Løsningsforslag til prøveeksamen i MAT1050, vår 2019

Oppgave 1. a) Vi har

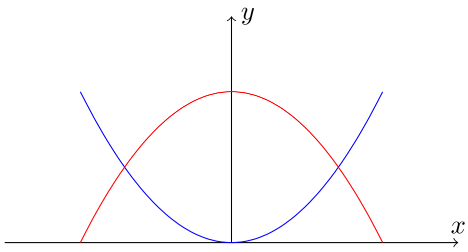
$$\iint_R \sin(x+y)\,dA = \int_0^\pi \left[\int_0^\pi \sin(x+y)\,dy\right]dx$$

$$= \int_0^\pi \Big[-\cos(x+y)\Big]_{y=0}^{y=\pi} dx = \int_0^\pi \big(-\cos(x+\pi)+\cos x\big)\,dx$$

$$= \Big[-\sin(x+\pi)+\sin x\Big]_0^\pi = (-\sin 2\pi + \sin\pi) - (-\sin\pi + \sin 0) = 0$$

siden alle fire leddene er 0.

b) Figuren viser de to kurvene; $y = x^2$ i blått og $y = 1 - x^2$ i rødt.



Kurvene skjærer hverandre når $1 - x^2 = x^2$, dvs når $2x^2 = 1$. Denne ligningen har løsningene $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, og dermed får vi

$$I = \iint_A x^2y\,dA = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\int_{x^2}^{1-x^2} x^2y\,dy\right]dx$$

Siden både området og integranden er symmetriske om y-aksene, kan vi forenkle dette til

$$I = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\int_{x^2}^{1-x^2} x^2y\,dy\right]dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\int_{x^2}^{1-x^2} 2x^2y\,dy\right]dx$$

som gir litt enklere regninger. Videre har vi

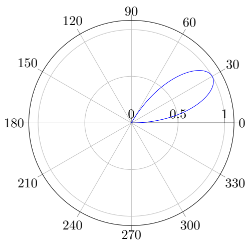
$$I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Big[x^2y^2\Big]_{y=x^2}^{y=1-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(x^2(1-x^2)^2 - x^2(x^2)^2\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(x^2 - 2x^4 + x^6 - x^6\right)dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(x^2 - 2x^4\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^5}{5}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left[\frac{1}{6\sqrt{2}} - 2\frac{1}{20\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{5}{30} - \frac{3}{30}\right] = \frac{1}{15\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{30}.$$

Oppgave 2. Figuren viser kurven (blå) i et polart koordinatsystem.



For å finne arealet må vi regne ut

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \sin^2(3\theta)\, d\theta$$

Innfører vi en ny variabel $u = 3\theta$, får vi $du = 3d\theta$ og

$$A = \frac{1}{6}\int_0^{\pi} \sin^2 u \, du = \frac{1}{6}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2u}{2}\, du = \frac{1}{12}\int_0^{\pi} (1-\cos 2u)\, du$$

$$= \frac{1}{12}\left[u - \frac{\sin 2u}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{12}$$

der vi har brukt formelen $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ fra formelarket.

Oppgave 3. Arealet til en halvsirkel er $A = \frac{\pi}{2}$. Vi har

$$\bar{x} = \frac{\iint_A x\, dA}{A} = 0$$

pga symmetri. Videre er

$$\bar{y} = \frac{\iint_A y\, dA}{A}$$

I dette integralet bytter vi til polarkoordinater:

$$\iint_A y\, dA = \int_0^1 \left[\int_0^{\pi} r\sin\theta \, r\, d\theta\right] dr = \int_0^1 \left[\int_0^{\pi} r^2 \sin\theta\, d\theta\right] dr$$

$$= \int_0^1 \left[-r^2\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} dr = \int_0^1 2r^2\, dr = \left[\frac{2r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Dermed er

$$\bar{y} = \frac{\iint_A y\, dA}{A} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi}$$

og tyngdepunktet blir $(0, \frac{4}{3\pi})$.

