Ekstra oppgave

La G og H være grupper. Det kartesiske produktet $G \times H$ består av alle ordnede par (g, h) hvor $g \in G$ og $h \in H$. Vis at $G \times H$ utstyrt med den binære operasjonen

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$$

er en gruppe.

Svar

For å vise at $G \times H$ er en gruppe må man verifisere de tre kravene for abstrakte grupper (nevnt i forelesning 15. april eller kompendium s. 78–79).

i) Assosiativitet

ii) Eksistens av enhetselement

iii) Eksistens av inverselementer

La oss starte med i)

i)

La $(g_1, h_1), (g_2, h_2), (g_3, h_3) \in G \times H$.

Når vi ganger dem sammen får vi

$$((g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2)) \cdot (g_3, h_3)$$

$$= ((g_1 g_2, h_1 h_2)) \cdot (g_3, h_3)$$

$$= ((g_1 g_2) g_3, (h_1 h_2) h_3)$$

Her brukes det at G og H er grupper

$$= (g_1 (g_2 g_3), h_1 (h_2 h_3))$$

$$= (g_1, h_1) \cdot ((g_2 g_3, h_2 h_3))$$

$$= (g_1, h_1) \cdot ((g_2, h_2) \cdot (g_3, h_3)).$$

Dette er det vi ønsket å vise og kan dermed konkludere med at kravet om assosiativitet er oppfylt.

ii)

Her bruker vi at både G og H er grupper ved at G har et identitetselement, e_G, og H har et identitetselement, e_H.

Antagelsen videre vil være at (e_G, e_H) er identitetselementet til $G \times H$. La (g, h) være et vilkårlig element i $G \times H$, da er:

$$(g, h) \cdot (e_G, e_H) = (g e_G, h e_H) = (g, h)$$

$$(e_G, e_H) \cdot (g, h) = (e_G g, e_H h) = (g, h)$$

Dette beviser at (e_G, e_H) er identitetselementet til $G \times H$ og dermed er krav ii) oppfylt.

iii)

Igjen så vil vi bruke at G og H er grupper til å vise eksistens av inverselementer.

Hvis (g,h) er et vilkårlig element i $G\times H$ ønsker vi å vise at $(g,h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$, la os regne ut dette.

$$(g,h)\cdot(g^{-1},h^{-1}) = (gg^{-1}, hh^{-1}) = (e_G, e_H)$$

$$(g^{-1},h^{-1})\cdot(g,h) = (g^{-1}g, h^{-1}h) = (e_G, e_H)$$

Dette betyr at (g^{-1}, h^{-1}) er inverselementet til (g,h) og følgelig er $(g,h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$.

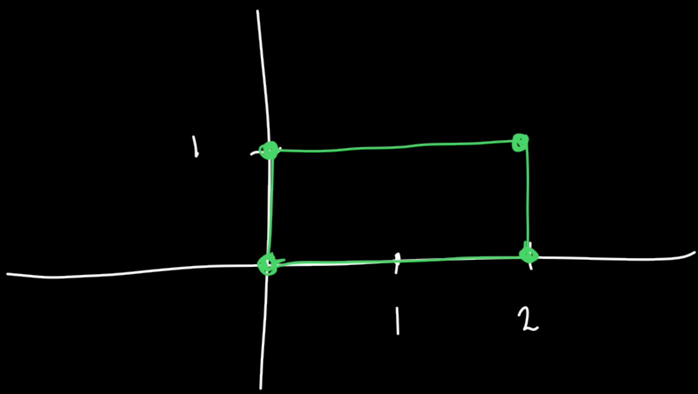
Dermed er krav iii) oppfylt og $G\times H$ er en gruppe.

170

Beskriv symmetriene til rektangelet med hjørner $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$ og $(0,1)$.

Svar

La oss tegne opp rektangelet

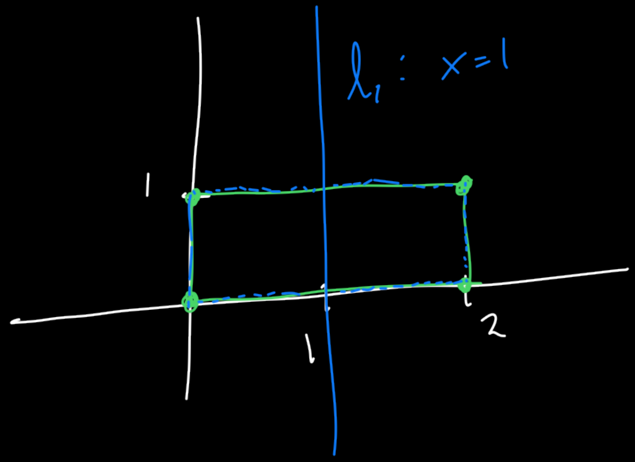


Nå skal vi finne alle plane isometrier som holder rektangelet stille (fiksert).

Første symmetri vi legger merke til er identitetsavbildningen

$$\mathrm{Id}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x},$$ den sender alle punkter til seg selv og holder dermed rektangelet fiksert.

