Løsningsforslag

eksamen MAT1050 27/11-20:

① $$\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^y+\sin x)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[xe^y-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\pi}{2}e^y - 0 - (0-1)\right) dy = \int_0^1 \left(\frac{\pi}{2}e^y+1\right) dy$$

$$= \left[\frac{\pi}{2}e^y + y\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}e + 1 - \left(\frac{\pi}{2}+0\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}(e-1)+1}}$$

② $$\begin{cases} 2iz + w = 1 \\ z + (1-i)w = 0 \quad | \cdot -2i \end{cases} \qquad \begin{cases} 2iz + w = 1 \\ -2iz + (-2i-2)w = 0 \end{cases}$$

$z = -(1-i)w$

$z = -(1-i)\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right)$

$= \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i - \frac{1}{5}i - \frac{2}{5}$

$= \underline{\underline{-\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i}}$

$\Leftarrow$

$w(-2i-2+1) = 1$

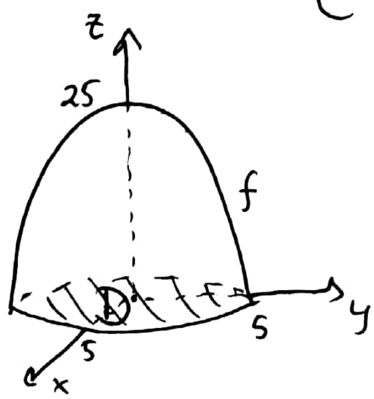
$(-1-2i)w = 1$

$$w = \frac{1\ (-1+2i)}{(-1-2i)(-1+2i)}$$

$$= \frac{-1+2i}{1+4} = \underline{\underline{-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i}}$$

Løsning: $z = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$ og $w = -\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$

③ La $f(x,y) = 25 - x^2 - y^2$.



Volumet under grafen til f (se tegning) og over xy-planet er gitt ved

$$V = \iint_D f(x,y)\, dA$$

Vi finner området D i xy-planet ved å sette $f(x,y) \geq 0$:

$$25 - x^2 - y^2 \geq 0$$
$$x^2 + y^2 \leq 25$$

Så D er en disk med sentrum i origo og radius lik 5.

Vi bruker polarkoordinater:

$$D: \ 0 \leq r \leq 5, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$f(r,\theta) = 25 - r^2$$

Vi får

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^5 (25 - r^2)\, r \, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^5 (25r - r^3)\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{25}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4 \right]_0^5 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{25}{2} \cdot 25 - \frac{1}{4} \cdot 25^2 \right) d\theta = \int_0^{2\pi} 625 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) d\theta$$

$$= \left[\frac{625}{4} \theta \right]_0^{2\pi} = 2\pi \cdot \frac{625}{2} = \underline{\underline{\frac{625}{2}\pi}}$$

4) Vi har

$$f(x,y) = x^3+y^3+3xy+3$$

Vi finner de kritiske punktene ved å løse $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ og $\frac{\partial f}{\partial y}=0$.

Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2+3y \quad \text{og} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2+3x$$

Som gir
$$\begin{cases} \text{I}: 3x^2+3y=0 \\ \text{II}: 3y^2+3x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{I}: x^2=-y \\ \text{II}: y^2=-x \end{cases}$$

Vi får I: $x^4=(-y)^2=y^2$

som kombinert med II gir $x^4=-x$

$$x^4+x=0$$
$$x(x^3+1)=0$$
$$\underline{x=0} \vee \underline{x=-1}$$

$x=0$ gir $y=0$

$x=-1$ gir $y=-1$

De kritiske punktene til f er $\underline{\underline{(0,0) \text{ og } (-1,-1)}}$.

For å avgjøre deres type, bruker vi andrederivert testen:

Vi har $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=3$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y$.

(x,y)	$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$	$B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$	$C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$	$AC-B^2$
$(0,0)$	0	3	0	-9
$(-1,-1)$	-6	3	-6	27

Konklusjon:

$\underline{\underline{(0,0) \text{ er et sadelpunkt}}}$ siden $AC-B^2<0$

$\underline{\underline{(-1,-1) \text{ er et lokalt maksimum}}}$ siden $AC-B^2>0$ og $A<0$.

