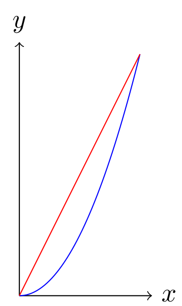
Eksamen i MAT1050 V19: Løsningsforslag

Oppgave 1. a) Vi har

$$\iint_R xye^{x^2}\,dA = \int_0^1 \left[\int_0^2 xye^{x^2}\,dy\right] dx = \int_0^1 \left[xe^{x^2}\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2} dx$$

$$= \int_0^1 2xe^{x^2}\,dx = \left[e^{x^2}\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

b) Figuren nedenfor viser området med kurven $y = x^2$ i blått og linjen $y = 2x$ i rødt.



For å finne ut hvor kurvene skjærer hverandre, løser vi ligningen $x^2 = 2x$, som har løsningene $x = 0$ og $x = 2$. Dermed har vi

$$\int_R 2x^2y\,dA = \int_0^2 \left[\int_{x^2}^{2x} 2x^2y\,dy\right] dx = \int_0^2 \left[x^2y^2\right]_{y=x^2}^{y=2x} dx$$

$$= \int_0^2 \left(4x^4 - x^6\right)\,dx = \left[\frac{4}{5}x^5 - \frac{x^7}{7}\right]_0^2 = \frac{128}{5} - \frac{128}{7} = \frac{256}{35}.$$

Oppgave 2. Funksjonsgrafen skjærer xy-planet i kurven $x^2 + y^2 = 16$, som er en sirkel om origo med radius 4. Lar vi A være området innenfor sirkelen, er dermed $V = \iint_A (16 - x^2 - y^2)\,dA$. Bytter vi til polarkoordinater, får vi

$$V = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^4 (16 - r^2)r\,dr\right] d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^4 (16r - r^3)\,dr\right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[8r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=4} d\theta = \int_0^{2\pi} (128 - 64)\,d\theta = 128\pi.$$

Oppgave 3. Vi har $\mathbf{r}'(t) = (2t, 3t^2)$, og dermed får vi

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^1 (t^2t^3, t^2 - t^3)\cdot(2t, 3t^2)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(2t^6 + 3t^4 - 3t^5\right)\, dt = \left[\frac{2t^7}{7} + \frac{3t^5}{5} - \frac{t^6}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{7} + \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{27}{70}.$$

Oppgave 4. a) Vi har

$$\operatorname{curl}(\mathbf{F}) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + 2x + \sin y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y + 2y\right)$$
$$= \left(3x^2 + 2\right) - \left(3x^2 + 2\right) = 0$$

for *alle* x, y, så feltet er konservativt.

Vi ser at en potensialfunksjon f må tilfredsstille:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + 2y \Longrightarrow f(x,y) = x^3y + 2xy + C(y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2x + \sin y \Longrightarrow f(x,y) = x^3y + 2xy - \cos y + D(x).$$

Dermed er $f(x,y) = x^3y + 2xy - \cos y$ en potensialfunksjon siden den tilfredsstiller begge kravene.

Bemerkning: Det er egentlig unødvendig å sjekke at $\operatorname{curl}(\mathbf{F}) = 0$ når vi etterpå finner en potensialfunksjon: Definisjonen av at $\mathbf{F}$ er konservativt, er jo at det finnes en potensialfunksjon!

b) Det lønner seg å bruke Greens teorem. Siden

$$\operatorname{curl}(\mathbf{G}) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + 2x + \sin y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y + 2y - 4xy^2\right)$$
$$= \left(3x^2 + 2\right) - \left(3x^2 + 2 - 8xy\right) = 8xy,$$

får vi

$$\oint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \operatorname{curl}(\mathbf{G})\, dA = \iint_R 8xy\, dA$$

der R er kvadratet med hjørner i $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$. Videre har vi

$$\oint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \left[\int_0^1 8xy\, dy\right] dx = \int_0^1 \left[4xy^2\right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 4x\, dx = \left[2x^2\right]_0^1 = 2.$$

Bemerkning: Det er også mulig å løse oppgaven ved å regne ut linjeintegralet etter definisjonen, men det blir mye regning siden integralet må deles opp i fire deler, én for hver side. Disse regningene kan effektiviseres hvis man legger merke til at $\mathbf{G}(x,y) = \mathbf{F}(x,y) + \mathbf{H}(x,y)$, der $\mathbf{F}$ er vektorfeltet i a) og $\mathbf{H}(x,y) = (-4xy^2, 0)$. Siden $\mathbf{F}$ er konservativt, er $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$, og dermed blir $\oint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r}$. Det siste integralet er overkommelig å regne ut siden 3 av de 4 delintegralene blir 0.

