UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1050 — Matematikk for anvendelser 1

Eksamensdag: Fredag 8. juni 2018

Tid for eksamen: 14.30 – 18.30

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg: Formelsamling

Tillatte hjelpemidler: Et håndskrevet eller trykket ark

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Betrakt funksjonen

$$f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 + 1.$$

definert over disken $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$.

a) Finn de kritiske punktene til f og bestem deres natur (maks/min/sadel).

b) La kurven C være gitt ved $x^2 + y^2 = 1$. Bruk Lagranges metode til å finne største og minste verdi for funksjonen f langs kurven C.

Oppgave 2

La

$$\mathbf{F}(x, y) = (\cos y + y \cos x, \sin x - x \sin y)$$

være et vektorfelt i planet.

a) Vis at $\operatorname{curl}(\mathbf{F}) = 0$ og finn en potensialfunksjon f for vektorfeltet som tilfredsstiller $f(0, 0) = 1$.

b) Beregn kurveintegralet av $\mathbf{F}$ langs en rett linje fra punktet $(0, 0)$ til punktet (π, π).

Oppgave 2π

En plan kurve C er gitt ved parameterframstillingen

$$\mathbf{r}(t) = (1 + \cos 2t, 2 + \sin 2t) \quad 0 \leq t \leq \pi$$

a) Finn buelengden av kurven C.

b) Finn integralet av funksjonen $f(x, y) = xy$ langs kurven C.

c) Finn integralet av vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y) = (2 - y, x - 1)$ langs kurven C.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4

La D være området i (x, y)-planet over x-aksen og under grafen til funksjonen $g(x) = 1 - x^2$.

a) Vis at arealet av området D er $\frac{4}{3}$.

b) Regn ut dobbeltintegralet av funksjonene

$$f(x, y) = x \quad \text{og} \quad g(x, y) = y$$

over området D og bestem koordinatene til tyngdepunktet til D.

Oppgave 5

Gitt et dynamisk system

$$\frac{dx}{dt} = -4x + 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = -3x + y$$

Hva slags likevektspunkt er $(0, 0)$? Begrunn svaret.

SLUTT.

(Fortsettes på side 3.)

FORMELSAMLING FOR MAT 1050

Derivasjonsregler

Spesielle: $(x^n)' = nx^{n-1}$
$(a^x)' = a^x \ln a$ spesielt $(e^x)' = e^x$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$

Generelle: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
$(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$
$(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Spesielle funksjoner

Eksponensialfunksj.: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$
Logaritmer: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$
$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$ $\ln(x^a) = a \ln x$
Trigonometriske: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–

Integrasjonsregler

Spesielle: $\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ $n \neq -1$ $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$, $x > 0$
$\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$ spesielt $\int e^x \, dx = e^x + C$
$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
Generelle: $\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$
$\int f(x) g'(x) \, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) \, dx$
$\int f'(g(x)) g'(x) \, dx = f(g(x)) + C$

Komplekse tall

Skrivemåter: $z = a + ib = r(\cos\theta + i \sin\theta) = re^{i\theta}$
Kompleks konjugert: $\overline{z} = a - ib = re^{-i\theta}$
abc**-formelen:** $x^2 + bx + c = 0$ gir $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$

(Fortsettes på side 4.)

Funksjoner av flere variable

Gradient: $\nabla f(\mathbf{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}))$
Kjerneregel: For $h(t) = f(\mathbf{x}(t))$,

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}(t)) \cdot x_1'(t) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}(t)) \cdot x_n'(t) = \nabla f(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{x}'(t)$$

Annenderiverttest: Anta at (a, b) er et stajonært punkt og la $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$, $D = AC - B^2$. Da gjelder

i) Hvis $D < 0$, er (a, b) et sadelpunkt.
ii) Hvis $D > 0$ og $A > 0$, er (a, b) et lokalt minimum.
iii) Hvis $D > 0$ og $A < 0$, er (a, b) et lokalt maksimum.

Numeriske formler

Taylors formel: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Parametriserte kurver og linjeintegraler

Tangent: $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t))$
Buelengde: $s = L(a, b) = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}\, dt$
Linjeintegral av funksjon: $\int_{\mathcal{C}} f\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}\, dt$
Linjeintegral av vektorfelt: $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{T}_C(t)\, dt$
Integral av gradient: $\int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$
Sirkulasjon av plant vektorfelt $\mathbf{F} = (P, Q)$: $\text{curl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$

Multiple integraler

Polarkoordinater: $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,

$$\iint_{D(x,y)} f\, dx\, dy = \iint_{D(r,\theta)} f r\, dr\, d\theta$$

Areal og tyngdepunkt: $A = \iint_D 1\, dx\, dy$

$$\overline{x}A = \iint_D x\, dx\, dy \qquad \overline{y}A = \iint_D y\, dx\, dy$$

Greens teorem: $\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\mathcal{C}} P\, dx + Q\, dy$

Dynamiske systemer

System: $x'(t) = ax + by$, **Egenverdi**: $y'(t) = cx + dy$
Diskriminant: $\mathcal{D} = (a-d)^2 + 4bc$, $\lambda = \frac{a+d\pm\sqrt{\mathcal{D}}}{2}$
For $\mathcal{D} < 0$: $\alpha = \frac{a+d}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{\mathcal{D}}}{2}$

$\mathcal{D} > 0,\ \lambda_1, \lambda_2 > 0$: frastøtende likevektspunkt
$\mathcal{D} > 0,\ \lambda_1, \lambda_2 < 0$: tiltrekkende likevektspunkt
$\mathcal{D} > 0,\ \lambda_2 < 0 < \lambda_1$: bifurkasjon, én tiltrekkende linje
$\mathcal{D} < 0,\ \alpha > 0$: utoverrettet spiral (frastøtende likevektspunkt)
$\mathcal{D} < 0,\ \alpha < 0$: innoverrettet spiral (tiltrekkende likevektspunkt)
$\mathcal{D} < 0,\ \alpha = 0$: bifurkasjon med periodiske stabile baner utenfor likevektspunktet