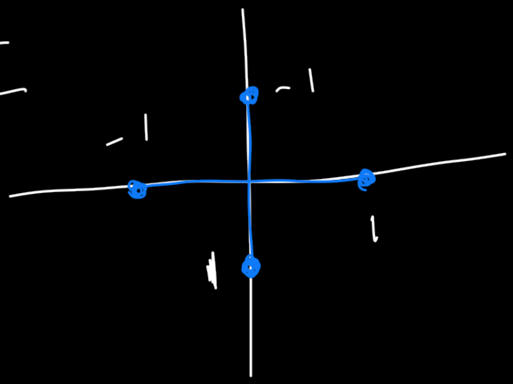
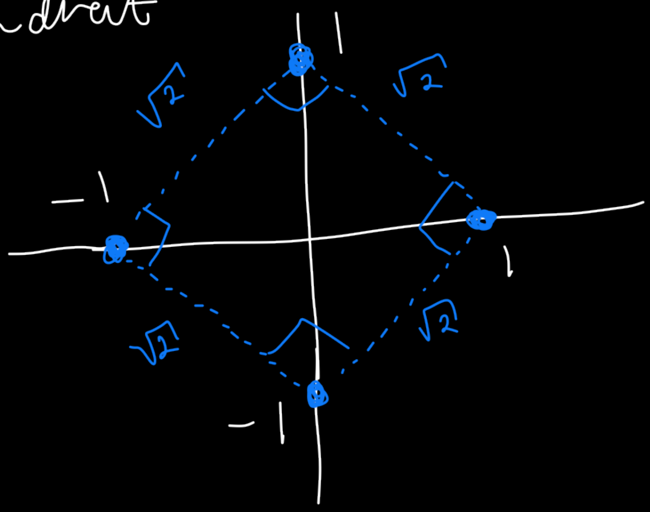
167



Beskriv symmetriene til den plane figuren.

Svar

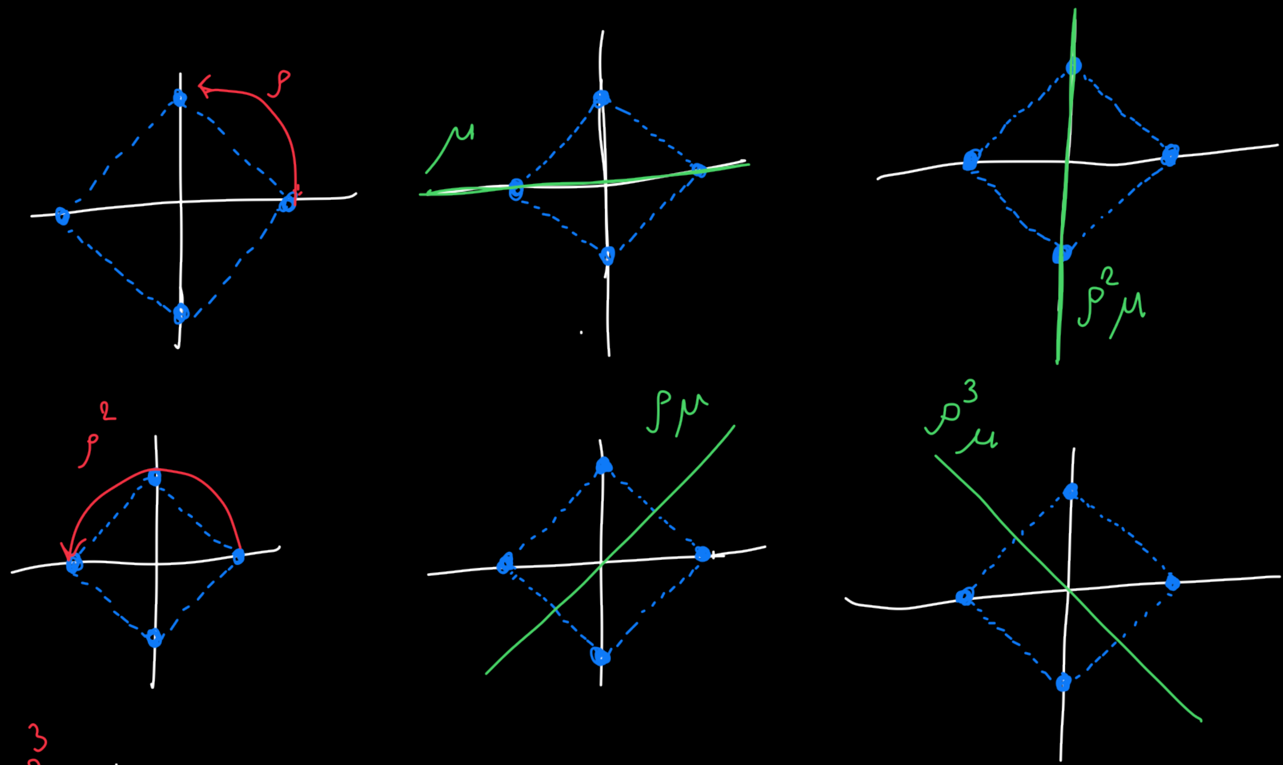
Det første vi kan observere er at disse punktene danner hjørnene til et kvadrat

