Oppgave 1

En funksjon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kalles

- Jevn dersom $f(-x) = f(x)$
- Odde dersom $f(-x) = -f(x)$

La a_n, b_n være Fourrier-koeffisientene til f. Vis at:

- $a_n = 0$ dersom f er odde,
- $b_n = 0$ dersom f er jevn.

Fra forelesningsnotatene fra 9. april vet vi at

- $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$,
- $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(x)\, dx$.

Da er vi klare for å løse oppgaven.

Svar

La oss starte med at f er en odde funksjon, da er:

$$-a_n = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} -f(x)\cos(nx)\,dx$$

f odde

$$\downarrow$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\cos(nx)\,dx$$

La $u = -x$

$$\frac{du}{dx} = -1$$

$$\Updownarrow$$

$$dx = -du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(u)\cos(n(-u))(-du)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos(nu)\,du = a_n$$

Her spiller det ingen rolle om variabelen i integralet er u, x, y, α eller ∞, dette er hvordan a_n er definert.

Fra utregningen ovenfor får vi:

$$-a_n = a_n \Rightarrow 2a_n = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a_n = 0}}$$

Når f er en jevn funksjon har vi:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \underset{f \text{ jevn}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(u)\cdot\sin(n(-u))\cdot(-du)$$

La $u = -x$

$\frac{du}{dx} = -1$

$dx = -du$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin(nu)\,du$$

$$= -b_n$$

Får dermed at

$$b_n = -b_n \Rightarrow 2b_n = 0 \Rightarrow \underline{\underline{b_n = 0}}.$$

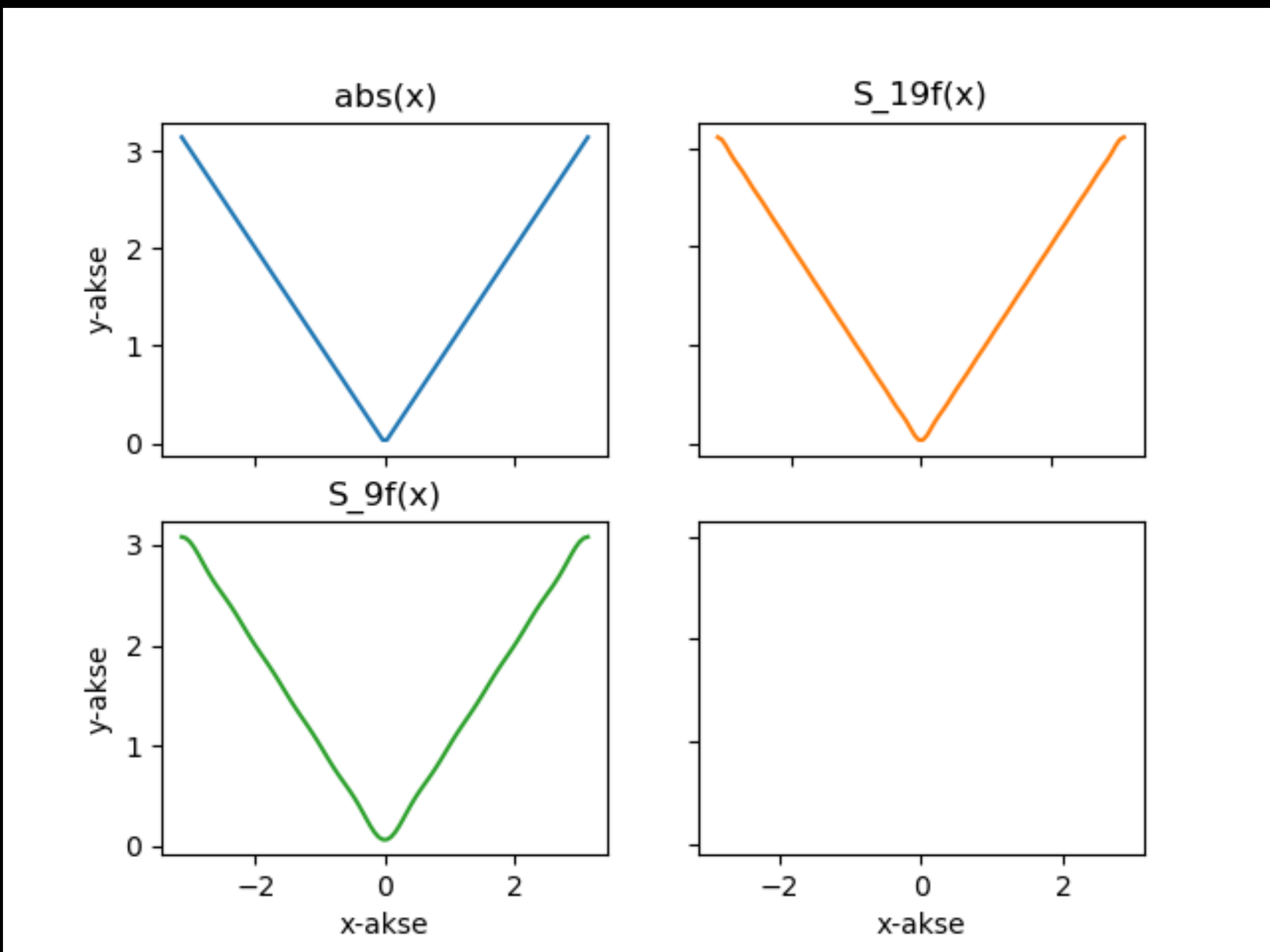
Oppgave 2:

