UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1050 — Matematikk for anvendelser 1
Eksamensdag:	Onsdag 1. desember, 2021
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Se første siden i Inspera.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: Det er angitt hvor mange poeng som kan oppnåes i hver enkel oppgave/deloppgave. Maksimal total poengsum er 100. Dersom det er et punkt du ikke får til, kan du likevel bruke resultatene derfra i senere punkter. Husk at du må begrunne svarene dine.

Alle hjelpemidler er tillatt (bøker, notater, kalkulator, dataprogrammer osv.), men du har ikke lov til å kommunisere med andre under eksamen (dette inkluderer å stille eller besvare spørsmål på nettsider). Du kan bruke dataprogrammer, men du må forklare hvilke programmer du bruker og hvilken input du gir dem, slik at det mulig å følge argumentasjonen din. Svar som viser matematisk forståelse og matematiske ferdigheter, vil gi bedre uttelling enn svar som bare krever inntasting i et dataprogram. Svar som ikke er begrunnet, vil få null poeng i sensuren.

Oppgave 1 (vekt 10 poeng)

Finn likevektspunktet til systemet

$$\begin{aligned} x' &= 5x + 16y - 4 \\ y' &= -x + 5y + 9 \end{aligned}$$

og avgjør hva slags likevektspunkt det er. Beskriv hvordan typiske løsningskurver ser ut.

Oppgave 2 (vekt 10 poeng)

La f være funksjonen som definert ved

$$f(x) = \ln(1 + x + x^2)$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

(Fortsettes på side 2.)

Beregn Taylor-polynomet p til f av grad 2 i $x = 0$. Bruk det til å angi en approksimativ verdi av $f(1/4)$.

Oppgave 3 (vekt 10 poeng)

3a (vekt 5 poeng)

Finn grensen

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2}\,.$$

3b (vekt 5 poeng)

Avgjør om rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, e^{-n}$$

er konvergent.

Oppgave 4 (vekt 40 poeng)

La f være funksjonen som er gitt ved

$$f(x, y) = y - x^2 y - y^3\,.$$

for alle (x, y) i $\mathbb{R}^2$.

4a (vekt 10 poeng)

Sett $R = [-1, 1] \times [0, 1]$. Beregn $\iint_R f(x, y)\, dxdy$.

4b (vekt 20 poeng)

Finn de kritiske punktene til f. Avgjør om disse er lokale minimumspunkter, lokale maksimumspunkter eller sadelpunkter.

4c (vekt 10 poeng)

La D være området i xy-planet gitt ved

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Bruk polarkoordinater til å beregne volumet V av legemet som ligger mellom området D og grafen til f.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 5 (vekt 30 poeng)

La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet i xy-planet som er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = (e^x + \sin y,\ x \cos y).$$

Videre, la C være den lukkede kurven i xy-planet som er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = \left(t^2,\ \frac{t}{3}(t^2 - 3)\right), \quad -\sqrt{3} \leq t \leq \sqrt{3},$$

og la C_1 være den delen av kurven C som gjennomløpes når parameteren t i $\mathbf{r}(t)$ går fra 0 til $\sqrt{3}$.

5a (vekt 10 poeng)

Begrunn at $\mathbf{F}$ er konservativt og finn et potensial for $\mathbf{F}$.

5b (vekt 5 poeng)

Beregn kurveintegralet til vektorfeltet $\mathbf{F}$ langs C_1.

5c (vekt 10 poeng)

Begrunn at $|\mathbf{r}'(t)| = t^2 + 1$ og beregn buelengden L til kurven C_1.

5d (vekt 5 poeng)

Beregn arealet A av området D i xy-planet som har kurven C som sin randkurve.

Lykke til!