Oppgave sett 3

Oppgave 1

Vi skal sette sammen to stive bevegelser. Den ene T_1, er en rotasjon med en vinkel $\frac{\pi}{2}$ om punktet $(1,1)$, og den andre, T_2 er en refleksjon om linja $y = -x$.

a) Skriv opp formler på formen

$$T_i(v) = A_i v + b_i$$ for de to avbildningene.

Svar

Vi starter med T_1 som er rotasjonen. Siden T_1 er en rotasjon så må A_1 være på formen $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta \end{pmatrix}$

og vi vet at vinkelen er $\frac{\pi}{2}$ dette betyr at $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

For å få T_1 må vi flytte rotasjonssenteret, $(1,1)$, til origo rotere med $\frac{\pi}{2}$ og så flytte senteret tilbake til $(1,1)$. Dette blir

$$T_1(v) = t_{(1,1)} \circ A_1 \circ t_{-(1,1)}(v)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left(v - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

For T_2 bruker vi resultatet på slutten av lemma 4.2.9.

Da er $T_2(v) = \frac{1}{1+(-1)^2}\begin{pmatrix} 1-(-1)^2 & 2\cdot(-1) \\ 2\cdot(-1) & (-1)^2-1 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{T_2(v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} v}}$$

b) Regn ut komposisjonen $T_1 \circ T_2$, og finn eventuelle fikspunkter.

Svar

$$T_1 \circ T_2(v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} v\right) + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

For å finne fikspunkter setter vi

$$T_1 \circ T_2(v) = v$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = v$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{la } v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{dette gir oss}$$

$$\text{I} \quad 0 = -2$$

$$\text{II} \quad -2y = 0$$

Dette betyr at $T_1 \circ T_2$ ikke har fikspunkter siden likning I ikke stemmer.

($T_1 \circ T_2$ er en glidespeiling).

c) Regn også ut komposisjonen $T_2 \circ T_1$.

Har denne avbildningen noen fikspunkter.

Svar

$$T_2 \circ T_1 (v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

For å finne fikspunkter gjør vi det samme igjen.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = v$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{igjen la } v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & -2x = 0 \\ \text{II} \quad & 0 = 2 \end{aligned}$$

Igjen vi ser at vi får noe som ikke stemmer, ved likning II. $T_2 \circ T_1$ har ikke fikspunkter.

($T_2 \circ T_1$ er også en glidespeiling)

d) Hva slags avbildning er $T_1 \circ T_2 + T_2 \circ T_1$.

Svar

$T_1 \circ T_2(v) + T_2 \circ T_1(v)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dette er en konstant avbildning.

Oppgave 4

La A være matrisen gitt ved

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Forklar hvorfor A er en ortogonal matrise.

Svar

Bruker def. 2.2.7

$$A^T = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \frac{1}{7^2}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} = I_3$$

b) Finn en egenvektor med egenverdi 1.

Svar

Dette er det samme som å

løse $Av = v$.

Dette blir $(A - I)v = \vec{0}$

ganger med 7 på begge sider for å unngå brøker.

$(7A - 7I)v = \vec{0}$, nå la $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -9 & -6 \\ -2 & 6 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad -x + 3y + 2z = 0 \\ &\text{II} \quad 3x - 9y - 6z = 0 \\ &\text{III} \quad -2x + 6y - 10z = 0 \end{aligned}$$

Her ser vi at $\text{II} = -3 \cdot \text{I}$ dermed trenger vi ikke likning II.

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad -x + 3y + 2z = 0 \\ &\text{III} \quad -2x + 6y - 10z = 0 \end{aligned}$$

ser på $\text{III} + 2 \cdot \text{I}$: $-4x - 6z = 0$

$\Rightarrow z = -\frac{2}{3}x$, setter dette inn i

I og får

$$-x + 3y + 2\left(-\frac{2}{3}x\right) = 0$$

$$-\frac{7}{3}x + 3y = 0$$

$$y = \frac{7}{9}x$$

Dette betyr at $v = \begin{pmatrix} x \\ \frac{7}{9}x \\ -\frac{2}{3}x \end{pmatrix}$, her lar vi

$x = 9t$ og får $v = \begin{pmatrix} 9t \\ 7t \\ -6t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$.

