Kandidatnummer:

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1050 — Matematikk for anvendelser 1
Eksamensdag:	Tirsdag 13. desember 2022
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator og ett A4-ark med valgfri håndskrevet eller trykt tekst på begge sider.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

DEL 1

Denne delen består av 10 flervalgsoppgaver. Hver oppgave teller 3 poeng, og maksimalt oppnåelig poengsum på denne delen er 30. Det er bare ett riktig alternativ på hver oppgave. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på en oppgave, får du 0 poeng. Svarene fører du inn på dette svararket. Krysser du av mer enn ett alternativ på en oppgave, får du 0 poeng. Oppgavene står på neste side.

Lykke til!

Oppgave	Alt. a)	Alt. b)	Alt. c)	Alt. d)
A				
B				
C				
D				
E				
F				
G				
H				
I				
J				

(Fortsettes på side 2.)

OPPGAVE A Den deriverte til funksjonen $f(x) = x^2e^x$ er gitt ved

a) $2(x + x^2)e^{2x}$ b) $4xe^{2x}$ c) $(2x + x^2)e^{2x}$ d) $2x + 2e^{2x}$

OPPGAVE B Verdien av det bestemte integralet $\int_0^\pi x \sin x \, dx$ er

a) π b) 1 c) $\frac{\pi}{2} + 1$ d) 0

OPPGAVE C Summen av den geometriske rekka $2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \ldots$:

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{4}$ d) 2

OPPGAVE D Tangentlinja til funksjonen $f(x) = xe^x$ i $x = 0$ er gitt ved

a) $y = 0$ b) $y = 2x$ c) $y = x + 1$ d) $y = x$

OPPGAVE E Normalformen til det komplekse tallet $z = ie^{i\frac{\pi}{2}}$:

a) -1 b) $i + 1$ c) $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ d) i

OPPGAVE F Hvilken av funksjonene er en potensialfunksjon for feltet

$$\mathbf{F}(x, y) = (4xy^2 + y, 4x^2y + x)$$

a) $f(x, y) = x^2y + 2xy$ b) $f(x, y) = xy^2 + y$ c) $f(x, y) = xy + 2x^3 + y$
d) $f(x, y) = 2x^2y^2 + xy + 1$

OPPGAVE G Virvlingen til feltet $\mathbf{F}(x, y) = (xy, 2x^2 + y)$ er gitt ved

a) $(y, 4x)$ b) $3x$ c) $(4x, y)$ d) $1 + x$

OPPGAVE H En nivåkurve for funksjonen $f(x, y) = x^2 + xy$ er gitt ved

a) $y = \frac{1-x}{x^2}$ b) $y = \frac{2-x^2}{x}$ c) $y = \frac{x}{1-x^2}$ d) $y = \frac{2x^2}{x+1}$

OPPGAVE I Gradienten til funksjonen $f(x, y) = \sin y + ye^x$ er gitt ved

a) $\cos y + e^x$ b) $\cos y + y + e^x$ c) $(ye^x, \cos y + e^x)$ d) $(\sin y, e^x)$

OPPGAVE J Hvilken av kurvene er en integralkurve for feltet

$$\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$$

a) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ b) $\mathbf{r}(t) = (-\sin t, \cos t)$ c) $\mathbf{r}(t) = (t, -t)$
d) $\mathbf{r}(t) = (e^t, e^{-t})$

(Fortsettes på side 3.)

DEL 2

Del 2 består av 3 oppgaver med til sammen 7 delspørsmål. Hvert delspørsmål teller 10 poeng, så maksimalt oppnåelig poengsum på denne delen er 70.

