Løsningsforslag, eksamen MAT 1050, 8. juni 2018

Oppgave 1
Betrakt funksjonen

$$f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 + 1.$$

definert over disken $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

a) Finn de kritiske punktene til f og bestem deres natur (maks/min/sadel).

b) La kurven C være gitt ved $x^2 + y^2 = 1$. Bruk Lagranges metode til å finne største og minste verdi for funksjonen f langs kurven C.

Løsning:
a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$$

gir kritisk punkt $(x, y) = (1, 0)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

gir $H(1, 0) = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 > 0$ og siden $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$ er punktet et minimumspunkt.
b)

$$\begin{aligned} 2x - 2 &= \lambda \cdot 2x \\ 2y &= \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Andre likning gir $y = 0$ eller $\lambda = 1$. Hvis $\lambda = 1$ gir første likningen $2x - 2 = 2x$ eller $-2 = 0$ som er umulig. Hvis $y = 0$ gir bibetingelsen at $x^2 = 1$ eller $x = \pm 1$. Vi har $f(1, 0) = 1 - 2 + 0 + 1 = 0$ og $f(-1, 0) = 1 + 2 + 0 + 1 = 3$, dvs. største verdi er 3 og minste er 0.

Oppgave 2

La

$$\mathbf{F}(x,y) = (\cos y + y\cos x, \sin x - x\sin y)$$

være et vektorfelt i planet.

a) Vis at curl($\mathbf{F}$) = 0 og finn en potensialfunksjon f for vektorfeltet som tilfredsstiller $f(0,0) = 1$.

b) Beregn kurveintegralet av $\mathbf{F}$ langs en rett linje fra punktet $(0,0)$ til punktet (π,π).

Løsning:

a)

$$\mathrm{curl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(\sin x - x\sin y) - \frac{\partial}{\partial y}(\cos y + y\cos x) = \cos x - \sin y + \sin y - \cos x = 0$$

Kandidat for potensialfunksjon:

$$f(x,y) = \int \cos y + y\cos x\, dx = x\cos y + y\sin x + g(y)$$

Vi krever

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x\sin y + \sin x + g'(y) = \sin x - x\sin y$$

som betyr $g'(y) = 0$ eller $g(y) = C$. Det gir $f(x,y) = x\cos y + y\sin x + C$. Vi har $f(0,0) = C = 1$, dvs

$$f(x,y) = x\cos y + y\sin x + 1$$

b) Siden gradientfeltet er konservativt får vi

$$\int_L \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}_L\, ds = f(\pi,\pi) - f(0,0) = -\pi$$

Oppgave 2π

En plan kurve C er gitt ved parameterframstillingen

$$\mathbf{r}(t) = (1+\cos 2t, 2+\sin 2t) \quad 0 \le t \le \pi$$

a) Finn buelengden av kurven C.

b) Finn integralet av funksjonen $f(x,y) = xy$ langs kurven C.

c) Finn integralet av vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y) = (2-y, x-1)$ langs kurven C.

Løsning:

Vi har

$$\mathbf{r}'(t) = (-2\sin 2t, 2\cos 2t) \quad |\mathbf{r}'(t)| = 2$$

a)

$$B = \int_C ds = \int_0^\pi 2\,dt = 2\pi$$

b)

$$\begin{aligned}\int_C f\,ds &= \int_0^\pi (1+\cos 2t)(2+\sin 2t)|\mathbf{r}'(t)|\,dt \\ &= \int_0^\pi (2+2\cos 2t+\sin 2t+\frac{1}{2}\sin 4t)2\,dt \\ &= 2[2t+\sin 2t-\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{1}{8}\cos 4t]_0^\pi \\ &= 2(2\pi-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}) = 4\pi\end{aligned}$$

c)

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}_C\,ds = \int_0^\pi (-\sin 2t, \cos 2t)\cdot(-2\sin 2t, 2\cos 2t)\,dt = \int_0^\pi 2\,dt = 2\pi$$

Oppgave 4

La D være området i (x,y)-planet over x-aksen og under grafen til funksjonen $g(x) = 1-x^2$.

a) Vis at arealet av området D er $\frac{4}{3}$.

b) Regn ut dobbeltintegralet av funksjonene

$$f(x,y) = x \quad \text{og} \quad g(x,y) = y$$

over området D og bestem koordinatene til tyngdepunktet til D.

Løsning:

a) Området D er gitt ved $[-1,1]\times[0,1-x^2]$.

$$\int_{-1}^1 1-x^2\,dx = [x-\frac{1}{3}x^3]_{-1}^1 = 1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

b)

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_{-1}^1\int_0^{1-x^2} x\,dy\,dx = \int_{-1}^1 x(1-x^2)\,dx = [\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3]_{-1}^1 = 0$$

$$\iint_D y\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} y\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}[\frac{1}{2}y^2]_0^{1-x^2}\,dx$$
$$= \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1-x^2)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1-2x^2+x^4\,dx$$
$$= \frac{1}{2}[x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5]_{-1}^{1} = \frac{8}{15}$$

som gir $\overline{x} = 0$ og $\overline{y} = \frac{1}{\frac{4}{3}} \cdot \frac{8}{15} = \frac{2}{5}$.

Oppgave 5

Gitt et dynamisk system

$$\frac{dx}{dt} = -4x + 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = -3x + y$$

Hva slags likevektspunkt er $(0,0)$? Begrunn svaret.

Løsning:

Diskriminanten:

$$\mathcal{D} = (-4-1)^2 + 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 1$$

og

$$\lambda = \frac{-4+1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mathcal{D}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

som betyr $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = -2$. Begge er negative og med positiv diskriminant får vi et tiltrekkende likevektspunkt.

SLUTT.