54, <u>55</u>, 65, 67, <u>68</u>, 70, 75

<u>55</u>

Hva er dimensjonen til vektorrommet generert av

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Dimensjonen vil være antall lineært uavhengige vektorer. Starter med å se på determinanten.

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}}_{M} = \det\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$$

$$= -1 + 1 = 0.$$

Siden $\det M = 0$ kan ikke M ha maksimal rang, som er 3, og dermed

$\operatorname{rg} M \leq 2 \iff \dim V \leq 2.$

Vi vil finne en lin. avhengighet der $a, b, c \in \mathbb{R}$ og $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

$$a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Skriver opp liknings. sys.

$\mathrm{I}: \; a + b = 0$

$\mathrm{II}: \; a + c = 0$

$\mathrm{III}: \; b - c = 0 \implies b = c$

Betyr at $\mathrm{II} = \mathrm{I}$ og $a = -b$

dermed er avhengigheten $(-b, b, b)$

sett $b = 1$ og får $(-1, 1, 1)$ dvs.

$$-\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 0 \quad \text{eller}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Siden $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ genereres av de to andre trenger vi kun å se på om $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ er lin. uavhengige.

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

I: $a = 0$
II: $b = 0$
III: $a - b = 0$, siden både $a=0$ og $b=0$ så er vektorene lin. uavhengig og dermed er $\operatorname{rg} M = 2$ som betyr at $\dim V = 2$.

68

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(3-\lambda)(1+\lambda) + 4$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = (\lambda - 1)(\lambda - 1)$$

egenverdiene er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 1$

b) Egenvektorer

b) $(A - \lambda I) \cdot v_\lambda = \vec{0}$

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 3-1 & -2 \\ 2 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$I: 2x - 2y = 0$

$II: 2x - 2y = 0 \qquad I = II$

$I \Rightarrow x = y$ d.v.s. at $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$

sett $x = 1$ $\quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (= \vec{v}_2$, regn selv$)$

Siden $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ danner ikke egenvektorene en basis for $\mathbb{R}^2$