For å plotte grafen til $f(x) = |x|$, $S_9 f(x)$ og $S_{19} f(x)$ har jeg brukt følgende Python kode:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#x-akse for plottet
x = np.linspace(-np.pi, np.pi, 100)

#Absoluttverdi-funksjonen
f = np.abs(x)

#Funksjonen gir fourier-funksjonen til f,
#der x er en array og M er 2N-1
def S(x,M):
    N = int((M + 1)/2)
    s = 0
    for k in range(1, N+1):
        s += np.cos((2*k - 1)*x)/(2*k - 1)**2

    return np.pi/2 - 4/np.pi*s

#Lager er 2x2 plot av funksjonene
fig, axs = plt.subplots(2,2)

#Plot for absoluttverdi-funksjonen
axs[0, 0].plot(x, f, "tab:blue")
axs[0, 0].set_title("abs(x)")

#Plot for S_9f(x) (N=5)
axs[1, 0].plot(x, S(x, 9), "tab:green")
axs[1, 0].set_title("S_9f(x)")

#Plot for S_19f(x) (N=10)
axs[0, 1].plot(x, S(x, 19), "tab:orange")
```

```
axs[0, 1].set_title("S_19f(x)")

#Plot for plottet nederst i høyre hjørne
#slik at aksene er lik de andre plottene
axs[1, 1].axis([-np.pi, np.pi, -0.1, np.pi])

#Skriver inn aksene i plottet
for ax in axs.flat:
    ax.set(xlabel = "x-akse", ylabel = "y-akse")

#Gjør slik at titlene blir synlige og ikke forsvinner (test selv)
for ax in axs.flat:
    ax.label_outer()

#Lagrer bildet av plottet
#plt.savefig("Fourrier.PNG")
plt.show()
```

Denne koden produserer plottet:



Oppgave 3

La a, b, r være reelle tall, hvor a, b ikke begge er lik null. Vis at hvis funksjonen:

$$f(x) = a\cos(rx) + b\sin(rx)$$

er 2π-periodisk (altså $f(x+2\pi) = f(x)$ for alle x), så må r være et helt tall. Hint: Bruk addisjons-reglene for cos og sin.

Svar

Addisjons reglene for cos og sin er:

- $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
- $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

Vi starter med å regne ut

$f(x+2\pi)$

$$f(x+2\pi) = a\cos(r(x+2\pi)) + b\sin(r(x+2\pi))$$

$$= a\cos(rx+2\pi r) + b\sin(rx+2\pi r)$$

$$= a\cos(rx)\cos(2\pi r) - a\sin(rx)\sin(2\pi r)$$
$$+ b\sin(rx)\cos(2\pi r) + b\cos(rx)\sin(2\pi r)$$

$$= (a\cos(rx) + b\sin(rx))\cos(2\pi r)$$
$$+ (b\cos(rx) - a\sin(rx))\sin(2\pi r)$$

$$= f(x)\cdot\cos(2\pi r) + (b\cos(rx) - a\sin(rx))\sin(2\pi r)$$

Hvis vi nå antar at $f(x+2\pi) = f(x)$

får vi:

$$f(x)\cos(2\pi r) + (b\cos(rx) - a\sin(rx))\sin(2\pi r) = f(x)$$

$$f(x)(\cos(2\pi r) - 1) + (b\cos(rx) - a\sin(rx))\sin(2\pi r) = 0$$

Hvis dette skal gjelde for alle x, gjelder dette for $x=0$ og $x = \frac{\pi}{2r}$, dette gir likningene:

I $\quad a(\cos(2\pi r) - 1) + b\sin(2\pi r) = 0.$

II $\quad b(\cos(2\pi r) - 1) - a\sin(2\pi r) = 0.$

for enhelhets skyld definerer vi

- $\alpha = \cos(2\pi r) - 1$
- $\beta = \sin(2\pi r)$

Dermed blir likningene

$$\text{I} \quad a\alpha + b\beta = 0$$
$$\text{II} \quad b\alpha - a\beta = 0$$

Dette gir matriselikningen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = -(a^2 + b^2) \neq 0$$ (siden både a og b ikke kan være 0.

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = -\frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dette gir oss, eller:

$$\begin{matrix} \text{I} & \alpha = 0 \\ \text{II} & \beta = 0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} \text{I} & \cos(2\pi r) - 1 = 0 \\ \text{II} & \sin(2\pi r) = 0 \end{matrix}$$

Og kan skrive I som

$$\cos(2\pi r) = 1.$$

Dette sier oss at vi ligger

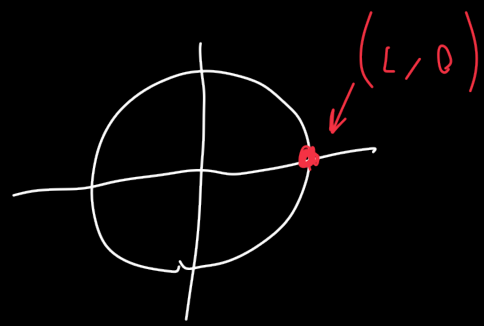
på punktet (1, 0) på enhetssirkelen

eneste måten dette

kan skje er hvis

vinkelen, $2\pi r$, er

et multiplum av 2π med andre ord:



$2\pi r = 2\pi k$, der k er et heltall.

$r = k$ og følgelig er r et heltall.