Den neste symmetrien er en refleksjon (speiling) om linjen $x=1$
Dette kan vi se visuelt

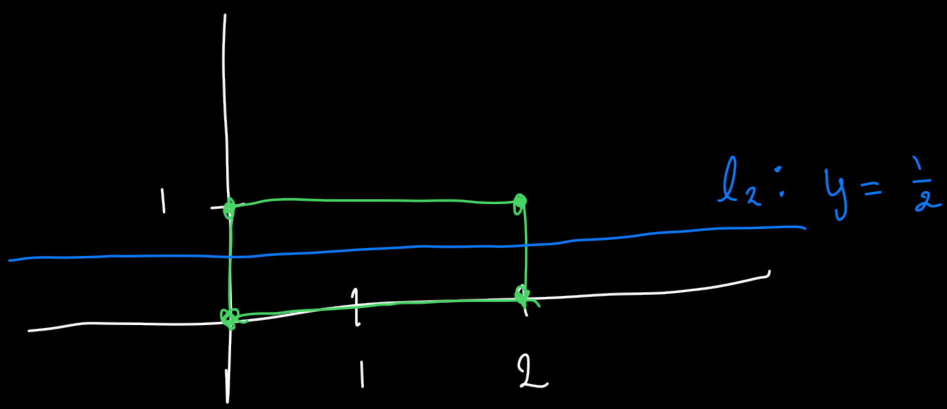


Her kan vi se at rektangelet holder seg der det er etter å ha speilet med linjen l. Vi kan skrive denne refleksjonen som

$$S_1(x) = t_{(1,0)} \circ S_{y\text{-akse}} \circ t_{(-1,0)}(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Neste symmetri er enda en refleksjon. Og den ligner litt på

S_1. S_1 er refleksjonen som skjærer rektangelets lengde i midten, mens den andre refleksjonen skjærer midten av høyden til rektangelet, og vi kaller denne refleksjonen for S_2. S_2 ser da slik ut:

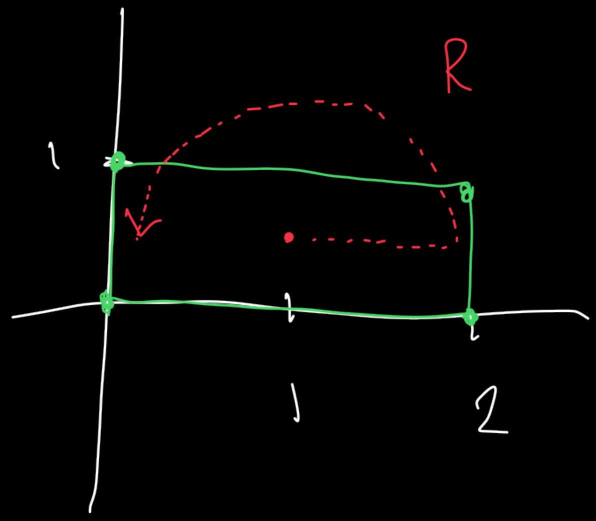


Som for S_1 ser vi at S_2 holder rektangelet i "ro" (fiksert), og vi kan skrive S_2 som:

$$S_2(x) = t_{(0,\frac{1}{2})} \circ S_{x\text{-akse}} \circ t_{(0,-\frac{1}{2})}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Siste symmetri er en rotasjon. Denne rotasjonen vil ha sentrum i $(1, \frac{1}{2})$ med en π rotasjon, og vi kaller denne rotasjonen for R.

Visuelt ser R slik ut



Denne rotasjonen holder også rektangelet fast. R kan da skrives som

$$R(x) = t_{(1,\frac{1}{2})} \circ \rho_{\pi} \circ t_{-(1,\frac{1}{2})}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ekstra oppgave

Kan rektangelet ha flere symmetrier?

Vis at $S_2 \circ R = R \circ S_2 = R_1$

$S_1 \circ R = R \circ S_1 = R_2$

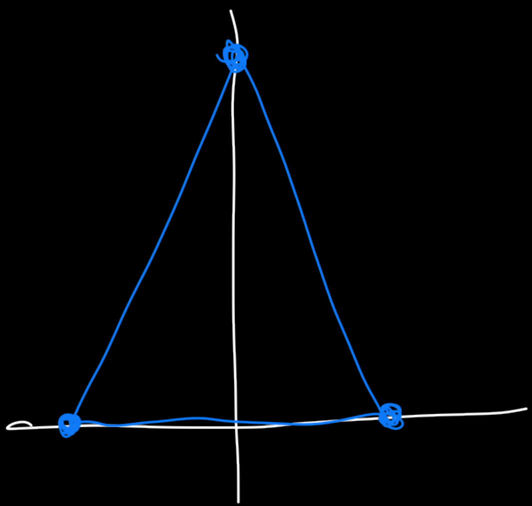
Hva er ordenen til S_1, S_2 og R?

Hvilken gruppe er dette?