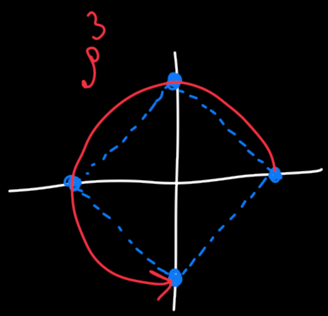


Vi vet hva symmetrigruppen til et kvadrat er (se på forelesning 15. april) og den er

$$D_4 = \langle \rho, \mu \mid \rho^4 = \mu^2 = Id, \mu\rho = \rho^{-1}\mu \rangle = \{Id, \rho, \rho^2, \rho^3, \mu, \rho\mu, \rho^2\mu, \rho^3\mu\}$$

Her definerer vi $\rho = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\frac{\pi}{2}$-rotasjon, og $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ speiling om x-akse. Visuelt ser det ut som:





Her har jeg ikke inkludert Id fordi den gjør ingenting.

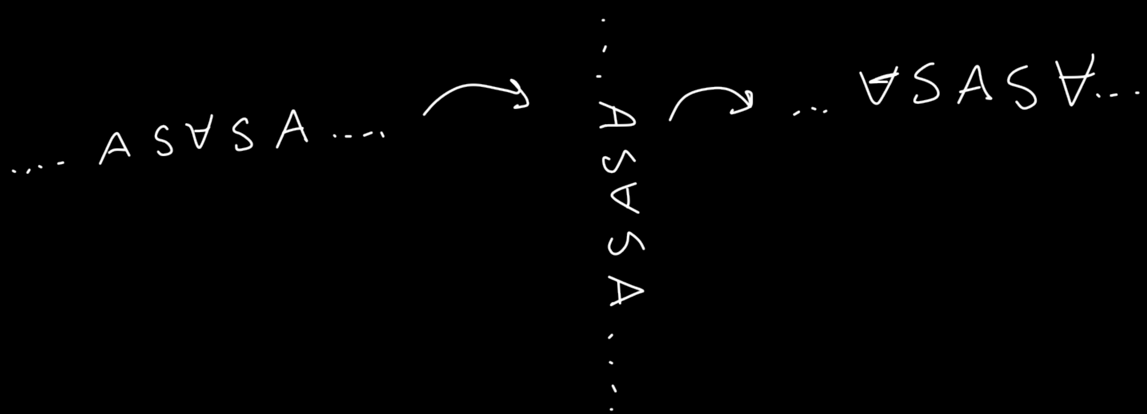
169

Finn symmetriene til borden

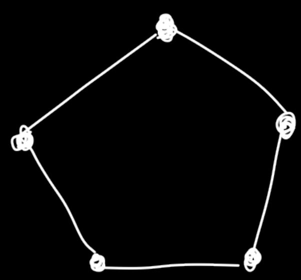
... A S ∀ S A S ∀ S A ....