Oppgave 4. a) Vi har $\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2$ og $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2$, så $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, og følgelig er feltet konservativt. En potensialfunksjon f må tilfredsstille

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y + 3x^2 \implies f(x,y) = x^3 y + x^3 + C(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - e^{-y} \Longrightarrow f(x,y) = x^3y + e^{-y} + D(x)$$

Siden funksjonen $f(x,y) = x^3y + x^3 + e^{-y}$ tilfredsstiller begge kravene, er den en potensialfunksjon.

b) Vi observerer først at $\mathbf{r}(0) = (e^0 \cos 0, e^{-0} \sin 0) = (1,0)$ og $\mathbf{r}(\pi) = (e^\pi \cos(\pi), e^{-\pi} \sin \pi) = (-e^\pi, 0)$. Siden f er en potensialfunksjon, er

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(-e^\pi, 0) - f(1,0) = \big(0 - e^{3\pi} + 1\big) - (0 + 1 + 1) = -e^{3\pi} - 1$$

Oppgave 5. Ganger vi den øverste ligningen med i, får vi ligningssystemet

$$\begin{aligned} -z + iw &= 3i \\ z + (2+i)w &= -1 \end{aligned}$$

Legger vi sammen disse ligningene, får vi

$$(2+2i)w = -1 + 3i$$

Dette gir

$$w = \frac{-1+3i}{2+2i} = \frac{(-1+3i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{-2+2i+6i+6}{2^2+2^2} = \frac{1}{2} + i$$

Fra den øverste ligningen ovenfor ser vi nå at

$$z = iw - 3i = \frac{i}{2} - 1 - 3i = -1 - \frac{5}{2}i$$

Oppgave 6. a) I likevektspunktet er $x'(t) = 0$ og $y'(t) = 0$, så vi får ligningene

$$\begin{aligned} 4x + 2y - 4 &= 0 \\ 5x + y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Deler vi den første ligningen på 2, sitter vi igjen med ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x + y - 2 &= 0 \\ 5x + y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Vi trekker den øverste ligningen fra den nederste, og får $3x+3 = 0$, dvs. $x = -1$. Setter vi dette inn i en av de to ligningene, får vi $y = 4$. Likevektspunktet er altså $(-1, 4)$.

For å avgjøre hva slags likevektspunkt dette er, regner vi ut egenverdiene:

$$\lambda = \frac{a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2} = \frac{4 + 1 \pm \sqrt{(4-1)^2 + 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm 7}{2} = \begin{cases} 6 \\ \\ -1 \end{cases}$$

Med én positiv og én negativ egenverdi har vi en bifurkasjon med én tiltrekkende linje.

b) Den generelle løsningen er gitt ved

$$x(t) = Ce^{\lambda_1 t} + De^{\lambda_1 t} = Ce^{6t} + De^{-t}$$

$$y(t) = \frac{\lambda_1 - a}{b} Ce^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2 - a}{b} De^{\lambda_2 t}$$

$$= \frac{6-4}{2} Ce^{6t} + \frac{-1-4}{2} De^{-t} = Ce^{6t} - \frac{5}{2} De^{-t}$$

Vi setter inn startbetingelsene:

$$2 = x(0) = C + D$$

$$-5 = y(0) = C - \frac{5}{2} D$$

Trekker vi den nederste ligningen fra den øverste, får vi $7 = \frac{7}{2} D$, som gir $D = 2$. Setter vi dette inn i en av ligningene, får vi $C = 0$. Løsningen vi er på jakt etter er dermed

$$x(t) = 2e^{-t}$$
$$y(t) = -5e^{-t}$$

(Legg merke til at siden $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ befinner vi oss på den tiltrekkende linjen.)

Oppgave 7. a) De førsteordens partiellderiverte er:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 6y - 1$$

og de annenordens partiellderiverte er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$$

b) For å finne de kritiske punktene må vi løse ligningene

$$2xy = 0 \tag{1}$$
$$x^2 + 6y - 1 = 0 \tag{2}$$

Fra ligning (1) ser vi at vi enten må ha $x = 0$ eller $y = 0$. Setter vi $x = 0$ inn i ligning (2), får vi ligningen $6y - 1 = 0$, som har løsningen $y = \frac{1}{6}$. Setter vi $y = 0$ inn i ligning (2), får vi ligningen $x^2 - 1 = 0$, som har løsningene $x = \pm 1$. Vi har dermed tre kritiske punkter: $(0, \frac{1}{6})$, $(1, 0)$ og $(-1, 0)$.