(Hint se på oppgave 177)

171

Bestem symmetriene til en likebeint trekant



Svar

Først og fremst kan vi observere at trekanten ikke har noen rotasjoner som symmetrier. Grunnen til dette er at en rotasjon vil endre på posisjonen til trekanten (trekanten vil aldri havne på samme sted etter en rotasjon). Grunnen til dette er fordi sidene i trekanten er ikke like store.

Men siden to sider er like

store / lange kan vi prøve

med en refleksjon. Nå kan

vi observere at de to lengste

beina er speilet om hverandre

langs y-aksen. Dette betyr

at refleksjonen $S(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$

er en symmetri. Den eneste

andre er identitetsavbildningen

$Id(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$.

Ekstra oppgave

Hvilken gruppe er denne Symmetri-

gruppen?

173

a) Finn alle generatorene til den sykliske gruppa $\mathbb{Z}_8$.

Svar

Her er det lurt å se hva elementene genererer.

$$\mathbb{Z}_8 = \{[0],[1],[2],[3],[4],[5],[6],[7]\}$$

$$\langle[0]\rangle = \{[0]\}$$
$$\langle[1]\rangle = \{[0],[1],[2],[3],[4],[5],[6],[7]\} = \mathbb{Z}_8$$
$$\langle[2]\rangle = \{[0],[2],[4],[6]\}$$
$$\langle[3]\rangle = \{[0],[3],[6],[1],[4],[7],[2],[5]\} = \mathbb{Z}_8$$
$$\langle[4]\rangle = \{[0],[4]\}$$
$$\langle[5]\rangle = \{[0],[5],[2],[7],[4],[1],[6],[3]\} = \mathbb{Z}_8$$
$$\langle[6]\rangle = \{[0],[6],[4],[2]\}$$
$$\langle[7]\rangle = \{[0],[7],[6],[5],[4],[3],[2],[1]\} = \mathbb{Z}_8$$

Her ser vi at elementene [1], [3], [5] og [7] genererer $\mathbb{Z}_8$.

Her har jeg brukt at

$$\langle [a] \rangle = \{ n \cdot [a] \mid n \in \mathbb{Z} \}$$

Da blir f. eks.

$$\langle [6] \rangle = \{ 0 \cdot [6], 1 \cdot [6], 2 \cdot [6], 3 \cdot [6], 4 \cdot [6], \dots$$

$$= \{ [0], [6], [4], [2] \}$$

$$2 \cdot 6 = 12 = 4 + 8 \quad (\text{i } \mathbb{Z}_8 \text{ er } "8 = 0")$$

b) Finn alle undergrupper til $\mathbb{Z}_8$

Fra a) vet vi at

$$\langle [2] \rangle = \langle [6] \rangle = \{ [0], [2], [4], [6] \}$$

$$\langle [4] \rangle = \{ [0], [4] \}$$

Dette er undergruppene til $\mathbb{Z}_8$

177

Vis at det finnes ta forskjellige grupper av orden 4.

Svar

Først og fremst har vi gruppen $\mathbb{Z}_4$, siden $\mathbb{Z}_4$ har fire elementer $\mathbb{Z}_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$.
Neste gruppe er litt vanskeligere å finne. Her trenger vi å bruke resultatet til ekstra oppgaven.

at to grupper G og H kan bli en ny gruppe $G \times H$. Det finnes en formel for ordenen til $G \times H$ (Hvis G og H er endelige)

$$|G \times H| = |G| \cdot |H|.$$

(Ekstra oppgave vis dette)

Nå er vi nesten fremme, men en liten bemerkning at $4 = 2 \cdot 2$. Dette betyr at hvis vi finner en gruppe av orden 2 kan vi lage den nye gruppen. En gruppe av orden 2 er $\mathbb{Z}_2$. Dette betyr at den nye gruppen er

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$$

Fire elementer.

180

Vis at det finnes tre forskjellige grupper av orden 6.

Svar

En gruppe vi vet om med en gang er $\mathbb{Z}_6 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$
6 elementer

Neste gruppe er også en som har blitt forelest om er den symmetriske gruppen

6 elementer
$S_3 = \{e, \rho, \rho^2, \mu_1, \mu_2, \mu_3\}$

Denne gruppen tilsvarer alle symmetriene til en likesidet trekant, se på $\boxed{\text{eks. } 7.1.2}$ i kompendiet s. 77.

Den siste gruppen finner vi på samme måte som i oppgave 177.

Observer at $6 = 2 \cdot 3$, dermed trenger vi å finne en gruppe av orden 2 og 3. Vi vet om to slike grupper nemlig $\mathbb{Z}_2$ og $\mathbb{Z}_3$. Dermed vil den siste gruppen være

fjernet [ ] notasjonen enklere å skrive.

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (0,2), (1,2)\}$$

6 elementer

181

Hva er ordenen til den ortogonale matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Svar

Vi må finne det minste positive tallet n slik at $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La oss se på A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Siden vi må finne det minste positive tallet fortsetter vi med A^3.

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fremdeles ikke identitetsmatrisen.

⋮

La oss prøve med A^4.

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dette betyr at A har orden 4.