $(0,0)$  og  $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$   
c)  $(0,0)$  og sirkelen  $x^2 + y^2 = 1$

**Oppgave 13.** -

**Oppgave 14.** -

**Oppgave 15.** a)  $7500$     b)  $3056$     c)  $3750$

**Oppgave 16.**  $16$  (sirkel:  $4\pi$ )

**Oppgave 17.**  $-\frac{mRT}{v^2}, \frac{mR}{V}$

**Oppgave 18.**  $N(t) = 2.323e^{0.0671t}$ , Tidlig 2014

**Oppgave 19.**  $y = 0.51x - 0.08$      $5.0$

**Oppgave 20.** a) Max:  $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ , Min:  $(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$     b) Max:  $(1,3)$  og  $(-1,-3)$ , Min:  $(-1,3)$  og  $(1,-3)$

**Oppgave 21.**  $(2,3,2)$

**Oppgave 22.**  $(100,50)$

**Oppgave 23.** Max:  $\frac{729}{4}$ , Min:  $9$

**Oppgave 24.** Max:  $81$ , Min:  $1$

**Oppgave 25.** Max:  $61$ , Min:  $-60$

**Oppgave 26.** Minste avstand:  $1$  i punktene  $(0,0, \pm 1)$

**Oppgave 27.** Min:  $\ln 2 + \frac{1}{2}$ , Max:  $\ln 2 + 1$

## Kapittel 8

**Oppgave 1.** a)  $(2,4)$     b)  $(3,2,1)$     c)  $(0,1,0,1)$

**Oppgave 2.** a)  $3$     b)  $-1$     c)  $-2$

**Oppgave 3.** a)  $(2a,0)$     b)  $(2t,t,t)$     c)  $xyz(1,1,1)$

**Oppgave 4.** a)  $x+y$     b)  $2s-t+u$     c)  $-4t$

**Oppgave 5.** a)  $(2x + y^3 \cos(xy), 2y \sin(xy) + xy^2 \cos(xy))$

b)  $(e^x \cos y, -e^x \sin y)$

c)  $(2xy^3, 3x^2y^2)$

**Oppgave 6.** a)  $(2x + y^3 \cos(xy) + yz, 2y \sin(xy) + xy^2 \cos(xy) + xz, xy)$

b)  $(ze^{xz}(\cos y + \sin w), -e^{xz} \sin y, xe^{xz}(\cos y + \sin w), e^{xz} \cos w)$

c)  $(2x_1, \dots, 2x_n)$

**Oppgave 7.** a) Konservativt,  $x^3y^2 + x + y$     b) Ikke konservativt

c) Konservativt,  $\sin(xy)$

**Oppgave 8.** a) Konservativt,  $e^{xy}$     b) Ikke konservativt

**Oppgave 9.** a) Konservativt,  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$     b) Konservativt,  $x^3y$     c) Ikke konservativt