For å finne ut hva slags punkter dette er, bruker vi annenderiverttesten:

Punktet $(0, \frac{1}{6})$: Vi har $A = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, $B = 2 \cdot 0 = 0$ og $C = 6$. Dette gir $D = AC - B^2 = 2$, og siden $D > 0$ og $A > 0$, betyr dette at $(0, \frac{1}{6})$ er et lokalt minimumspunkt.

Punktet $(1, 0)$: Vi har $A = 2 \cdot 0 = 0$, $B = 2 \cdot 1 = 1$ og $C = 6$. Dette gir $D = AC - B^2 = -1 < 0$, og dermed må $(1, 0)$ være et sadelpunkt.

Punktet $(-1, 0)$: Vi har $A = 2 \cdot 0 = 0$, $B = 2 \cdot (-1) = -1$ og $C = 6$. Dette gir $D = AC - B^2 = -1 < 0$, og dermed må $(-1, 0)$ være et sadelpunkt.

c) Fra punkt b) vet vi at den eneste kandidaten til et ekstremalpunkt i det indre av området, er $(0, \frac{1}{6})$. For å finne kandidater på randen av området bruker vi Lagranges multiplikatormetode med bibetingelsen $g(x, y) = x^2 + y^2 = 10$. Siden $\nabla f = (2xy, x^2 + 6y - 1)$ og $\nabla g = (2x, 2y)$, blir Lagranges betingelser:

$$2xy = \lambda 2x \tag{3}$$

$$x^2 + 6y - 1 = \lambda 2y \tag{4}$$

$$x^2 + y^2 = 10 \tag{5}$$

Fra ligning (3) ser vi at enten er $x = 0$ eller så er $\lambda = y$. Hvis $x = 0$, får vi fra (5) at $y = \pm\sqrt{10}$. Dermed har vi punktene $(0, \pm\sqrt{10})$. For den andre muligheten, $\lambda = y$, ser vi at ligning (4) blir til $x^2 + 6y - 1 = 2y^2$ når vi setter inn $\lambda = y$. Rydder vi opp litt, blir denne ligningen til

$$x^2 - 2y^2 + 6y = 1 \tag{6}$$

Trekker vi denne ligningen fra (5), får vi $3y^2 - 6y = 9$, som kan omskrives til skrives $y^2 - 2y - 3 = 0$. Denne annengradsligningen har løsningene

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Setter vi $y = 3$ inn i (5), får vi $x = \pm 1$, og setter vi $y = -1$ inn i (5), får vi $x = \pm 3$. Vi har dermed punktene $(\pm 1, 3)$ og $(\pm 3, -1)$ i tillegg til dem vi allerede har funnet.

Vi har dermed følgende kandidater til maks.- og min.-punkter: $(0, \frac{1}{6})$ fra det indre av området og $(0, \pm\sqrt{10})$, $(\pm 1, 3)$, $(\pm 3, -1)$ fra randen til området. Setter vi inn i f, får vi:

$$f(0, \frac{1}{6}) = 0 + 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{12}$$

$$f(0, \sqrt{10}) = 0 + 3\left(\sqrt{10}\right)^2 - \sqrt{10} = 30 - \sqrt{10}$$

$$f(0, -\sqrt{10}) = 0 + 3\left(-\sqrt{10}\right)^2 - (-\sqrt{10}) = 30 + \sqrt{10}$$

$$f(\pm 1, 3) = (\pm 1)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 - 3 = 27$$

$$f(\pm 3, -1) = (\pm 3)^2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1)^2 - (-1) = -5$$

Dette viser at største verdi er $30 + \sqrt{10}$ og minste verdi -5.

SLUTT