Svar

Her starter vi med å anta at oppned A (∀) er A rotert π radianer (180°). Da har borden en π-rotasjon som symmetri siden S rotert π radianer er fremdeles S. Visuelt ser det slik ut:



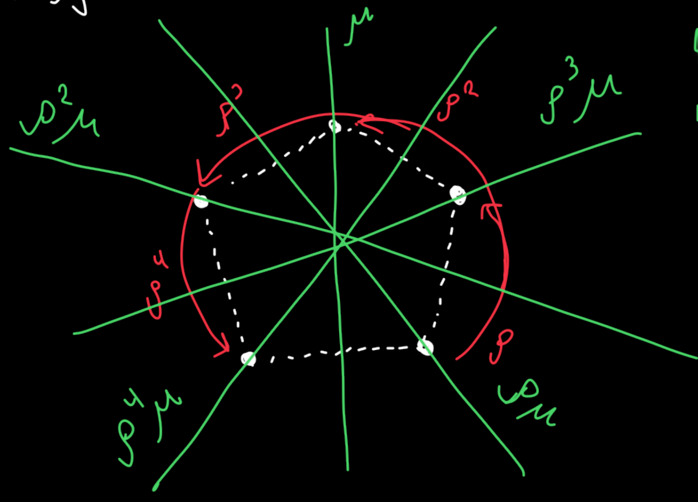
187



a) Beskriv symmetriene til den regulære femkanten

Svar

Som for kvadratet har vi rotasjoner og speilinger. Her har vi $\frac{2\pi}{5}$ rotasjon, ρ, som genererer alle rotasjonene og refleksjonen om y-aksen μ som vil, sammen med ρ, generere resten av refleksjonene. Visuelt



Her skal linjene møtes i et punkt

b) Hva er ordenen til symmetri-gruppen til den regulære femkanten?

Svar

Vi har 5 rotasjoner
Id, ρ, ρ^2, ρ^3 og ρ^5. Vi har
også 5 refleksjoner
$\mu, \rho\mu, \rho^2\mu, \rho^3\mu$ og $\rho^4\mu$.
Dermed er ordenen til symmetrigruppa
10.

c) Finn alle undergruppene til symmetrigruppa.

Svar

La $S = \{Id, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \mu, \rho\mu, \rho^2\mu, \rho^3\mu, \rho^4\mu\}$
, være symmetri gruppen, da er
følgende delmengder undergrupper

- S
- $\{Id\}$
- $\{Id, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4\} = \langle \rho \rangle$
- $\{Id, \mu\} = \langle \mu \rangle$
- $\{Id, \rho\mu\} = \langle \rho\mu \rangle$
- $\{Id, \rho^2\mu\} = \langle \rho^2\mu \rangle$
- $\{Id, \rho^3\mu\} = \langle \rho^3\mu \rangle$
- $\{Id, \rho^4\mu\} = \langle \rho^4\mu \rangle$

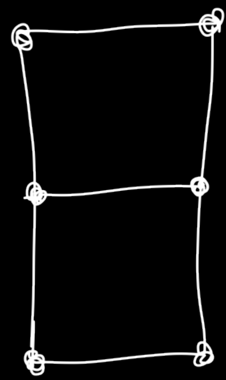
d) Finn fikspunktmengdene til undergruppene i oppgave c)

Svar

- $\mathcal{F}(s) = \{\vec{0}\}$
- $\mathcal{F}(\langle \mathrm{Id} \rangle) = \mathbb{R}^2$
- $\mathcal{F}(\langle \rho \rangle) = \{\vec{0}\}$
- $\mathcal{F}(\langle \mu \rangle) =$ refleksjons linjen til μ

Dette gjelder for de andre linjene også.

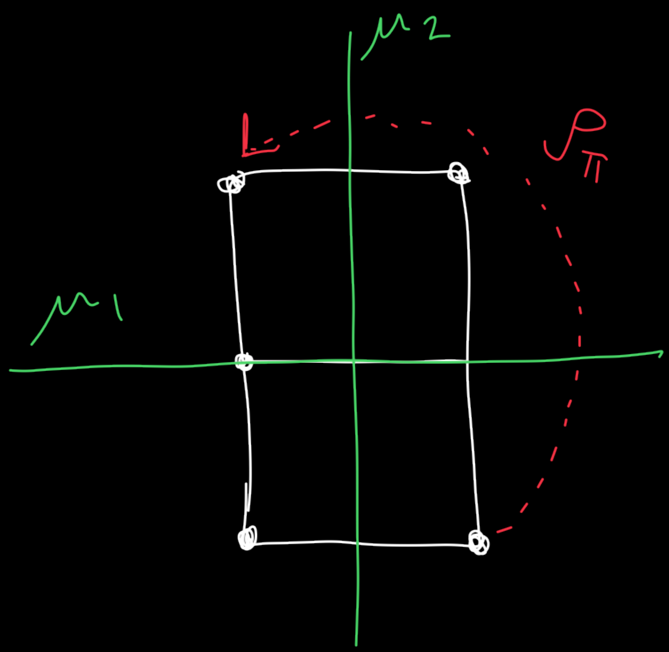
189



a) Beskriv symmetriene til figuren.