Oppgave 5. a) I et likevektspunkt er $x'(t) = 0$ og $y'(t) = 0$. Vi må derfor løse ligningene

$$\begin{aligned} 4x + 8y &= -2 \\ 2x - 2y &= 5 \end{aligned}$$

Deler vi den øverste ligningen med 2 og trekker resultatet fra den nederste, får vi $-6y = 6$, dvs. $y = -1$. Setter vi dette inn i en av ligingene, ser vi at $x = \frac{3}{2}$. Likevektspunktet er altså $(\frac{3}{2}, -1)$.

For å avgjøre hva slags likevektspunkt dette er, må vi regne ut egenverdiene:

$$\lambda = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2} = \frac{(4 + (-2)) \pm \sqrt{(4 - (-2))^2 + 4 \cdot 8 \cdot 2}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{6^2 + 64}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{2 \pm 10}{2} = \begin{cases} 6 \\ -4 \end{cases}$$

De to egenverdien er reelle og har motsatt fortegn, og følgelig har vi en bifurkasjon med én tiltrekkende linje.

b) Den generelle løsningen er

$$\begin{aligned} x(t) &= Ce^{\lambda_1 t} + De^{\lambda_2 t} \\ y(t) &= \frac{\lambda_1 - a}{b} Ce^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2 - a}{b} De^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

som i vårt tilfelle blir

$$x(t) = Ce^{6t} + De^{-4t}$$

$$y(t) = \frac{6-4}{8} Ce^{6t} + \frac{-4-4}{8} De^{-4t} = \frac{C}{4} e^{6t} - De^{-4t}.$$

For å finne konstantene C og D bruker vi at $x(0) = C + D$, $y(0) = \frac{C}{4} - D$. Dette gir ligningene

$$\begin{aligned} C + D &= 0 \\ \frac{C}{4} - D &= -5 \end{aligned}$$

Legger vi sammen disse ligningene, får vi $\frac{5}{4}C = -5$, dvs $C = -4$. Fra den første ligningen får vi da $D = 4$. Løsningen blir dermed

$$x(t) = -4e^{6t} + 4e^{-4t}$$

$$y(t) = -e^{6t} - 4e^{-4t}.$$

Oppgave 6. a) Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2 \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = y$$

og

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 1.$$

b) De kritiske punktene er bestemt av ligningene

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

som har løsningen $x = -1$, $y = 0$, så det eneste kritiske punktet er $(-1, 0)$.

For å bestemme hva slags punkt dette er, bruker vi annenderiverttesten. Vi har $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 0) = 2$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, 0) = 0$ og $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, 0) = 1$. Dermed er $D = AC - B^2 = 2 > 0$, og siden $A > 0$, betyr dette at $(-1, 0)$ et et lokalt minimum.

c) Siden det kritiske punktet $(-1, 0)$ tilfredsstiller betingelsen $x^2 + y^2 \leq 9$, er det en kandidat til å være et ekstremalpunkt. Øvrige kandidater må ligge på randen, dvs de må oppfylle betingelsen $x^2 + y^2 = 9$. Vi bruker Lagranges multiplikatormetode for å få tak i kandidatene her. Setter vi $g(x, y) = x^2 + y^2$, er $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$. Siden $\nabla f(x, y) = (2x + 2, y)$, får vi ligningen

$$2x + 2 = 2\lambda x \tag{1}$$

$$y = 2\lambda y \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 = 9 \tag{3}$$

I ligning (2) har vi to muligheter. Enten er $y = 0$, eller så er $\lambda = \frac{1}{2}$. Hvis $y = 0$, forteller ligning (3) oss at $x = \pm 3$. Hvis $\lambda = \frac{1}{2}$, blir ligning (1) til $2x + 2 = x$, som har løsningen $x = -2$. Setter vi dette inn i ligning (3), ser vi $y = \pm\sqrt{5}$. Vi har dermed følgende mulige maksimums- og minimumspunkter: $(-1, 0)$, $(\pm 3, 0)$ og $(-2, \pm\sqrt{5})$. Setter vi inn i funksjonen, får vi: $f(-1, 0) = -1$, $f(3, 0) = 15$, $f(-3, 0) = 3$, $f(-2, \pm\sqrt{5})) = \frac{5}{2}$. Dette viser at største verdi er 15 i punktet $(3, 0)$, og at minste verdi er -1 i punktet $(-1, 0)$.

SLUTT