(5) Vi bruker Lagranges metode for å finne den største og minste verdien til $f(x,y) = xy$ under bibetingelsen $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Det gir likningssystemet

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y) = 36 \end{cases}$$

der $g(x,y) = 4x^2 + 9y^2$

Vi får:

$$\begin{cases} \text{I}: y = \lambda \cdot 8x \\ \text{II}: x = \lambda \cdot 18y \\ \text{III}: 4x^2 + 9y^2 = 36 \end{cases}$$

Vi ser at $x \neq 0, y \neq 0$

$\text{I}: \lambda = \frac{y}{8x}$ $\quad \text{II}: \lambda = \frac{x}{18y}$

som gir $\frac{y}{8x} = \frac{x}{18y}$

$$\underline{18y^2 = 8x^2}$$

III gir $8x^2 + 18y^2 = 72$

så $\underline{8x^2 = 72 - 18y^2}$

Det gir

$$18y^2 = 72 - 18y^2$$

$$36y^2 = 72$$

$$y^2 = 2$$

$$\underline{y = \pm\sqrt{2}}$$

Vi setter inn $y = \pm\sqrt{2}$ i likning III:

$$4x^2 + 18 = 36$$

$$4x^2 = 18$$

$$x^2 = \frac{9}{2}$$

$$\underline{x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}}$$

Dette gir 4 kandidater for maks/min: $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$ og $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right)$.

Vi har

$$f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = f\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) = \underline{\underline{3}}$$

$$f\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) = f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) = \underline{\underline{-3}}$$

Den største verdien til f er 3, og den minste er -3.

6) La $\vec{F}$ være vektorfeltet gitt ved

$$\vec{F}(x,y) = (\underbrace{2xy^2 + 3x^2}_{p(x,y)}, \underbrace{2x^2y + 4y^3}_{q(x,y)})$$

a) Vi har $\frac{\partial q}{\partial x} = 4xy$ og $\frac{\partial p}{\partial y} = 4xy$.

Dermed er $\text{curl}\,\vec{F} = \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0$.

Vi har også at $\vec{F}$ er definert overalt (dvs. for alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$), så $\vec{F}$ er konservativt.

La $\vec{F} = \vec{\nabla} f$. Da har vi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 + 3x^2 \Rightarrow f(x,y) = x^2y^2 + x^3 + g(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + 4y^3 \Rightarrow f(x,y) = x^2y^2 + y^4 + h(x)$$

Vi kan la $g(y) = y^4$ og $h(x) = x^3$, og en potensial-funksjon for $\vec{F}$ er gitt ved $f(x,y) = x^2y^2 + x^3 + y^4$.

b) La C være kurven gitt ved $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^{-t} \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Siden $\vec{F}$ er konservativt har vi

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(2\pi)) - f(\vec{r}(0))$$

Vi har $\vec{r}(0) = (1,0)$ og $\vec{r}(2\pi) = (e^{2\pi}, 0)$.

Det gir

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(e^{2\pi},0) - f(1,0)$$

$$= (e^{2\pi})^3 - 1^3 = e^{6\pi} - 1$$

(6

(7) $H: \begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = cx + y \end{cases}$

a) Den karakteristiske likningen er

$$\lambda^2 - 2\lambda + (1-3c) = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1-3c)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 \cdot 3c}}{2} = \underline{\underline{1 \pm \sqrt{3c}}}$$

Egenverdiene er $1 \pm \sqrt{3c}$.

b) Når $c = 3$ har vi

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{3 \cdot 3} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

Siden egenverdiene har motsatt fortegn, er likevektspunktet en bifurkasjon.

c) Når $c < 0$ har vi

$\lambda = 1 \pm \sqrt{3c} \cdot i$, og dermed komplekse egenverdier.

Siden $\alpha = 1 > 0$, har vi ~~..~~ utoverrettete spiraler,

dvs. et frastøtende likevektspunkt

d) Vi løser systemet

$$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}$$

når $x(0) = 1$ og $y(0) = 2$:

Fra oppgave b har vi at egenverdiene er 4 og −2.

Det gir generell løsning

$$x(t) = Ce^{-2t} + De^{4t}$$

og $y(t) = -Ce^{-2t} + De^{4t}$

$$\mu = \frac{\lambda - a}{b} = \frac{\lambda - 1}{3}$$

$\lambda = -2 : \mu = -1$

$\lambda = 4 : \mu = 1$

Spesiell løsning:

$x(0) = C + D$
$y(0) = -C + D$

som gir

$$\begin{array}{r} C + D = 1 \\ -C + D = 2 \\ \hline 2D = 3 \end{array}$$

$D = \frac{3}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$

Vi får løsningen

$$x(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{4t} \quad \text{og} \quad y(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{4t}$$

e)
$$\lim_{t \to \infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{\overset{0}{\frac{1}{2}e^{-2t}} + \frac{3}{2}e^{4t}}{\underset{0}{-\frac{1}{2}e^{-2t}} + \frac{3}{2}e^{4t}} = 1$$

Den tilbehørende linja er gitt ved $y = x$.