En egenvektor med egenverdi 1 er $\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$.

c) Finn fikspunkteene til A og bestem hva slags isometri den representerer.

Svar

I oppgave b) fant vi fikspunktene til A, og dette ble en linje.

$F_A = \left\{ t\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$. fra prop. 5.3.8 iii)

Ser vi at A er en rotasjon.

Oppgavesett 4

Oppgave 3

La A være matrisen gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{og}$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Vis at $\{u, v, w\}$ danner en lineært uavhengig mengde.

Svar

Hvis u, v og w er lineært så vil matrisen $\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$

være invertibel m.a.o. $\det(u \; v \; w) \neq 0$.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

dermed er mengden $\{u, v, w\}$ lineært uavhengig.

b) Regn ut determinanten til A og bruk den til å beregne trippelproduktet $[Av, Au, Aw]$. 2.3.8

Svar

Vi begynne å regne ut det A

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -2.$$

Nå bruker vi prop 5.1.8 som sier at

$[Au, Av, Aw] = \det(A) \cdot [u, v, w]$.

$$[u, v, w] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}, \text{ dette}$$

er den transponerte matrisen til den vi hadde i oppgave a). Proposisjon 2.3.8 sier at $\det(A) = \det(A^T)$, dermed vil $[u, v, w] = 2$. Til slutt har vi

$[Au, Av, Aw] = \det(A) \cdot [u, v, w] = 2 \cdot (-2) = -4.$

Oppgave 4

La V være vektorrommet utspent av

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Vis at mengden $\mathcal{B}$ er lineær uavhengig.

Svar

Vi ser på matrisen som har $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ som søyler. La $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ da er $\det(A) = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$.

Dermed er mengden lineært uavhengig.

b) Forklar hvorfor $\mathcal{B}$ danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

Svar

Definisjon 3.1.4 sier at en mengde er en basis dersom

- mengden er lineært uavhengig
- mengden utspenner vektorrommet

Vi har at mengden er lineært uavhengig, men må vise at den utspenner $\mathbb{R}^2$.

For å vise at den utspenner $\mathbb{R}^2$

lar vi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ og vil vise at vi

kan finne $a, b \in \mathbb{R}$ slik at

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + y \end{pmatrix}$$

Dette betyr at

$$(2x - y) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y - x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Og følgelig utspenner mengden $\mathbb{R}^2$

og er dermed en basis

c) La $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Forklar

hvorfor $\mathcal{B}$ og $\mathcal{S}$ genererer samme

vektorrom

Svar

$\mathcal{S}$ er standardbasisen til $\mathbb{R}^2$.

Siden både $\mathcal{S}$ og $\mathcal{B}$ er basiser for $\mathbb{R}^2$ og en av betingelsene til å være en basis er å utspenne vektorrommet vi de begge generere samme vektorrom.

d) Skriv opp matrisen til en lineær-avbildning som avbilder $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Svar

La $T(v) = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}v$ være avbildningen som er slik at

$T\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ og $T\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Dette gir oss

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ som gir likningene

$\underline{\text{I}}$ $a + b = 1$

$\underline{\text{II}}$ $c + d = 0$

$\underline{\text{III}}$ $a + 2b = 0$

$\underline{\text{IV}}$ $c + 2d = 1$

Omorganiserer vi likningen får vi

$\underline{\text{I}}$ $a + b = 1$

$\underline{\text{III}}$ $a + 2b = 0$

$\underline{\text{II}}$ $c + d = 0$

$\underline{\text{IV}}$ $c + 2d = 1$ som gir opphav til

matrise likningene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dette gir oss

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dermed er $T(v) = A^{-1} v$

$$T(v) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} v$$

e) La $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ være søylene i en 2×2 matrise. Hva er rangen til denne matrisen? Hva er dimensjonen til nullrommet?

Svar

La $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, vi vet fra oppgave a) at søylene er lineært uavhengig og dermed er

$\text{rg} A = 2.$

Fra teorem 3.2.7 har vi at

$$\operatorname{rg} A + \dim N(A) = 2$$

(siden A tar en vektor i $\mathbb{R}^2$ og sender den til en vektor i $\mathbb{R}^2$)

$$2 + \dim N(A) = 2$$

Dette betyr at

$$\dim N(A) = 0.$$

Dimensjonen til nullrommet til A er 0.