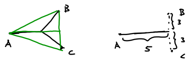
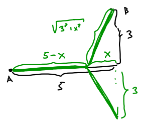
Uppstille maks/min-problem

Eksempel





$L(x) = 5 - x + 2\sqrt{9+x^2}$, $0 \le x \le 5$

Finn den x'en i $[0,5)$ slik at $L(x)$ blir minst mulig

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

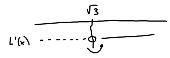
Deriverer: $L'(x) = -1 + \cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{9+x^2}} \cdot 2x$

$= -1 + \frac{2x}{\sqrt{9+x^2}}$

Løser $L'(x)=0$: $0 = -1 + \frac{2x}{\sqrt{9+x^2}} \Leftrightarrow 1 = \frac{2x}{\sqrt{9+x^2}} \Leftrightarrow \sqrt{9+x^2} = 2x$

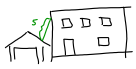
$\Rightarrow 9+x^2 = 4x^2 \Rightarrow 9 = 3x^2 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Vi kan bare bruke $x = \sqrt{3}$.

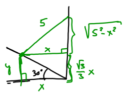


Den totale lengden blir minst når $x = \sqrt{3}$.

Eksempel



Hvordan plassere stigen for å komme høyest mulig opp på veggen?



$h(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{25-x^2}$, $x \in [0,5]$

$\tan 30° = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

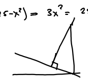
Deriverer $h(x)$: $h'(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{25-x^2}}(-\cancel{2}x)$

$= \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$

Setter deriverte lik 0: $0 = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{x}{\sqrt{25-x^2}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{25-x^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \;\Big|\; 3\sqrt{25-x^2}$

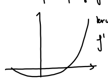
$\Rightarrow 3x = \sqrt{3}\sqrt{25-x^2} \Rightarrow \cancel{9}^{3}x^2 = \cancel{3}(25-x^2) \Rightarrow 3x^2 = 25-x^2$

$\Rightarrow 4x^2 = 25 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

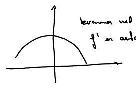


Krumning

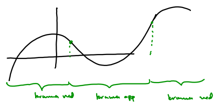
En funksjonsgraf kan krumme på to måter:



krummer opp
f' er voksende



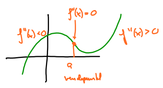
krummer ned
f' er avtagende.



Definisjon: En funksjon f krummer opp på intervallet I dersom $f'(x)$ er voksende på I, og den krummer ned på I dersom $f'(x)$ er avtagende på I.

Teorem: Dersom $f''(x) \ge 0$ på et intervall I, så krummer f opp på I. Dersom $f''(x) \le 0$ på et intervall I, så krummer f ned på I.

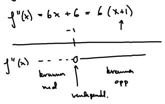
Definisjon: Dersom en funksjon krummer en vei til høyre for a, og motsatt vei til venstre, så kalles a et vendepunkt.



Eksempel: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 7$ Når krummer den opp og når krummer den ned?

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

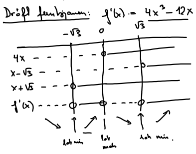
$f''(x) = 6x + 6 = 6(x+1)$



Svar: f krummer ned på $(-\infty,-1]$
f —"— opp på $[-1,\infty)$
f har vendepunkt i $x=-1$.

Eksempel: $f(x) = x^4 - 6x^2 + 10$ Symmetrisk om y-aksen: $f(-x) = f(x)$

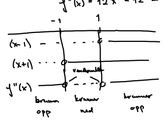
Drøft funksjonen: $f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2-3) = 4x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$



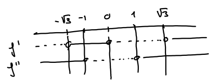
f er voksende på intervallene $[-\sqrt{3},0]$ og $[\sqrt{3},\infty)$.
f er avtagende på intervallene $(-\infty,-\sqrt{3}]$ og $[0,\sqrt{3}]$
f har lokale minima i $-\sqrt{3}$ og $\sqrt{3}$ og lok maks i 0

Krumning: $f'(x) = 4x^3 - 12x$

$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2-1) = 12(x-1)(x+1)$



f krummer opp i intervallene $(-\infty,-1]$ og $[1,\infty)$
f krummer ned i intervallet $[-1,1]$.
Vendepunkt: ± 1.



$f(x) = x^4 - 6x^2 + 10$

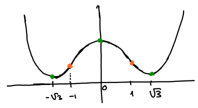
$f(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^4 - 6(-\sqrt{3})^2 + 10$
$= 9 - 6 \cdot 3 + 10$
$= 1$

$f(\sqrt{3}) = 1$

$f(1) = 1^4 - 6 \cdot 1^2 + 10 = 5$

$f(-1) = 5$

$f(0) = 10$



L'Hôpitals formel

Hvordan regner vi ut

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{når } f(x)\to 0 \text{ og } g(x)\to 0 \text{ når } x\to a$$
$$f(x)\to\infty \text{ og } g(x)\to\infty \text{ når } x\to a.$$

Eksempel: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

L'Hôpitals regel: Anta at enten

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$

eller (ii) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$

og at $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (der L er et tall et ∞ eller $-\infty$).

Da er
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Eksempel: Finn $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ ("$\frac{0}{0}$"-uttrykk)

Bruker L'Hôpital:
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

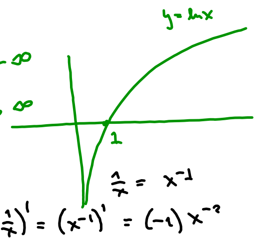
Eksempel: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x+4}$ ("$\frac{\infty}{\infty}$"-uttrykk)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x+4} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1} = \infty.$$

Eksempel:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

Eksempel:
$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{2x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{2} = \frac{-1}{2} = \underline{-\frac{1}{2}}$$

Eksempel:
$$\lim_{x\to 0^+}\underset{\uparrow\, 0}{x}\,\underset{\uparrow\, -\infty}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x \to -\infty}{\frac{1}{x} \to \infty}$$



$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2}{-\frac{1}{x^2}\cdot x^2} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{-1} = \underline{\underline{0}}$$

$\frac{1}{x} = x^{-1}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Bevis for "$\frac{0}{0}$"-versjonen av L'Hôpital i et spesialtilfelle, nemlig når $\lim_{x\to a} f'(a)$ og $\lim_{x\to a} g'(a)$ eksisterer og $\lim_{x\to a} g'(a) \neq 0$.

$$\underline{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$
$$= \underline{\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$