**Oppgave 10.**  $ax + by$

**Oppgave 11.** a)  $y^3 - x^2$     b)  $2x$     c)  $2x - 2y$

**Oppgave 12.** a)  $3x^2 + 3y^2$     b)  $(0,0), 0$

**Oppgave 13.** a)  $0$     b)  $3x^2e^y$     c)  $0$

**Oppgave 14.** a)  $0$     b)  $-\sin x + \cos y, 2$

**Oppgave 15.** -

**Oppgave 16.** a)  $0$     b)  $6$     c)  $(x^2 + y^2)e^{xy}$

## Kapittel 9

**Oppgave 1.** a)  $(t,t)$     b)  $(t, t^2 - 2)$     c)  $(\cos t, \sin t)$

**Oppgave 2.** a)  $x - 2y = 5$     b)  $x^3 - y^2 = 0$     c)  $x - \sin^2(y+1) = 0$

**Oppgave 3.**  $(2,2), (5,-1)$

**Oppgave 4.** a)  $(2,1), (-1,2)$     b)  $(2t, 3t^2), (-3t^2, 2t)$     c)  $(\sin 2t, 1), (-1, \sin 2t)$

**Oppgave 5.** a)  $2\sqrt{5}$     b)  $\sqrt{a^2 + b^2}$

**Oppgave 6.** a)  $\sqrt{2}$     b)  $\sqrt{2}$

Oppgave 7. a)  $2\pi$     b)  $\frac{335}{27}$

Oppgave 8.  $-\frac{14}{15}$

Oppgave 9.  $-2\pi$

Oppgave 10. 10

Oppgave 11.  $-2\pi$

Oppgave 12. F.eks. sirkelen  $x^2 + y^2 = 1$

Oppgave 13. Veldig mange muligheter

Oppgave 14. a)  $(2xy + y^2, x^2 + 2xy)$     b) 48    c) 48

Oppgave 15. b)  $-\cos(xy)$     c) 0

Oppgave 16. b)  $xe^y$     c)  $2e$

Oppgave 17. b)  $x + y$     0

## Kapittel 10

Oppgave 1. a)  $\frac{1}{4}(e^4 - e)(e^9 - e)$   
b)  $\frac{45}{4} + \frac{15}{2}(\ln 3 - \ln 2)$     c)  $2 - \frac{2}{e}$

Oppgave 2. a)  $\frac{8}{3}$     b)  $\frac{2}{15}$     c)  $e + \frac{1}{e} - 2$

Oppgave 3. 1

Oppgave 4. 3

Oppgave 5. a) 10    b)  $\frac{19}{12}$     c)  $\frac{1}{4}e^4 - e + \frac{3}{4}$

Oppgave 6. a)  $\frac{2}{3}$     b)  $a^2 + a + \frac{2}{3}$     c)  $\frac{2}{3}a^2$

Oppgave 7.  $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{2}{5}$

Oppgave 8. a)  $\frac{1}{12}$     b)  $\bar{x} = \frac{3}{5}, \bar{y} = \frac{12}{35}$

Oppgave 9.  $\pi ab$

Oppgave 10. -4

Oppgave 11. 4

Oppgave 12.  $4\pi$

Oppgave 13. a)  $\frac{81}{5}$     b)  $\frac{625\pi}{16}$     c)  $\pi(e^{16} - e)$   
d)  $\frac{1}{16}$     e) 0    f)  $\frac{\pi}{6}(2\sqrt{2} - 1)$

## Kapittel 11

Oppgave 1.  $y = e^t$

Oppgave 2.  $y = e^{2t}$

Oppgave 3.  $y = 2e^{-t}$

Oppgave 4.  $y = (t \pm 1)^2$

Oppgave 5.  $y = \sqrt{2t + 4}$

Oppgave 6.  $y = \sqrt{t^2 + 4}$

Oppgave 7.  $y = 1$

Oppgave 8.  $y = 0, y = 2$

Oppgave 9.  $y = 0, y = 1, y = 2$

Oppgave 10.  $y = \frac{3}{2}$

Oppgave 11.  $y = \pm t^2$

Oppgave 12. Nei (168 år)

Oppgave 13.  $\frac{B}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{B^2 - \frac{4h}{\beta}}, \frac{B}{2} + \frac{1}{\beta t - C}$

Oppgave 14. 2

Oppgave 15. 3.18, 3.08, 3

Oppgave 16. 4.11, 6.12,  $\infty$

Oppgave 17. 4.9, 5, 5

Oppgave 18. -

Oppgave 19. -

Oppgave 20. -

Oppgave 21. -

## Kapittel 12

Oppgave 1.  $x = 1, y = 1$

Oppgave 2.  $x = 2, y = 3$

Oppgave 3.  $(-1, 1), (0, 0), (1, 1)$

Oppgave 4. Bifurkasjon, en tiltrekkende retning

Oppgave 5. Bifurkasjon, en tiltrekkende retning

Oppgave 6. Periodisk

Oppgave 7. Bifurkasjon, en tiltrekkende retning

Oppgave 8.  $x = y = e^t$

Oppgave 9.  $\frac{d[A]}{dt} = -k_1[A][B] = -\frac{d[B]}{dt}$