OPPGAVE A Gitt en funksjon $f(x, y) = x^2y - 2xy + \frac{1}{2}y^2$

a) Finn de partiellderiverte til funksjonen f.

b) Finn de kritiske punktene til funksjonen f og avgjør om de er maksimums-, minimums- eller sadelpunkter.

c) Finn det bestemte integralet av funksjonen f over rektangelet

$$[0, 1] \times [0, 2]$$

OPPGAVE B Et område Q i xy-planet er gitt ved

$$y^2 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1$$

a) Vis at arealet av Q er lik $\frac{4}{3}$.

b) Finn koordinatene til tyngdepunktet til Q.

OPPGAVE C Gitt et system av lineære differensiallikninger

$$\frac{dx}{dt} = 2x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = x + 2y$$

a) Vis at $x(t) = e^t + 2e^{3t}$, $y(t) = -e^t + 2e^{3t}$ er en løsning av systemet med initialbetingelsen $x(0) = 3$, $y(0) = 1$.

b) Begrunn hvorfor $(x, y) = (0, 0)$ er et frastøtende likevektspunkt for systemet.

SLUTT.

(Fortsettes på side 4.)

FORMELSAMLING

Derivasjonsregler

Spesielle: $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(e^x)' = e^x$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$,
$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$

Generelle: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$, $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
$(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$

Spesielle funksjoner

Eksponensialfunksj.: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $\quad (a^x)^y = a^{xy}$
Logaritmer: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\quad \ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$
Trigonometriske: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1

Integrasjonsregler

Spesielle: $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$ $\quad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$, $x > 0$
$\int e^x \, dx = e^x + C$, $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$, $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
Generelle: $\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$
$\int f(x) g'(x) \, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) \, dx$
$\int f'(g(x)) g'(x) \, dx = f(g(x)) + C$

Komplekse tall

Skrivemåter: $z = a + ib = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta}$
Kompleks konjugert: $\overline{z} = a - ib = re^{-i\theta}$

Funksjoner av flere variable

Nivåkurver: $f(\mathbf{x}) = C$
Gradient: $\nabla f(\mathbf{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}))$
Annenderiverttest: $H(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2$.

i) Hvis $D < 0$, er (a,b) et sadelpunkt.
ii) Hvis $D > 0$ og $A > 0$, er (a,b) et lokalt minimum.
iii) Hvis $D > 0$ og $A < 0$, er (a,b) et lokalt maksimum.

(Fortsettes på side 5.)

Parametriserte kurver og linjeintegraler

Buelengde: $s = L(a,b) = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}\, dt$
Linjeintegral av funksjon: $\int_{\mathcal{C}} f\ ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}\, dt$
Linjeintegral av vektorfelt: $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$
Integral av gradient: $\int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$
Virvling for plant vektorfelt $\mathbf{F} = (P,Q)$: $\mathrm{curl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$

Multiple integraler

Areal og tyngdepunkt: $A = \iint_D 1\, dx\, dy$
$$\overline{x}A = \iint_D x\, dx\, dy \qquad \overline{y}A = \iint_D y\, dx\, dy$$
Greens teorem: $\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\mathcal{C}} P\ dx + Q\ dy$

Dynamiske systemer

System: $x'(t) = ax + by,\ y'(t) = cx + dy$
Diskriminant: $\mathcal{D} = (a-d)^2 + 4bc$
Egenverdier: $\lambda = \frac{a+d\pm\sqrt{\mathcal{D}}}{2}$
Likevektspunkter:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} > 0,\ \lambda_1, \lambda_2 > 0 &: \text{ frastøtende likevektspunkt} \\
\mathcal{D} > 0,\ \lambda_1, \lambda_2 < 0 &: \text{ tiltrekkende likevektspunkt} \\
\mathcal{D} > 0,\ \lambda_2 < 0 < \lambda_1 &: \text{ bifurkasjon, én tiltrekkende linje} \\
\mathcal{D} < 0,\ \frac{a+d}{2} > 0 &: \text{ utoverrettet spiral} \\
\mathcal{D} < 0,\ \frac{a+d}{2} < 0 &: \text{ innoverrettet spiral}
\end{aligned}$$