72

a) $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

vektorene utspenner $\mathbb{R}^2$ siden

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(2y+x)\,u_1 + \frac{1}{3}(y-x)\,u_2 + 0 \cdot u_3$$

Herfra antar vi at u_1, u_2 og u_3 er lin. uavh. og viser at vi kommer frem til en motsigelse

Da vet vi at $\{u_1, u_2, u_3\}$
er lin. uav. og spenner ut $\mathbb{R}^2$
dermed er vektorene en basis
for $\mathbb{R}^2$, men dette betyr at
$\dim \mathbb{R}^2 = 3$ (siden det er 3 lin. uav.
vektorer i basisen). Dette stemmer
ikke fra eks. 3.1.19 at $\dim \mathbb{R}^n = n$
og dermed er de lineært avhengige.

b) så her kan vi velge

$\{u_1, u_2\}$, $\{u_1, u_3\}$ og $\{u_2, u_3\}$

For å vise at parene er lin. uav.

$$a u_1 + b u_2 = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Hvis matrisen $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}$ er invertibel så er vektorene lineært. uav. siden da må $a = b = 0$. så må vise at determinanten er forskjellig fra 0.

$$\det(u_1\ u_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

$$\det(u_1\ u_3) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

$$\det(u_2\ u_3) = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$$

Så alle par av vektorer vil være lineært uavhengig.

c) $V = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$

$(u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^2)$

Siden vektorene er i $\mathbb{R}^2$, utspenner $\mathbb{R}^2$ og det er 2 lineært uavhengige vektorer så har $\dim V = 2$.

104

$$\begin{pmatrix} a+b \\ d+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} 1+y \\ 2+x+y \end{pmatrix}$$

skriv T på formen

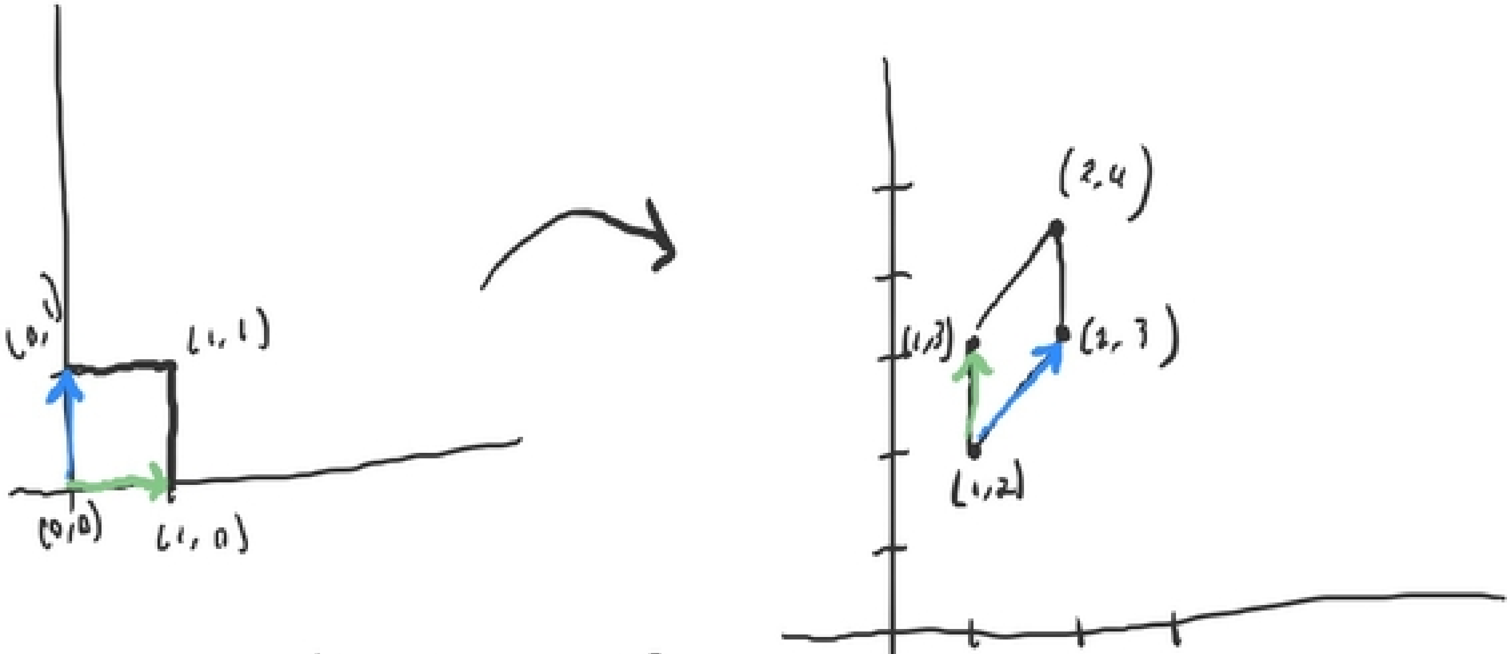
$$T(\vec{x}) = \underset{\text{Matrise}}{A} \cdot \underset{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\vec{x}} + \vec{b} \leftarrow \text{konstant vektor}$$

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$$

$$= x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Enhets kvadratets hjørner		nye firkantens hjørner
$(0,0)$	$\overset{T}{\longmapsto}$	$(1,2)$
$(1,0)$	$\overset{T}{\longmapsto}$	$(1,3)$
$(0,1)$	$\overset{T}{\longmapsto}$	$(2,3)$
$(1,1)$	$\overset{T}{\longmapsto}$	$(2,4)$



Orienteringen på vektorene $(\rightarrow, \rightarrow)$ byttet orientering siden

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} < 0$$