Svar

Symmetriene til figuren er de samme som figuren i oppgave 170 beskrevet i uke 11 Løsninger.
Visuelt ser de slikt ut



b) Hva er ordenen til symmetrigruppa til figuren.

Svar

Her har vi 4 symmetrier: Id, μ_1, μ_2 og ρ_π. Dermed er ordenen 4.

c) Finn alle undergruppene til denne symmetrigruppa.

Svar

La S være hele gruppen da er alle undergruppene:

- $S = \{Id, \mu_1, \mu_2, \rho_\pi\}$
- $\{Id\}$
- $\{Id, \mu_1\} = \langle \mu_1 \rangle$
- $\{Id, \mu_2\} = \langle \mu_2 \rangle$
- $\{Id, \rho_\pi\} = \langle \rho_\pi \rangle$

d) Finn fikspunktmengdene til undergruppene.

Svar

$F(S) = \{\vec{0}\}$

$F(\langle \mu_1 \rangle)$ = refleksjonslinjen til μ_1

$F(\langle \mu_2 \rangle)$ = ——— " ——— μ_2

$F(\langle \rho_\pi \rangle) = \{\vec{0}\}$

19)

a) Forklar hvorfor mengden av ortogonale 2x2 matriser danner en gruppe under multiplikasjon

Svar

i) Assosiativitet: vi har fra før av at matrise multiplikasjon er assosiativt og fra prop 2.2.8 vet vi at produktet av to ortogonale matriser er

ii) Identitetselement: dette er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iii) Invers elementer: La A være ortogonal, vi vil vise at A^{-1} er ortogonal

m.a.o. $(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

Siden A er ortogonal har vi $A^{-1} = A^T$ dermed

$$(A^{-1})^{-1} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

b) Er gruppa abelsk?

<u>Svar</u>

Velg $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ og $\rho = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Disse matrisene er begge ortogonale

og $s\rho = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ og $\rho s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

dermed er ikke $s\rho = \rho s$ og gruppen er ikke abelsk.

c) Gi noen undergrupper av denne gruppen.

Svar

La $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ og $\rho = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

da har vi undergruppene

$\langle \mu \rangle = \{ Id, \mu \}$

$\langle \rho \rangle = \{ Id, \rho, \rho^2, \rho^3 \}$

$\langle \mu, \rho \rangle = D_4$

d) Forklar sammenhengen mellom denne gruppen og symmetrigruppen til en sirkel.

Svar

De ortogonale 2x2 matrisene danner symmetrigruppen til sirkelen med sentrum i origo.

1 92

a) Forklar hvorfor mengden av invertible øvre triangulære 2x2 matriser danner en gruppe under multiplikasjon.

Svar

Assosiativitet: Følger fra matrisemultiplikasjon og to øvre triangulære matriser blir en ny øvre triangulær matrise under multiplikasjon.

Identitets element: $Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Invers elementer: La $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ være øvre triangulær. Da er

$A^{-1} = \frac{1}{ac} \cdot \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ også øvre triangulær og invertibel.

b) Er gruppa abelsk?

Svar

Nei $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

c) Forklar hvorfor mengden av invertible diagonale 2x2 matriser danner en undergruppe av gruppa i a). Er denne gruppa abelsk.

Svar

Invertible diagonale matriser er på formen

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ der $a \cdot b \neq 0$.

Dette er en undergruppe siden det er en delmengde (mengden av alle øvre triangulære 2×2 matriser som har 0 øverst i høyre hjørnet). Og produktet av to 2×2 invertible diagonale matriser, med matrisemultiplikasjon, er en invertibel 2×2 diagonal matrise.

Denne gruppen er abelsk

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix}.$$